

Κεφάλαιο 38

Κβαντική Μηχανική



Περιεχόμενα Κεφαλαίου 38

- Κβαντική Μηχανική– Μια καινούργια Θεωρία
- Η κυματοσυνάρτηση και η εξήγησή της. Το πείραμα της διπλής σχισμής.
- Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg.
- Φιλοσοφικές επιπτώσεις. Πιθανότητα και Αιτιοκρατία
- Η χρονικώς ανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger για μία διάσταση.
- Η χρονικώς εξαρτημένη εξίσωση του Schrödinger.

Περιεχόμενα του Κεφαλαίου 38

- Ελεύθερα σωματίδια, Επίπεδα κύματα και κυματοπακέτα.
- Σωματίδιο σε απειρόβαθο φρεάτιο.
- Πεπερασμένο πηγάδι.
- «Ριφιφι» μέσα από Φράγματα (το φαινόμενο της σήραγγας).

38.1 Κβαντική Μηχανική–Μια Νέα Θεωρία

Η Κβαντική μηχανική συμπεριλαμβάνει την δυαδικότητα της ύλης (σωματίδιο-κύμα) και εξηγεί με επιτυχία τις ενεργειακές καταστάσεις σε σύνθετα άτομα / μόρια, τις σχετικές εντάσεις των φασματοσκοπικών γραμμών και πολλά άλλα φαινόμενα.

Είναι η θεμελιώδης θεωρία κάθε φυσικής διαδικασίας.

Η Κβαντική μηχανική είναι απαραίτητη για την κατανόηση ατόμων και μορίων αλλά δύναται να έχει επιπτώσεις και σε προβλήματα μεγαλύτερης κλίμακας.

38.2 Η Κυματοσυνάρτηση και η ερμηνεία της- Το πείραμα της διπλής σχισμής.

Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα περιέχει ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που ταλαντεύονται. **Τι ταλαντεύεται όμως σε ένα κύμα ύλης;**

Αυτόν το ρόλο τον παίζει η κυματοσυνάρτηση, Ψ .

Το τετράγωνο της κυματοσυνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο, είναι ανάλογο του αριθμού των ηλεκτρονίων που «αναμένεται» να βρεθούν στο σημείο αυτό.

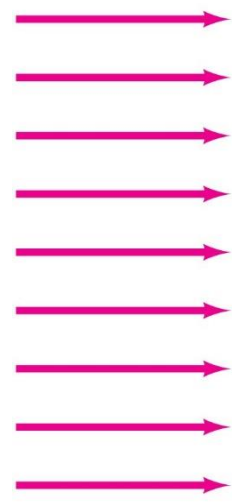
Για ένα ηλεκτρόνιο, είναι η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο σε αυτό το συγκεκριμένο σημείο.

38.2 Η Κυματοσυνάρτηση και η ερμηνεία της- Το πείραμα της διπλής σχισμής.

Για παράδειγμα:
Παρατηρούμε ένα
διάγραμμα συμβολής όταν
ηλεκτρόνια περάσουν μέσα
από πολλαπλές σχισμές.

Στέλνοντας τα ηλεκτρόνια
ένα κάθε φορά, **δεν**
μπορούμε να προβλέψουμε
την τροχιά που ακολουθεί
κάθε ηλεκτρόνιο, παρά
μόνο την τελική κατανομή.

Light or
electrons



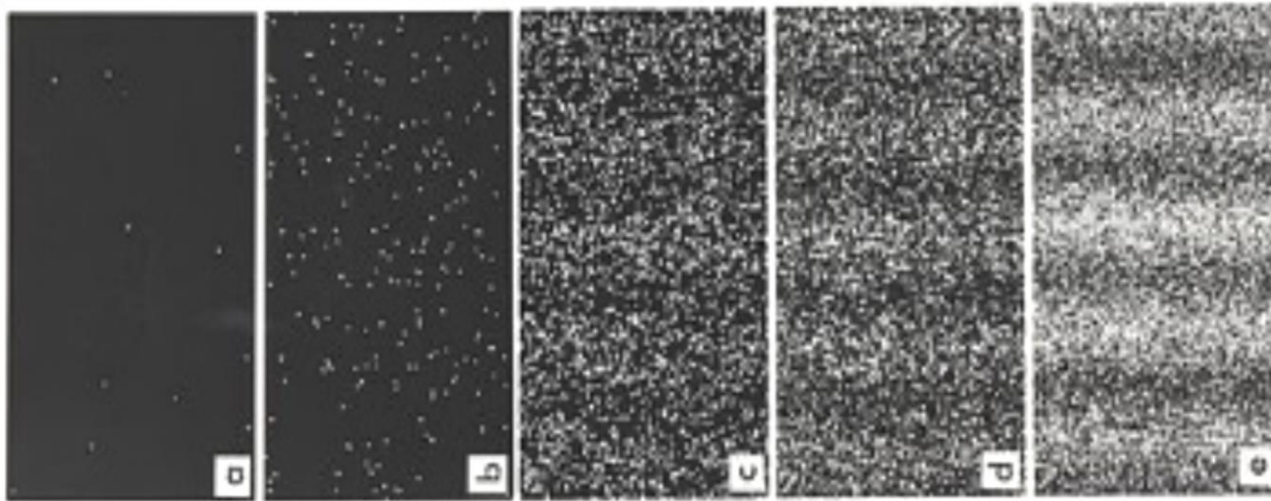
Copyright © 2008 Pearson Education, Inc.

Intensity
on screen



38.2 Η Κυματοσυνάρτηση και η ερμηνεία της- Το πείραμα της διπλής σχισμής.

https://en.wikipedia.org/wiki/Double-slit_experiment



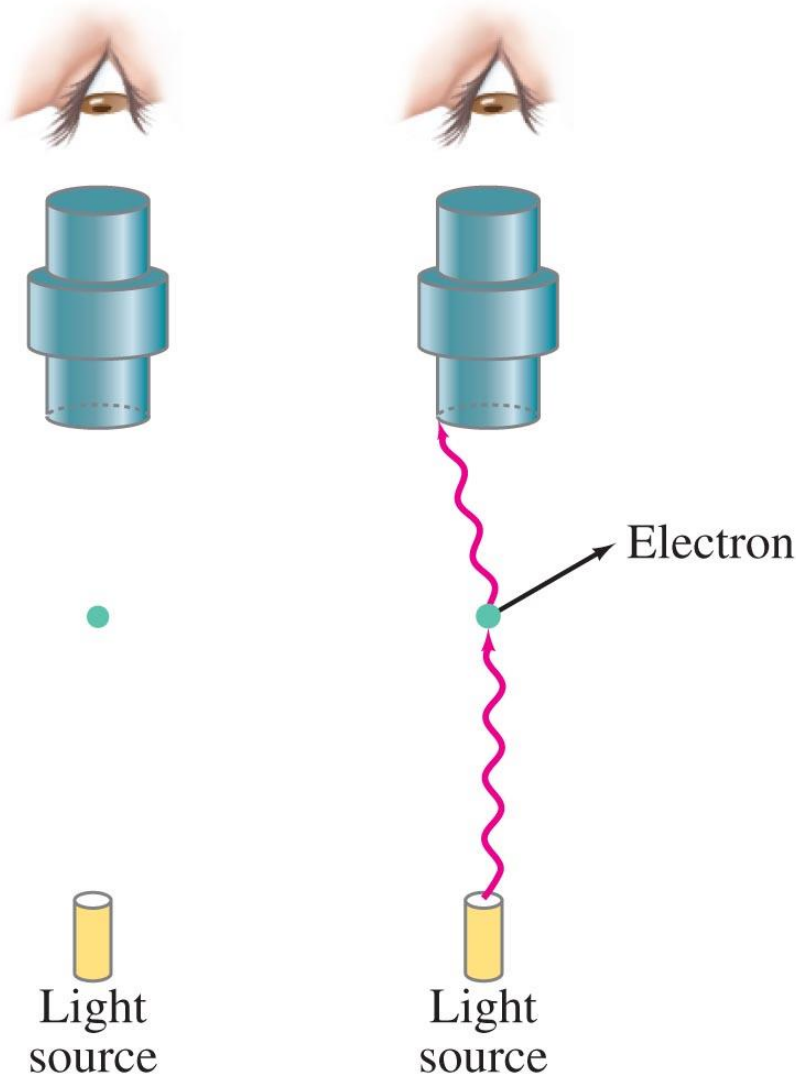
38.3 Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg

https://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty_principle

Η κβαντική μηχανική επιβάλλει «**όρια**» (σφάλματα) στις μετρήσεις μας. Τα όρια αυτά δεν είναι πειραματικά (δηλ. πρόβλημα με τα όργανα) αλλά **εγγενή**.

Τούτο είναι συνέπεια της δυαδικότητας σωματιδίου-κύματος και της αλληλεπίδρασης μεταξύ του οργάνου μέτρησης και του αντικειμένου που θέλουμε να παρατηρήσουμε.

38.3 Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg



Φανταστείτε ότι προσπαθείτε να «δείτε» ένα ηλεκτρόνιο με ένα ισχυρό μικροσκόπιο. Απαιτείται τουλάχιστον ένα φωτόνιο να σκεδαστεί από το ηλεκτρόνιο ώστε αυτό να εισέλθει στο μικροσκόπιο. Η διαδικασία της σκέδασης όμως «αλλάζει» (έστω και ελάχιστα, την ορμή του ηλεκτρονίου).

38.3 Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg

https://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty_principle

Η αβεβαιότητα της ορμής του ηλεκτρονίου συσχετίζεται με τη μεταβολή στην ορμή του φωτονίου δηλ. από μηδέν μέχρι την ολική μεταφορά της ορμής στο ηλεκτρόνιο.

Επιπλέον, η «ακρίβεια» μέτρησης της θέσης του ηλεκτρονίου είναι της τάξης μεγέθους του μήκους κύματος του φωτονίου.

38.3 Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg

Η σχέση μεταξύ της αβεβαιότητας στην ορμή και τη θέση δίδεται από την σχέση:

$$(\Delta x)(\Delta p_x) \gtrsim \frac{h}{2\pi}.$$

Η σχέση αυτή είναι ένα παράδειγμα της αρχής της αβεβαιότητας του Heisenberg.

Μας λέει ότι υπάρχει περιορισμός στην ακρίβεια μέτρησης, όταν η θέση και η ορμή μετρηθούν **ταυτόχρονα**.

Μπορούμε όμως να μετρήσουμε ταυτόχρονα τη θέση στον άξονα **x** και την ορμή στο **y**. **ΓΙΑΤΙ;**

38.3 Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg

https://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty_principle

Αντίστοιχα, για την ταυτόχρονη μέτρηση της ενέργειας και του χρόνου βρίσκουμε:

$$(\Delta E)(\Delta t) \gtrsim \frac{h}{2\pi}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια μιας διεγερμένης κατάστασης έχει περιορισμένο χρόνο ζωής.

Επίσης δηλώνει ότι για πολύ μικρούς χρόνους, η αρχή διατήρησης της ενέργειας δύναται να **παραβιαστεί!**

38.3 Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg

EXAMPLE 38-1 **Position uncertainty of an electron.** An electron moves in a straight line with a constant speed $v = 1.10 \times 10^6$ m/s which has been measured to a precision of 0.10%. What is the maximum precision with which its position could be simultaneously measured?

APPROACH The momentum is $p = mv$, and the uncertainty in p is $\Delta p = 0.0010p$. The uncertainty principle (Eq. 38-1) gives us the lowest Δx using the equals sign.

SOLUTION The momentum of the electron is

$$p = mv = (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.10 \times 10^6 \text{ m/s}) = 1.00 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

The uncertainty in the momentum is 0.10% of this, or $\Delta p = 1.0 \times 10^{-27}$ kg·m/s. From the uncertainty principle, the best simultaneous position measurement will have an uncertainty of

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{1.055 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{1.0 \times 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m/s}} = 1.1 \times 10^{-7} \text{ m},$$

or 110 nm.

NOTE This is about 1000 times the diameter of an atom.

38.3 Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg

EXAMPLE 38-2 **Position uncertainty of a baseball.** What is the uncertainty in position, imposed by the uncertainty principle, on a 150-g baseball thrown at (93 ± 2) mi/h = (42 ± 1) m/s?

APPROACH The uncertainty in the speed is $\Delta v = 1$ m/s. We multiply Δv by m to get Δp and then use the uncertainty principle, solving for Δx .

SOLUTION The uncertainty in the momentum is

$$\Delta p = m \Delta v = (0.150 \text{ kg})(1 \text{ m/s}) = 0.15 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Hence the uncertainty in a position measurement could be as small as

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{0.15 \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 7 \times 10^{-34} \text{ m}.$$

NOTE This distance is far smaller than any we could imagine observing or measuring. It is trillions of trillions of times smaller than an atom. Indeed, the uncertainty principle sets no relevant limit on measurement for macroscopic objects.

38.3 Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg

EXAMPLE 38–3 ESTIMATE **J/ψ lifetime calculated.** The J/ψ meson, discovered in 1974, was measured to have an average mass of $3100 \text{ MeV}/c^2$ (note the use of energy units since $E = mc^2$) and an intrinsic width of $63 \text{ keV}/c^2$. By this we mean that the masses of different J/ψ mesons were actually measured to be slightly different from one another. This mass “width” is related to the very short lifetime of the J/ψ before it decays into other particles. From the uncertainty principle, if the particle exists for only a time Δt , its mass (or rest energy) will be uncertain by $\Delta E \approx \hbar/\Delta t$. Estimate the J/ψ lifetime.

APPROACH We use the energy–time version of the uncertainty principle, Eq. 38–2.

SOLUTION The uncertainty of $63 \text{ keV}/c^2$ in the J/ψ’s mass is an uncertainty in its rest energy, which in joules is

$$\Delta E = (63 \times 10^3 \text{ eV})(1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) = 1.01 \times 10^{-14} \text{ J}.$$

Then we expect its lifetime τ ($= \Delta t$ using Eq. 38–2) to be

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{1.06 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{1.01 \times 10^{-14} \text{ J}} \approx 1 \times 10^{-20} \text{ s}.$$

Lifetimes this short are difficult to measure directly, and the assignment of very short lifetimes depends on this use of the uncertainty principle. (See Chapter 43.)

38.4 Φιλοσοφικές Επιπτώσεις- Πιθανότητα ή Αιτιοκρατία

Στην Κλασική μηχανική του Νεύτωνα, η αιτιοκρατία διέπει τον κόσμο. **Η γνώση των δυνάμεων και των αρχικών συνθηκών θέσεων και ταχύτητας προβλέπει απολύτως την κίνηση του αντικειμένου .**

Στην Κβαντική μηχανική τα πράγματα είναι διαφορετικά. Μπορείς να προβλέψεις την «συνολική» κίνηση ενός συνόλου αντικειμένων, χωρίς όμως να «επιτρέπεται» η απόλυτη γνώση της τροχιάς του καθενός.

38.5 Η χρονικώς ανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger

https://en.wikipedia.org/wiki/Schrödinger_equation

Όπως και με τους νόμους του Νεύτωνα, έτσι και με την εξίσωση του Schrödinger δεν την αποδεικνύουμε.

Απαιτούμε η κυματοσυνάρτηση να περιγράφει την κίνηση ενός κύματος, και τη διατήρηση της ενέργειας. Έτσι γράφουμε:

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx,$$

όπου

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar}.$$

38.5 Η χρονικώς ανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger

https://en.wikipedia.org/wiki/Schrödinger_equation

Η διατήρηση της ενέργειας επιβάλλει:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U = E.$$

Ο Schrödinger έδειξε ότι η εξίσωση που πληροί τις προϋποθέσεις έχει τη μορφή:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

Στάσιμα κύματα: κυματοσυναρτήσεις που δεν εξαρτώνται από τον χρόνο!

38.5 Η χρονικώς ανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger

https://en.wikipedia.org/wiki/Schrödinger_equation

Εφόσον η λύση της εξίσωσης του Schrödinger απευθύνεται σε ένα σωματίδιο, η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο σε όλο το χώρο θα είναι ίσο με την μονάδα δηλ. κάπου θα βρεθεί!

$$\int_{\text{all space}} |\psi|^2 dV = \int |\psi|^2 dx = 1.$$

Η κυματοσυνάρτηση λέμε ότι είναι **κανονικοποιημένη** όταν πληρούνται αυτές οι σχέσεις.

38.6 Η χρονικώς εξαρτημένη εξίσωση του Schrödinger

https://en.wikipedia.org/wiki/Schrödinger_equation

Πέρα από τα στάσιμα κύματα, η γενικότερη μορφή της εξίσωσης του Schrödinger έχει τη μορφή:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}.$$

Η χρονικώς ανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger απορρέει από την παρούσα εάν υποθέσουμε ότι:

$$\Psi(x, t) = \psi(x)f(t)$$

38.6 Η χρονικώς εξαρτημένη εξίσωση του Schrödinger

Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι η χρονική και χωρική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης είναι ανεξάρτητες!

Η χρονική εξέλιξη μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση:

$$f(t) = e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t}.$$

Η συνάρτηση αυτή έχει «μέτρο» μονάδα (1) και επομένως δεν επηρεάζει την πιθανότητα ($|\Psi|^2$) να βρεθεί το σωματίδιο σε κάποιο σημείο του χώρου.

38.7 Ελεύθερα σωματίδια, επίπεδα κύματα και κυματοπακέτα.

Ελεύθερο σωματίδιο: απουσία δυνάμεων, συνεπώς $U = 0$. Η εξίσωση του Schrödinger μετασχηματίζεται σε εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή επειδή $U = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \quad \text{ή} \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k\psi(x) = 0$$

όπου

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{\sqrt{2m \frac{1}{2}mv^2}}{\hbar} = \frac{mv}{\hbar} = \frac{p}{\frac{h}{2\pi}} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

και οι λύσεις έχουν την μορφή :

$$\psi = A \sin kx + B \cos kx,$$

38.7 Ελεύθερα σωματίδια, επίπεδα κύματα και κυματοπακέτα.

EXAMPLE 38-4 **Free electron.** An electron with energy $E = 6.3 \text{ eV}$ is in free space (where $U = 0$). Find (a) the wavelength λ and (b) the wave function ψ for the electron, assuming $B = 0$.

APPROACH The wavelength $\lambda = 2\pi/k$ (Eq. 38-11b) where the wave number k is given by Eq. 38-11a. The wave function is given by $\psi = A \sin kx$.

SOLUTION

$$\begin{aligned} (a) \quad \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} \\ &= \frac{2\pi(1.055 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(6.3 \text{ eV})(1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}} \\ &= 4.9 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.49 \text{ nm}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ &= 1.28 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}, \end{aligned}$$

so

$$\psi = A \sin kx = A \sin[(1.28 \times 10^{10} \text{ m}^{-1})(x)].$$

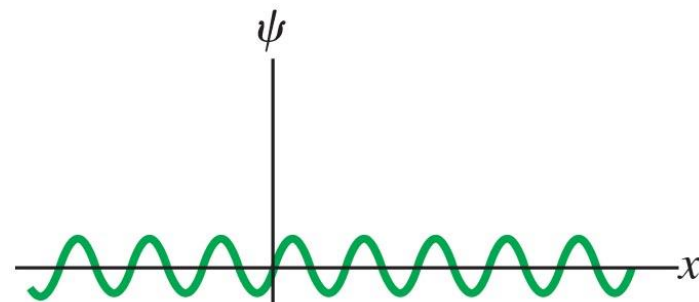
38.7 Ελεύθερα σωματίδια, επίπεδα κύματα και κυματοπακέτα.

https://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty_principle

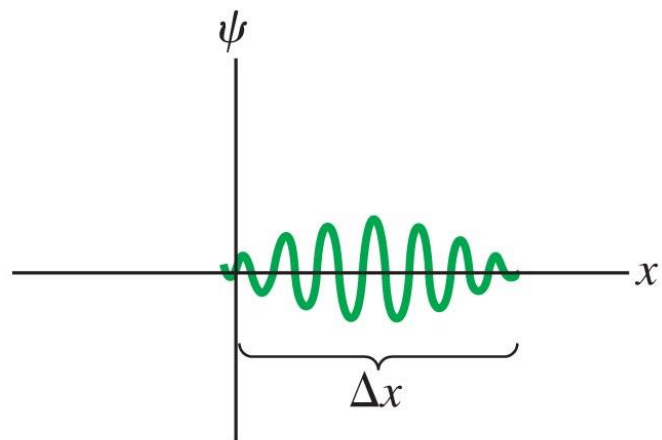
Η λύση για το ελεύθερο σωματίδιο είναι ένα επίπεδο κύμα, σχήμα (a).

Ρεαλιστικότερη απεικόνιση είναι το σχήμα (b).

Το κυματοπακέτο έχει τόσο το πεδίο τιμών της ορμής ($k\hbar$) όσο και την πεπερασμένη αβεβαιότητα στην θέση Δx (εύρος).



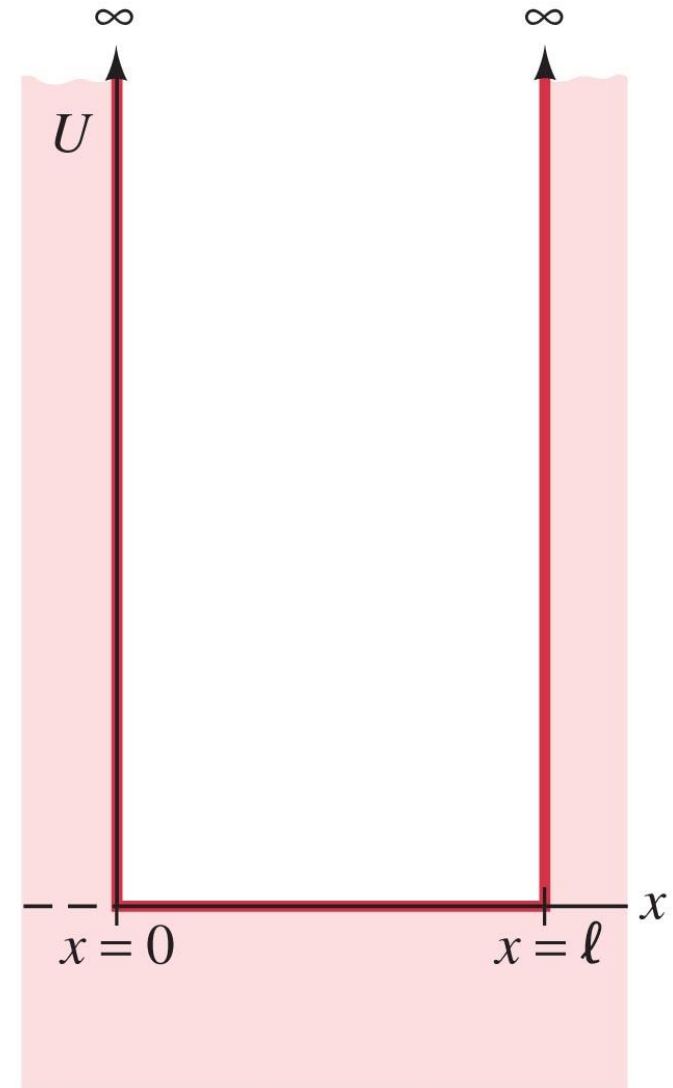
(a)



(b)

38.8 Το σωματίδιο σε απειρόβαθο πηγάδι-Τετραγωνικό Δυναμικό

Μια από τις περιπτώσεις όπου η εξίσωση του Schrödinger επιλύεται «ακριβώς», είναι το απειρόβαθο πηγάδι. Το δυναμικό είναι μηδέν μεταξύ των τιμών $0 \leq x \leq \ell$ και άπειρο σε όλα τα υπόλοιπα σημεία.



38.8 Το σωματίδιο σε απειρόβαθο πηγάδι-Τετραγωνικό Δυναμικό

Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος επιβάλλουν ότι $\psi = 0$ όταν $x = 0, \ell$. Αυτό συνεπάγεται:

$$\psi = A \sin kx + B \cos kx,$$

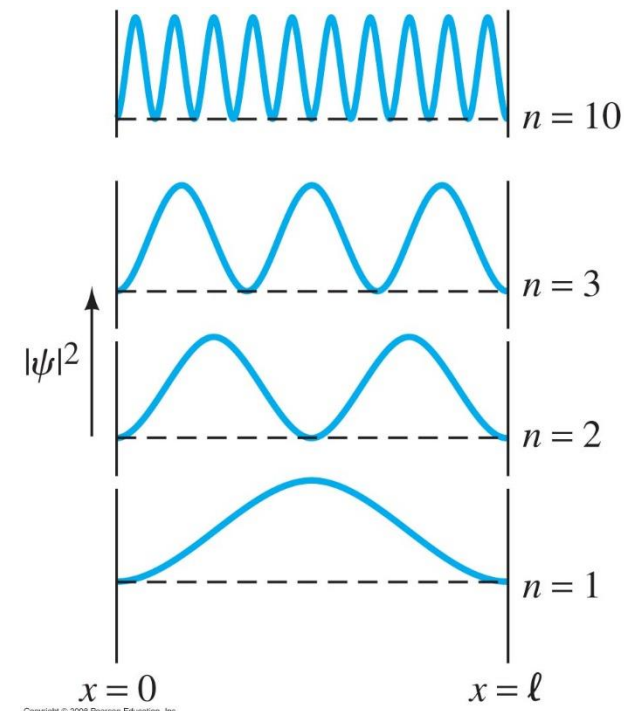
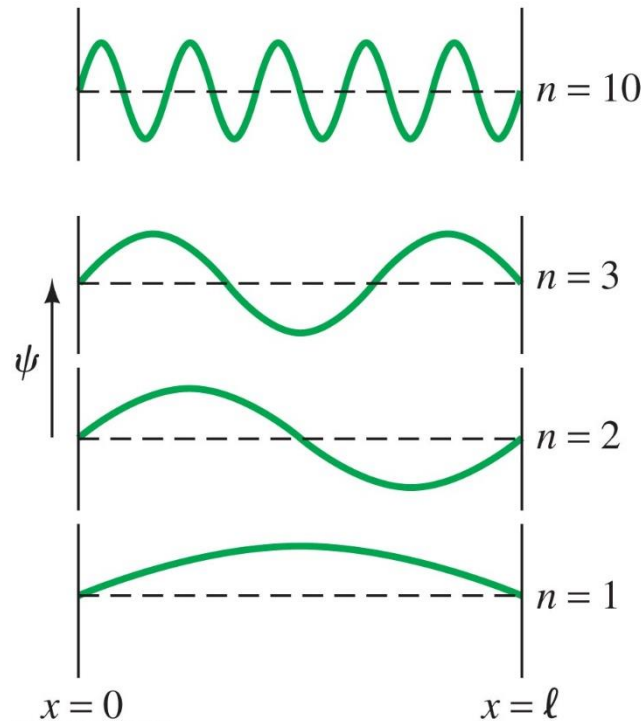
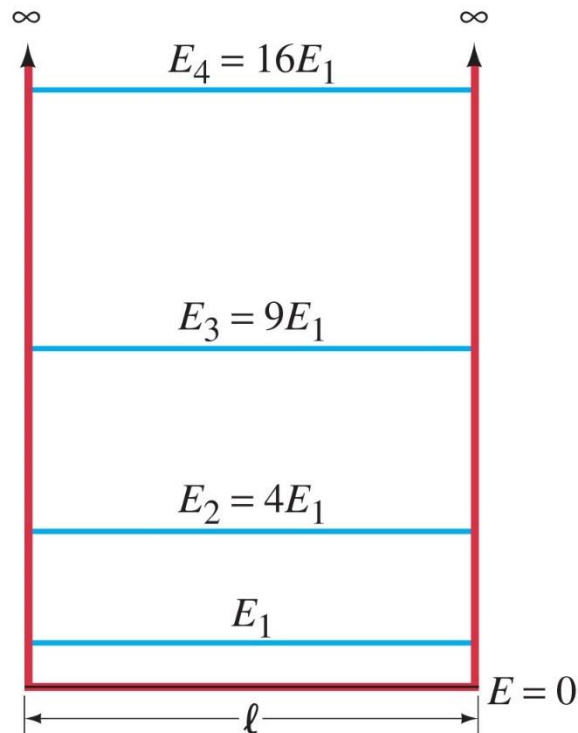
$$B \cos kx = 0 \Rightarrow k = n \frac{\pi}{\ell}, n = 1, 2, 3 \dots$$

Επομένως προκύπτει «**κβάντωση**» στην ενέργεια

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \Rightarrow E = n^2 \frac{h^2}{8m\ell^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

38.8 Το σωματίδιο σε απειρόβαθο πηγάδι-Τετραγωνικό Δυναμικό

Στα σχήματα φαίνονται οι ενέργειες, οι κυματοσυναρτήσεις και η **πυκνότητα πιθανότητας** μιας συνάρτησης του n .



38.8 Το σωματίδιο σε απείροβαθο πηγάδι- Τετραγωνικό Δυναμικό

EXAMPLE 38-5 **Electron in an infinite potential well.** (a) Calculate the three lowest energy levels for an electron trapped in an infinitely deep square well potential of width $\ell = 1.00 \times 10^{-10}$ m (about the diameter of a hydrogen atom in its ground state). (b) If a photon were emitted when the electron jumps from the $n = 2$ state to the $n = 1$ state, what would its wavelength be?

APPROACH The energy levels are given by Eq. 38-13. In (b), $hf = hc/\lambda = E_2 - E_1$.

SOLUTION (a) The ground state ($n = 1$) has energy

$$E_1 = \frac{h^2}{8m\ell^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2}{8(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.00 \times 10^{-10} \text{ m})^2} = 6.03 \times 10^{-18} \text{ J}.$$

In electron volts this is

$$E_1 = \frac{6.03 \times 10^{-18} \text{ J}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} = 37.7 \text{ eV}.$$

Then

$$E_2 = (2)^2 E_1 = 151 \text{ eV}$$

$$E_3 = (3)^2 E_1 = 339 \text{ eV}.$$

(b) The energy difference is $E_2 - E_1 = 151 \text{ eV} - 38 \text{ eV} = 113 \text{ eV}$ or $1.81 \times 10^{-17} \text{ J}$, and this would equal the energy of the emitted photon (energy conservation). Its wavelength would be

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})}{1.81 \times 10^{-17} \text{ J}} = 1.10 \times 10^{-8} \text{ m}$$

or 11.0 nm, which is in the ultraviolet region of the spectrum.

38.8 Το σωματίδιο σε απειρόβαθο πηγάδι-Τετραγωνικό Δυναμικό

EXAMPLE 38-5 **Electron in an infinite potential well.** (a) Calculate the three lowest energy levels for an electron trapped in an infinitely deep square well potential of width $\ell = 1.00 \times 10^{-10}$ m (about the diameter of a hydrogen atom in its ground state). (b) If a photon were emitted when the electron jumps from the $n = 2$ state to the $n = 1$ state, what would its wavelength be?

APPROACH The energy levels are given by Eq. 38-13. In (b), $hf = hc/\lambda = E_2 - E_1$.

SOLUTION (a) The ground state ($n = 1$) has energy

$$E_1 = \frac{h^2}{8m\ell^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2}{8(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.00 \times 10^{-10} \text{ m})^2} = 6.03 \times 10^{-18} \text{ J}.$$

In electron volts this is

$$E_1 = \frac{6.03 \times 10^{-18} \text{ J}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} = 37.7 \text{ eV}.$$

Then

$$E_2 = (2)^2 E_1 = 151 \text{ eV}$$

$$E_3 = (3)^2 E_1 = 339 \text{ eV}.$$

(b) The energy difference is $E_2 - E_1 = 151 \text{ eV} - 38 \text{ eV} = 113 \text{ eV}$ or $1.81 \times 10^{-17} \text{ J}$, and this would equal the energy of the emitted photon (energy conservation). Its wavelength would be

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})}{1.81 \times 10^{-17} \text{ J}} = 1.10 \times 10^{-8} \text{ m}$$

or 11.0 nm, which is in the ultraviolet region of the spectrum.

38.8 Το σωματίδιο σε απειρόβαθο πηγάδι- Τετραγωνικό Δυναμικό

EXAMPLE 38–6 **Calculating a normalization constant.** Show that the normalization constant A for all wave functions describing a particle in an infinite potential well of width ℓ has a value of $A = \sqrt{2/\ell}$.

APPROACH The wave functions for various n are

$$\psi = A \sin \frac{n\pi x}{\ell}.$$

To normalize ψ , we must have (Eq. 38–15)

$$1 = \int_0^{\ell} |\psi|^2 dx = \int_0^{\ell} A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{\ell} dx.$$

SOLUTION We need integrate only from 0 to ℓ since $\psi = 0$ for all other values of x . To evaluate this integral we let $\theta = n\pi x/\ell$ and use the trigonometric identity $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$. Then, with $dx = \ell d\theta/n\pi$, we have

$$\begin{aligned} 1 &= A^2 \int_0^{n\pi} \sin^2 \theta \left(\frac{\ell}{n\pi} \right) d\theta = \frac{A^2 \ell}{2n\pi} \int_0^{n\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{A^2 \ell}{2n\pi} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{n\pi} \\ &= \frac{A^2 \ell}{2}. \end{aligned}$$

Thus $A^2 = 2/\ell$ and

$$A = \sqrt{\frac{2}{\ell}}.$$

38.8 Το σωματίδιο σε απειρόβαθο πηγάδι-Τετραγωνικό Δυναμικό

EXAMPLE 38-7 ESTIMATE **Probability near center of rigid box.** An electron is in an infinitely deep square well potential of width $\ell = 1.00 \times 10^{-10}$ m. If the electron is in the ground state, what is the probability of finding it in a region of width $\Delta x = 1.0 \times 10^{-12}$ m at the center of the well (at $x = 0.50 \times 10^{-10}$ m)?

APPROACH The probability of finding a particle in a small region of width dx is $|\psi|^2 dx$ (Eq. 38-6b). Using A from Example 38-6, the wave function for the ground state is

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{\pi x}{\ell}.$$

SOLUTION The $n = 1$ curve in Fig. 38-9 shows that ψ is roughly constant near the center of the well. So we can avoid doing an integral over dx and just set $dx \approx \Delta x$ and find

$$\begin{aligned} |\psi|^2 \Delta x &= \frac{2}{\ell} \sin^2 \left[\frac{\pi x}{\ell} \right] \Delta x \\ &= \frac{2}{(1.00 \times 10^{-10} \text{ m})} \sin^2 \left[\frac{\pi(0.50 \times 10^{-10} \text{ m})}{(1.00 \times 10^{-10} \text{ m})} \right] (1.0 \times 10^{-12} \text{ m}) = 0.02. \end{aligned}$$

The probability of finding the electron in this region at the center of the well is thus 2%.

NOTE Since $\Delta x = 1.0 \times 10^{-12}$ m is 1% of the well width of 1.00×10^{-10} m, our result of 2% probability is not what would be expected classically. Classically, the electron would be equally likely to be anywhere in the box, and we would expect the probability to be 1% instead of 2%.

EXAMPLE 38-8 **Probability of e^- in $\frac{1}{4}$ of box.** Determine the probability of finding an electron in the left quarter of a rigid box—i.e., between one wall at $x = 0$ and position $x = \ell/4$. Assume the electron is in the ground state.

APPROACH We cannot make the assumption we did in Example 38-7 that $|\psi|^2 \approx \text{constant}$ and Δx is small. Here we need to integrate $|\psi|^2 dx$ from $x = 0$ to $x = \ell/4$, which is equal to the area under the curve shown colored in Fig. 38-11.

SOLUTION The wave function in the ground state is $\psi_1 = \sqrt{2/\ell} \sin(\pi x/\ell)$. To find the probability of the electron in the left quarter of the box, we integrate just as in Example 38-6 but with different limits on the integral (and now we know that $A = \sqrt{2/\ell}$). That is, we set $\theta = \pi x/\ell$ (then $x = \ell/4$ corresponds to $\theta = \pi/4$) and use the identity $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$. Thus, with $dx = (\ell/\pi)d\theta$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\ell/4} |\psi|^2 dx &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell/4} \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) dx \\ &= \frac{1}{\ell} \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 2\theta) \left(\frac{\ell}{\pi}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0.091.\end{aligned}$$

NOTE The electron spends only 9.1% of its time in the left quarter of the box. Classically it would spend 25%.

EXAMPLE 38–9 Most likely and average positions. Two interesting quantities are the most likely position of a particle and the average position of the particle. Consider an electron in a rigid box of width 1.00×10^{-10} m in the first excited state $n = 2$. (a) What is its most likely position? (b) What is its average position?

APPROACH To find (a) the most likely position (or positions), we find the maximum value(s) of the probability distribution $|\psi|^2$ by taking its derivative and setting it equal to zero. For (b) the average position, we integrate $\bar{x} = \int_0^\ell x |\psi|^2 dx$.

SOLUTION (a) The wave function for $n = 2$ is $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right)$, so $|\psi(x)|^2 = \frac{2}{\ell} \sin^2\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right)$. To find maxima and minima, we set $d|\psi|^2/dx = 0$:

$$\frac{d}{dx}|\psi|^2 = \frac{2}{\ell} (2) \frac{2\pi}{\ell} \sin\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right).$$

This quantity is zero when either the sine is zero ($2\pi x/\ell = 0, \pi, 2\pi, \dots$), or the cosine is zero ($2\pi x/\ell = \pi/2, 3\pi/2, \dots$). The maxima and minima occur at $x = 0, \ell/2, \ell$, and $x = \ell/4, 3\ell/4$. The latter ($\ell/4, 3\ell/4$) are the maxima—see the $n = 2$ curve of Fig. 38–10; the others are minima. [To confirm, you can take the second derivative, $d^2|\psi|^2/dx^2$, which is > 0 for minima and < 0 for maxima.]

(b) The average position is (again we use $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$):

$$\bar{x} = \int_0^\ell x |\psi|^2 dx = \int_0^\ell \frac{2}{\ell} x \sin^2\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right) dx = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell x \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi}{\ell}x\right)\right] dx,$$

which gives (integrating by parts, Appendix B: $u = x, dv = \cos(4\pi x/\ell) dx$):

$$\bar{x} = \frac{1}{\ell} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x\ell}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{\ell}x\right) - \frac{\ell^2}{16\pi^2} \cos\left(\frac{4\pi}{\ell}x\right) \right]_0^\ell = \frac{\ell}{2}.$$

Since the curves for $|\psi|^2$ are symmetric about the center of the box, we expect this answer. But note that for $n = 2$, the probability of finding the particle at the point $x = \ell/2$ is actually zero (Fig. 38–10).

EXAMPLE 38–10 ESTIMATE Confined bacterium. A tiny bacterium with a mass of about 10^{-14} kg is confined between two rigid walls 0.1 mm apart. (a) Estimate its minimum speed. (b) If, instead, its speed is about 1 mm in 100 s, estimate the quantum number of its state.

APPROACH We assume $U = 0$ inside the potential well, so $E = \frac{1}{2}mv^2$. In (a) the minimum speed occurs in the ground state, $n = 1$, so $v = \sqrt{2E/m}$ where E is the ground-state energy. In (b) we solve Eq. 38–13 for n .

SOLUTION (a) With $n = 1$, Eq. 38–13 gives $E = h^2/8m\ell^2$ so

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{h^2}{4m^2\ell^2}} = \frac{h}{2m\ell} = \frac{6.6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{2(10^{-14} \text{ kg})(10^{-4} \text{ m})} \approx 3 \times 10^{-16} \text{ m/s}.$$

This is a speed so small that we could not measure it and the object would seem at rest, consistent with classical physics.

(b) Given $v = 10^{-3} \text{ m}/100 \text{ s} = 10^{-5} \text{ m/s}$, the kinetic energy of the bacterium is

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(10^{-14} \text{ kg})(10^{-5} \text{ m/s})^2 = 0.5 \times 10^{-24} \text{ J}.$$

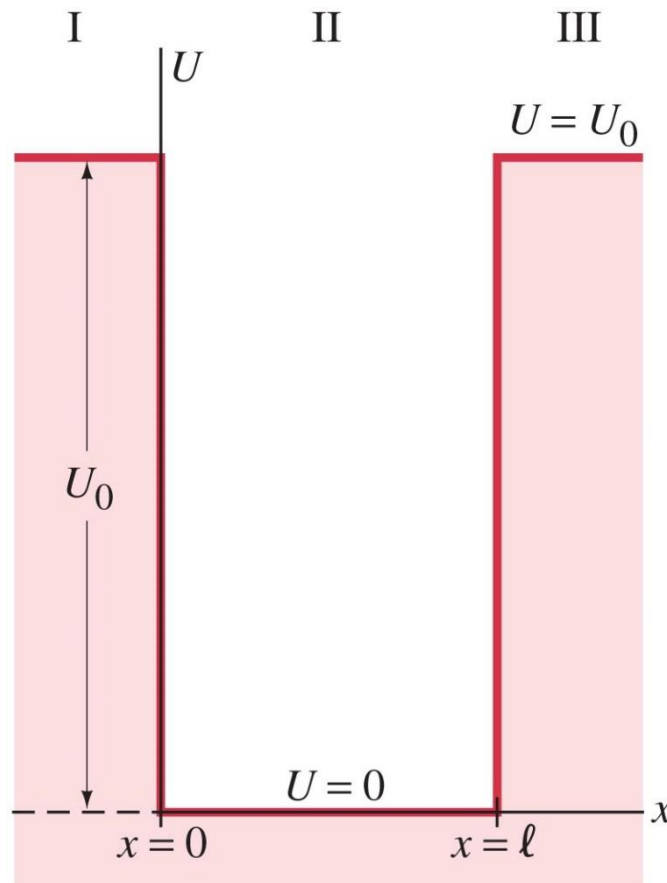
From Eq. 38–13, the quantum number of this state is

$$n = \sqrt{E\left(\frac{8m\ell^2}{h^2}\right)} = \sqrt{\frac{(0.5 \times 10^{-24} \text{ J})(8)(10^{-14} \text{ kg})(10^{-4} \text{ m})^2}{(6.6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2}} \approx 3 \times 10^{10}.$$

NOTE This number is so large that we could never distinguish between adjacent energy states (between $n = 3 \times 10^{10}$ and $3 \times 10^{10} + 1$). The energy states would appear to form a continuum. Thus, even though the energies involved here are small ($\ll 1 \text{ eV}$), we are still dealing with a macroscopic object (though visible only under a microscope) and the quantum result is not distinguishable from a classical one. This is in accordance with the correspondence principle.

38.9 Πεπερασμένο Πηγάδι Δυναμικού

Το δυναμικό είναι μηδέν μεταξύ των τιμών $0 \leq x \leq \ell$ και U_0 σε όλα τα υπόλοιπα σημεία.



38.9 Πεπερασμένο Πηγάδι Δυναμικού

Το δυναμικό εκτός πηγαδιού είναι πλέον διάφορο του μηδενός, και πέφτει εκθετικά.

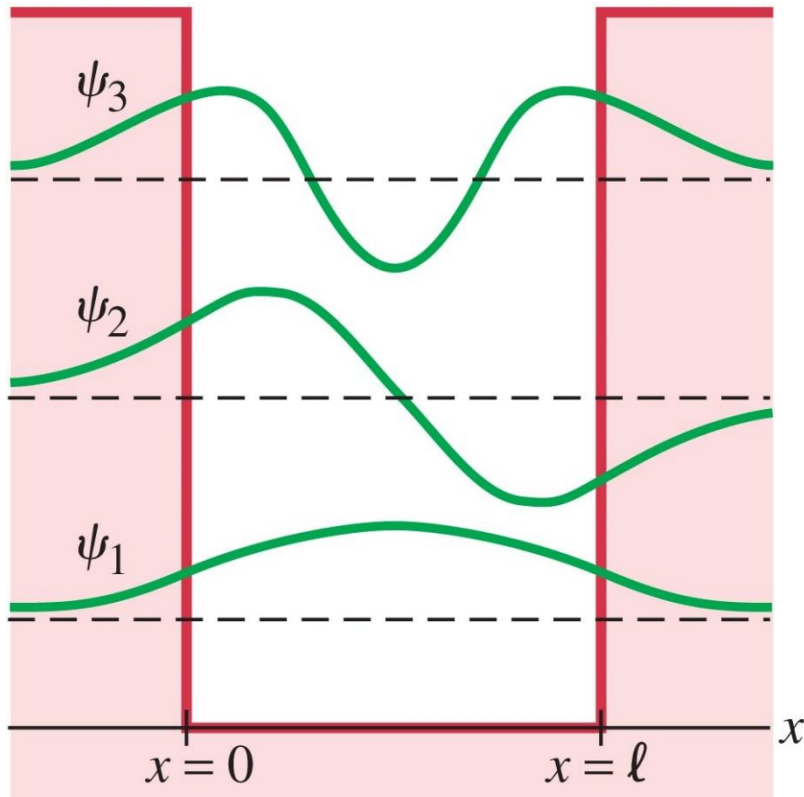
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U_0\psi = E\psi$$

Η κυματοσυνάρτηση εντός και εκτός πηγαδιού είναι διαφορετική.

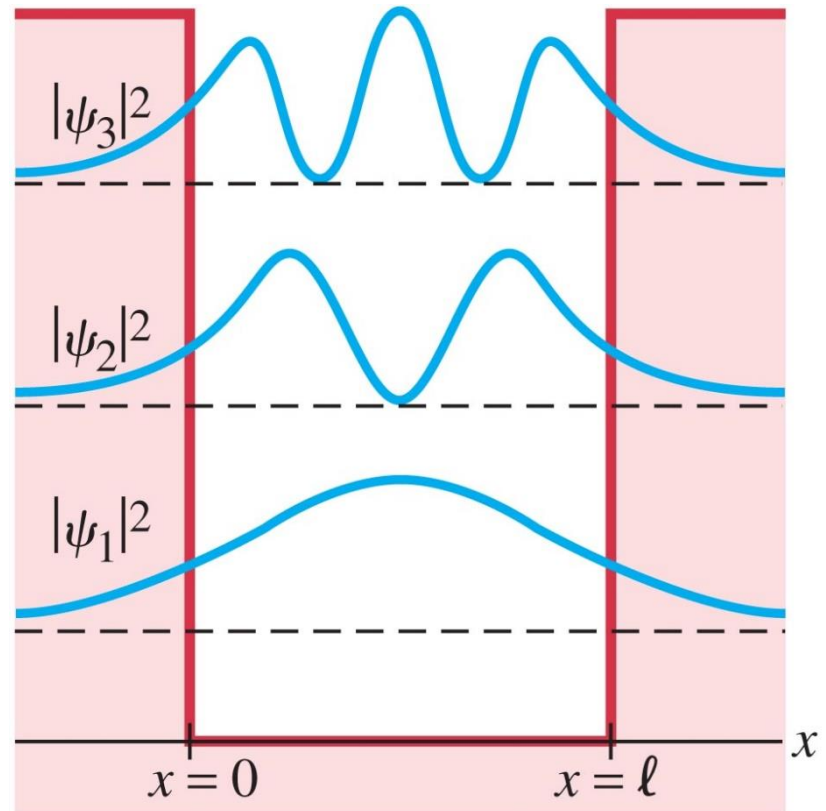
Η κυματοσυνάρτηση οφείλει να είναι συνεχής - ομαλή (ύπαρξη της πρώτης παραγώγου) και πεπερασμένη, προκειμένου να μπορεί να κανονικοποιηθεί.

38.9 Πεπερασμένο Πηγάδι Δυναμικού

Το σχήμα δείχνει την κυματοσυνάρτηση και την πυκνότητα πιθανότητας για τις τρεις πρώτες καταστάσεις.



(a)

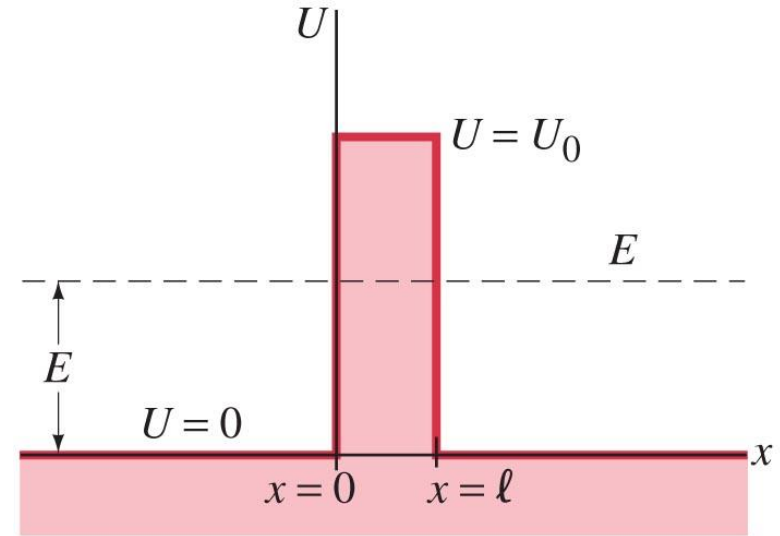


(b)

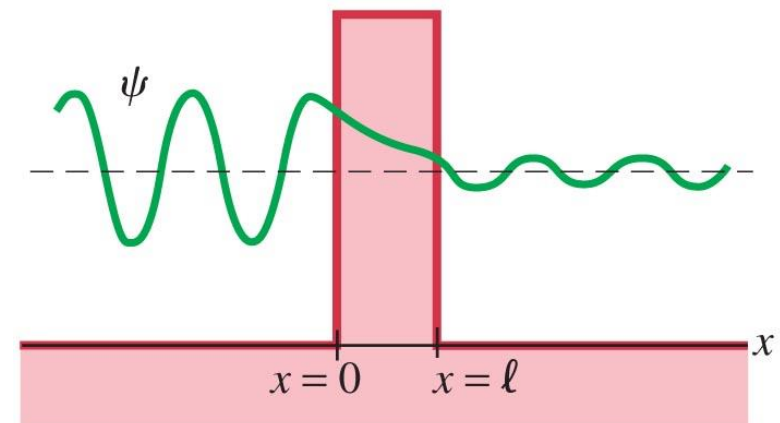
38.10 «Ριφιφί» Μέσα από Φράγματα (Το φαινόμενο της σήραγγας)

Είδαμε ότι η κυματοσυνάρτηση δεν μηδενίζεται άμεσα όταν βρεθεί εμπρός σε πεπερασμένο φράγμα, αλλά **υπάρχει μη μηδενική πιθανότητα** το σωματίδιο να βρεθεί από την άλλη πλευρά του «τοιχίου» του φράγματος.

Αυτό είναι το **φαινόμενο της σήραγγας**.



(a)



(b)

38.10 Το φαινόμενο της σήραγγας

Η πιθανότητα το σωματίδιο να διαπεράσει («μεριφιμί») το φράγμα εκφράζεται από τον συντελεστή εκπομπής T , και τον συντελεστή ανάκλασης, R (όπου $T + R = 1$). Όταν το T είναι μικρό:

$$T \approx e^{-2G\ell},$$

where

$$G = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

Όσο μικρότερη η E σε σχέση με την U_0 , τόσο μικρότερη η πιθανότητα το σωματίδιο να διαπεράσει το φράγμα.

38.10 Το φαινόμενο της σήραγγας

EXAMPLE 38–11 Barrier penetration. A 50-eV electron approaches a square barrier 70 eV high and (a) 1.0 nm thick, (b) 0.10 nm thick. What is the probability that the electron will tunnel through?

APPROACH We convert eV to joules and use Eqs. 38–17.

SOLUTION (a) Inside the barrier $U_0 - E = (70 \text{ eV} - 50 \text{ eV})(1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) = 3.2 \times 10^{-18} \text{ J}$. Then, using Eqs. 38–17, we have

$$2G\ell = 2\sqrt{\frac{2(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3.2 \times 10^{-18} \text{ J})}{(1.055 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2}}(1.0 \times 10^{-9} \text{ m}) = 46$$

and

$$T = e^{-2G\ell} = e^{-46} \approx 1 \times 10^{-20},$$

which is extremely small.

(b) For $\ell = 0.10 \text{ nm}$, $2G\ell = 4.6$ and

$$T = e^{-4.6} = 0.010.$$

Thus the electron has a 1% chance of penetrating a 0.1-nm-thick barrier, but only 1 chance in 10^{20} to penetrate a 1-nm barrier. By reducing the barrier thickness by a factor of 10, the probability of tunneling through increases 10^{18} times! Clearly the transmission coefficient is extremely sensitive to the values of ℓ , $U_0 - E$, and m .

38.10 Εφαρμογές του φαινομένου της σήραγγας

Στα ηλεκτρονικά μικροσκόπια σάρωσης, υπάρχει ένα μικρό ρεύμα λόγω του φαινομένου της σήραγγας μεταξύ τις ακίδας του ηλεκτροδίου και της επιφάνειας.

Το ηλεκτρόδιο σαρώνει την επιφάνεια, και προκειμένου να διατηρήσει το ρεύμα αυτό σταθερό, αυξομειώνει την απόστασή του από την επιφάνεια, καταγράφοντας έτσι τη μορφολογία της επιφάνειας

