Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς

Ορίζουμε $i = \sqrt{-1}$ και αντίστοιχα $i^2 = -1$. Οι αριθμοί που περιέχουν το i ονομάζονται φανταστικοί.

Ένας μιγαδικός αριθμός z αποτελείται από ένα γραμμικό συνδυασμό ενός «πραγματικού» Re(z) και ενός «φανταστικού» $\mathrm{Im(z)}$ αριθμού:

$$\mathrm{z} = \mathrm{x} + iy$$

Όπου $x = Re(z)$ **και** $y = Im(z)$

Ο συζυγής μιγαδικός ορίζεται ως $z^* = \mathrm{x} - iy$

Εάν $z = 5 - 3i$ **τότε** $z^* = 5 - 3(-i) = 5 + 3i$

Πρόσθεση και Αφαίρεση μιγαδικών:

Προσθέτουμε/αφαιρούμε τα πραγματικά και φανταστικά μέρη ξεχωριστά:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

if $z_1 = 2 + 3i$ and $z_2 = 1 - 4i$, then

$$z_1 - z_2 = (2 - 1) + [3 - (-4)]i = 1 + 7i$$

Πολλαπλασιασμός: Επιμεριστική ιδιότητα

$$2z_1 + 3z_2 = 2(2 + 3i) + 3(1 - 4i) = 4 + 6i + 3 - 12i = 7 - 6i$$

$$\begin{aligned}(2 - i)(-3 + 2i) &= -6 + 3i + 4i - 2i^2 \\ &= -4 + 7i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}zz^* = z^*z = |z|^2 &= (x - iy)(x + iy) \\ &= \left(-x^2 + ixy + y^2 + ixy\right) \\ &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

Διαίρεση: Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρανομαστή:

$$z = \frac{2+i}{1+2i}$$

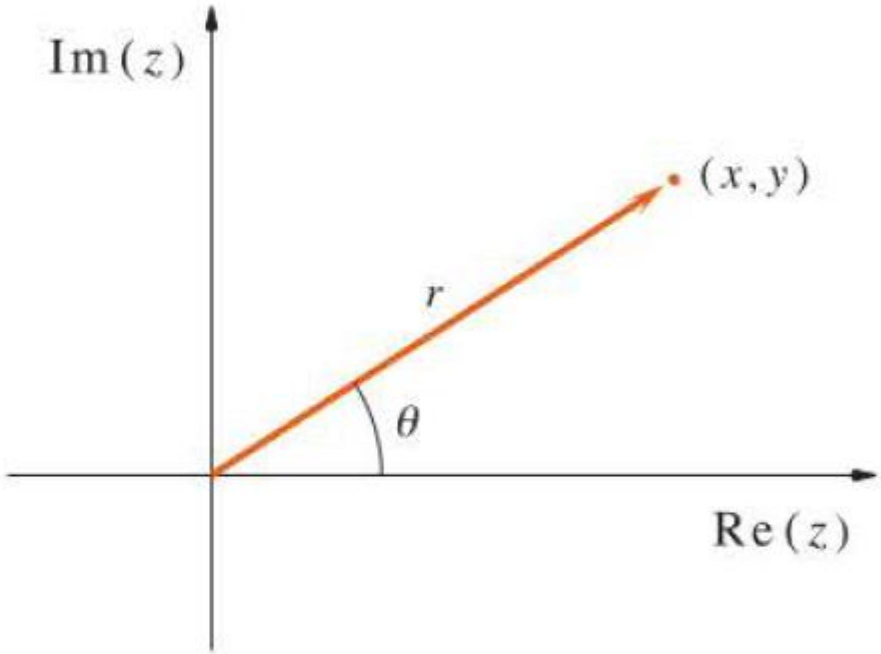
$$z = \frac{2+i}{1+2i}\left(\frac{1-2i}{1-2i}\right) = \frac{4-3i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$$

Ο αντίστροφος :

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\left(\frac{x-iy}{x-iy}\right) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$$

Μιγαδικοί αριθμοί ως διάνυσμα και πολικές συντεταγμένες



$$x = Re(z) = r \cdot cos(\theta)$$

$$y = Im(z) = r \cdot sin(\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ο τύπος του Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$z^* = re^{-i\theta}$$

Θεώρημα de Moivre: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

If $z = x + 2iy$, then find

(a) $\mathrm{Re}(z^*)$ (b) $\mathrm{Re}(z^2)$

(c) $\mathrm{Im}(z^2)$ (d) $\mathrm{Re}(zz^*)$

(e) $\mathrm{Im}(zz^*)$

$$z^* = x - 2iy$$

$(a)\ Re(z^*) = x$

$(b)\ Re(z^2) = Re(x + 2iy)^2 = Re(x^2 + (2iy)^2 + 2x2iy) = Re(x^2 - 4y^2 + 4ixy) = x^2 - 4y^2$

$(c)\ Im(z^2) = Im(x + 2iy)^2 = Im(x^2 + (2iy)^2 + 2x2iy) = Im(x^2 - 4y^2 + 4ixy) = 4xy$

$(d)\ \ Re(zz^*) = Re|x + 2iy|^2 = Re(x^2 + (2y)^2) = x^2 + 4y^2$

$(e)\ Im(zz^*) = Im|x + 2iy|^2 = 0$

Εκφράστε του αριθμούς με τη μορφή

(a) $6i$ (b) $4-\sqrt{2}i$ (c) $-1-2i$ (d) $\pi + ei$

$$(a)\ z = 0 + 6i, \quad r = |z| = 6, \quad cos\theta = \frac{x}{r} = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \ \ so\ 6i = 6e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$(b)\ z = 4 - \sqrt{2}i, \quad r = |z| = \sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2 = }\sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

$$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{3}0 \Longrightarrow \theta = -0{,}11\pi \ \ so \qquad 4 - \sqrt{2}i = 3\sqrt{2}e^{-i0{,}11\pi}$$

$$(c)\ z = -1 - 2i, \quad r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 = }\sqrt{5},$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} = 2 \Longrightarrow \theta = 0{,}35\pi \ \ so \qquad -1 - 2i = \sqrt{5}e^{i0{,}35\pi}$$

$$(d)\ z = \pi + ei,\ r = |z| = \sqrt{(\pi)^2 + (e)^2 = }\ 4{,}15,$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2{,}72}{3{,}14} = 0{,}71 \Longrightarrow \theta = 0{,}23\pi \ \ so \quad \pi + ei = 4{,}15e^{i0{,}23\pi}$$

Δείξτε ότι $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ **και** $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = cos\theta + isin\theta + cos\theta - isin\theta = 2cos\theta \Longrightarrow \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = cos\theta + isin\theta - cos\theta + isin\theta = 2isin\theta \Longrightarrow \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Δείξτε ότι $e^{i\pi} = -1.$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + isin(\pi) = -1 + 0 = -1$$

Για

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \qquad \begin{cases} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 0 \le \phi \le 2\pi \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} d\phi \Phi_m(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{for all values of } m \neq 0 \\ \sqrt{2\pi} & m = 0 \end{cases}$$

και

$$\int_0^{2\pi} d\phi \Phi_m^*(\phi) \Phi_n(\phi) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

Για $m \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\phi (\cos(m\phi) + i\sin(m\phi)) =$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\phi \cos(m\phi) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\phi \sin(m\phi) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\sin(2\pi m) - \sin(0)\,] - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} [-\cos(2\pi m) + \cos(0)\,]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [0 - 0)\,] - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} [-1+1] = 0$$

Για $m=0$ $$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{i0\phi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\phi)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2\pi - 0) = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{-im\phi}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{in\phi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-m)\phi}$$

Με βάση την προηγούμενη απόδειξη το ολοκλήρωμα αυτό είναι διάφορο του μηδενός μόνο όταν $n-m=0,$ δηλ. $m=n$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{-im\phi}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(m-m)\phi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{2\pi}(\phi)\Big|_0^{2\pi} = 1$$

Η ανισότητα του Schwartz λέει ότι για δύο μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ τότε ισχύει

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2) \leq |z_1||z_2|$$

$$|z_1|^2|z_2|^2 = ({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2) = {x_1}^2{x_2}^2 + {x_1}^2{y_2}^2 + {y_1}^2{x_2}^2 + {y_1}^2{y_2}^2 =$$
$${x_1}^2{x_2}^2 + {y_1}^2{y_2}^2 + 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_2y_1y_2 + {x_1}^2{y_2}^2 + {y_1}^2{x_2}^2 =$$
$$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2$$

Αλλά $(x_1y_2 - y_1x_2)^2 \geq 0$ επομένως $|z_1|^2|z_2|^2 \geq (x_1x_2 + y_1y_2)^2$

$$|z_1|^2|z_2|^2 - (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \geq 0$$

$$[|z_1||z_2| + (x_1x_2 + y_1y_2)][|z_1||z_2| - (x_1x_2 + y_1y_2)] \geq 0$$

Εάν $(x_1x_2 + y_1y_2) \geq |z_1||z_2|$ τότε $(x_1x_2 + y_1y_2) \geq 0$ και $|z_1||z_2| - (x_1x_2 + y_1y_2) \leq 0$ και επομένως

$$\overbrace{[|z_1||z_2| + (x_1x_2 + y_1y_2)]}^{+}\overbrace{[|z_1||z_2| - (x_1x_2 + y_1y_2)]}^{-} \leq 0$$

Επομένως $$(x_1x_2 + y_1y_2) \leq |z_2|$$