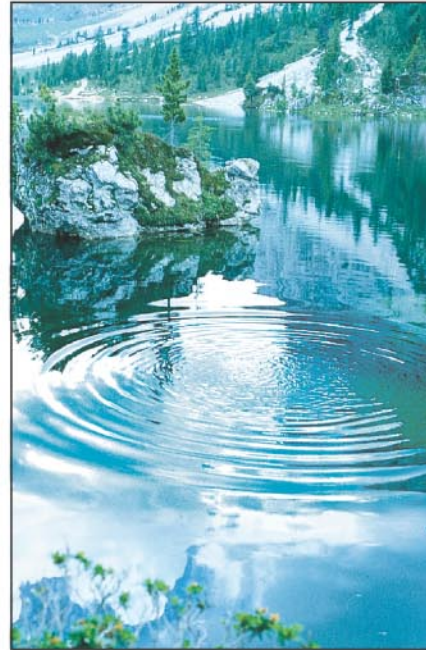
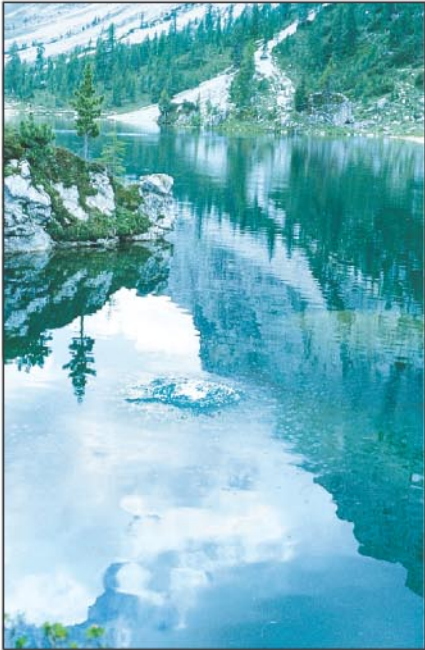


# Κεφάλαιο 15

## Κίνηση Κυμάτων

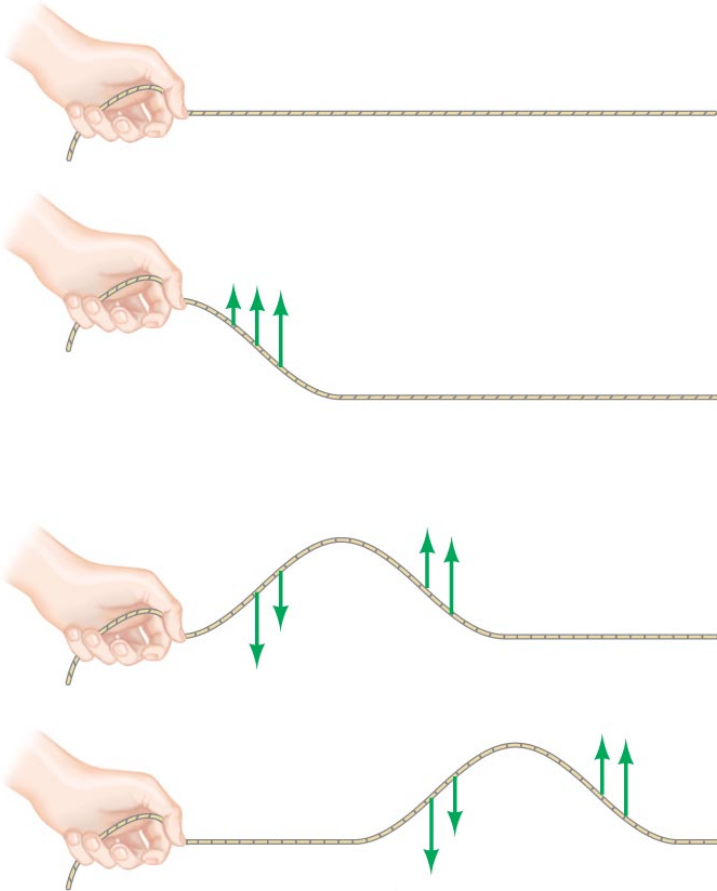


# Περιεχόμενα Κεφαλαίου 15

- Χαρακτηριστικά των Κυμάτων
- Είδη κυμάτων: Διαμήκη και Εγκάρσια
- Μεταφορά ενέργειας με κύματα
- Μαθηματική Περιγραφή της Διάδοσης κυμάτων
- Η Εξίσωση του Κύματος
- Κανόνας Υπέρθεσης
- Ανάκλαση και Διάδοση
- Συμβολή, Στάσιμα Κύματα και Συντονισμός
- Σκέδαση και Διάθλαση

# 15-1 Χαρακτηριστικά Διάδοσης Κύματος

**Όλα τα κύματα μεταφέρουν ενέργεια.**



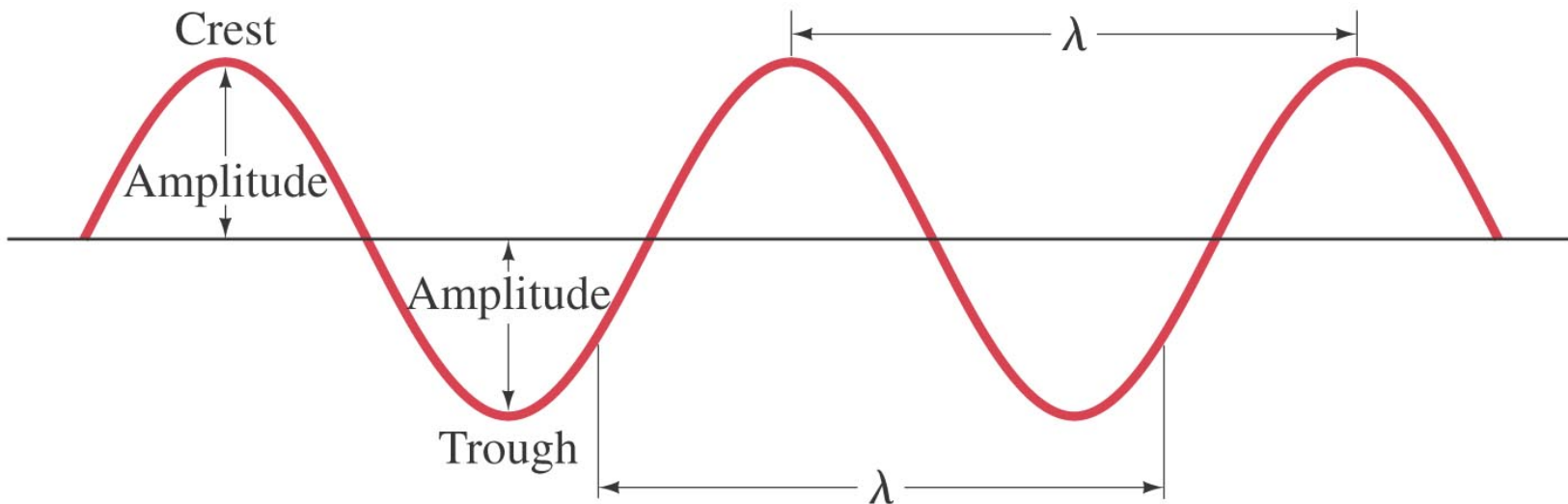
Ένα κύμα ξεκινάει με την ταλάντωση της άκρης μιας χορδής και διαδίδεται εξ αιτίας των δυνάμεων συνοχής του υλικού της χορδής

Συνεχή κύματα (**Continuous waves, CW**) δημιουργούνται όταν έχουμε συνεχή ταλάντωση της άκρης. Εάν η ταλάντωση είναι αρμονική τότε η μορφή του κύματος είναι **ημιτονοειδής**

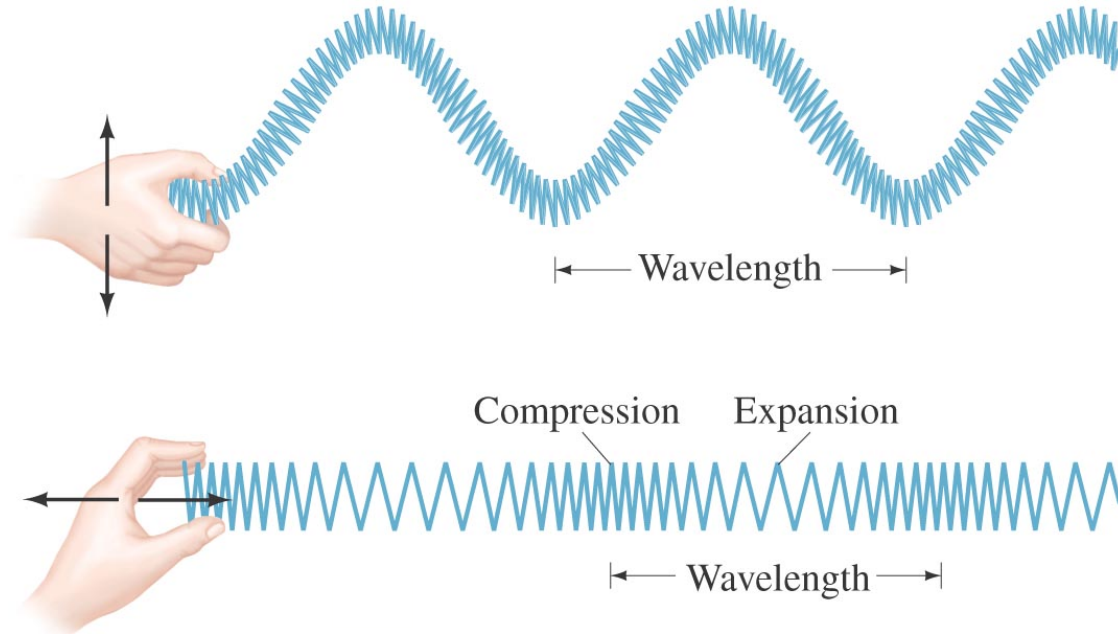
# 15-1 Χαρακτηριστικά Διάδοσης Κύματος

## Χαρακτηριστικά Κυμάτων:

- Πλάτος,  $A$
- Μήκος κύματος,  $\lambda$
- Συχνότητα,  $f$  και Περίοδος,  $T$
- Ταχύτητα κύματος,  $v = \lambda f$



# 15-2 Τύποι κυμάτων: Διαμήκη και Εγκάρσια

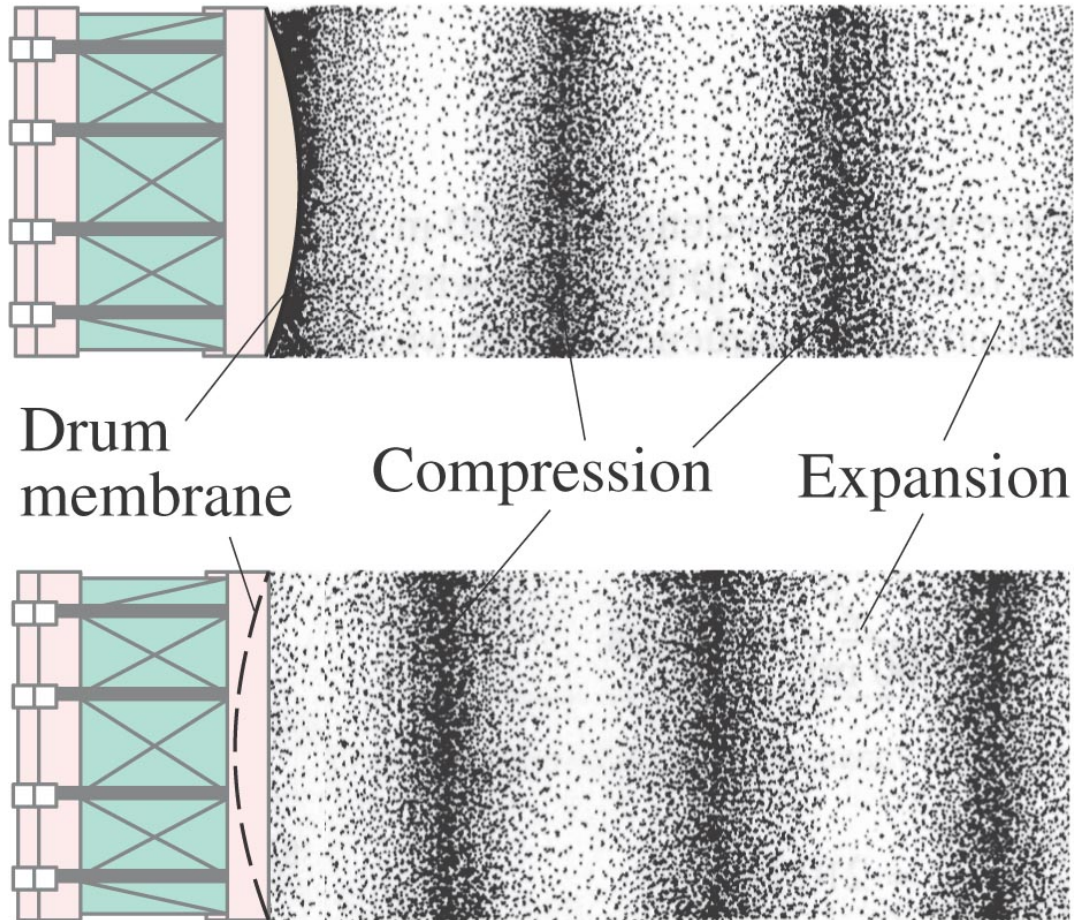


**Εγκάρσια:** Η κίνηση των σωματιδίων είναι **κάθετη** στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος

**Διαμήκη:** Η κίνηση των σωματιδίων είναι **κατά-μήκος** στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

# 15-2 Τύποι κυμάτων: Διαμήκη και Εγκάρσια

Τα ηχητικά κύματα είναι διαμήκη:



## 15-2 Τύποι κυμάτων: Διαμήκη και Εγκάρσια

Η ταχύτητα ενός εγκάρσιου κύματος είναι :

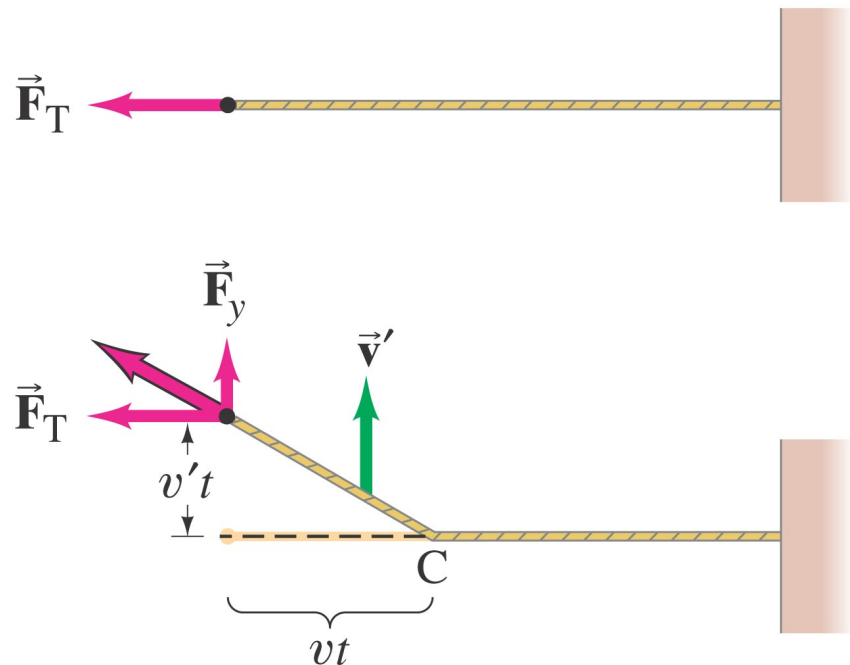
$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

$F_T$  : τάση

$\mu$  : μάζα/μήκος

Παρατηρούμε ότι  
όταν η τάση της  
χορδής μεγαλώνει η  
ταχύτητα αυξάνεται.

Όσο μικρότερη είναι  
μάζα της χορδής  
τόσο μεγαλύτερη η  
ταχύτητα.



# 15-2 Τύποι κυμάτων: Διαμήκη και Εγκάρσια

Ένα καλώδιο χαλκού, μήκους 80.0-m και διαμέτρου, 2.10-mm τεντώνεται μεταξύ δύο πόλων. Ένα πουλί κάθεται στο μέσο του καλωδίου «στέλνοντας» παλμούς κυμάτων προς του δύο πόλους. Οι παλμοί αυτοί ανακλώνται από τους πόλους και φθάνουν ξανά στο πουλί σε 0.750 s. Βρείτε την τάση του καλωδίου.

**ΛΥΣΗ**



# 15-2 Τύποι κυμάτων: Διαμήκη και Εγκάρσια

Η ταχύτητα των διαμήκη κυμάτων εξαρτάται από τη **δύναμη επαναφοράς** του υλικού και την πυκνότητά του « $\rho$ ».

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

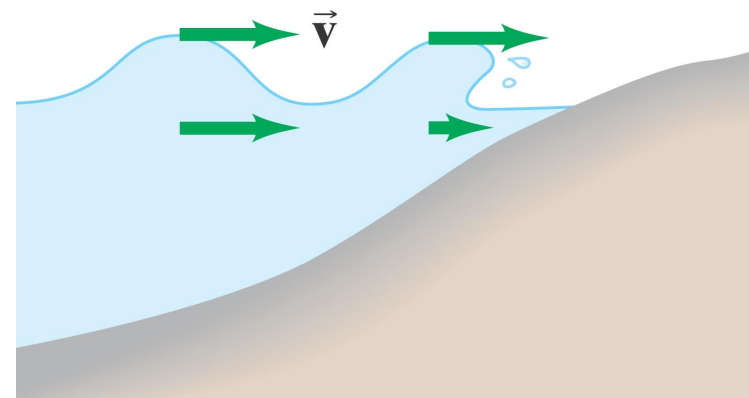
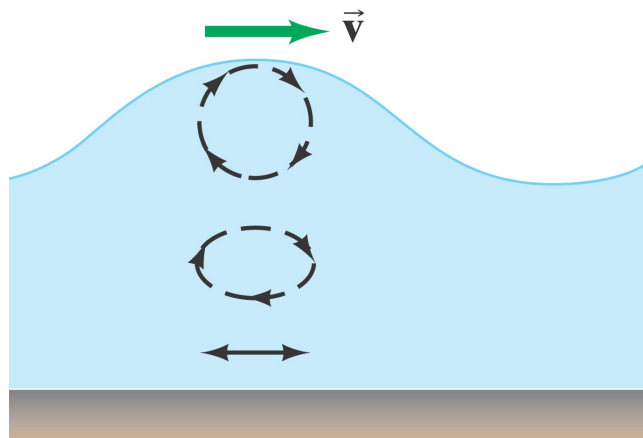
ή

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}.$$

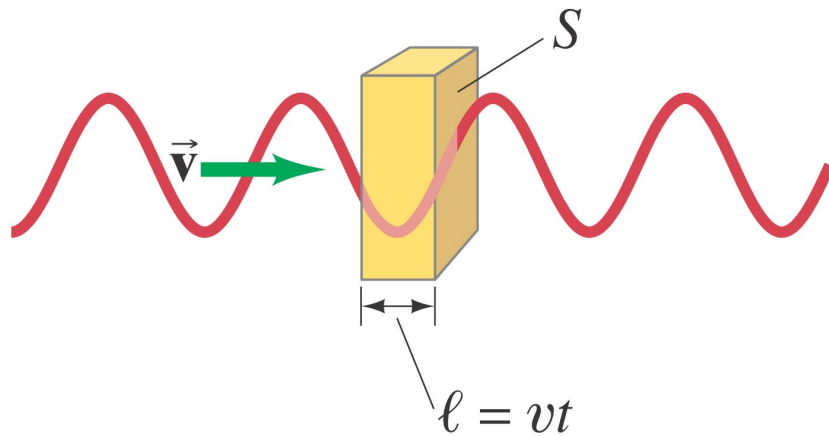
# 15-2 Τύποι κυμάτων: Διαμήκη και Εγκάρσια

Οι σεισμοί παράγουν εγκάρσια και διαμήκη κύματα. Και τα δύο διαδίδονται μέσα από στερεά υλικά αλλά **μόνο ΔΙΑΜΗΚΗ** μπορούν να διαδοθούν μέσα από «υγρά», διότι τα υγρά δεν έχουν δυνάμεις επιστροφής κάθετες στη διεύθυνση διάδοσης.

Επιφανειακά κύματα είναι κύματα που διαδίδονται κατά μήκος της διαχωριστικής επιφάνειας δύο μέσων (π,χ, αέρα και νερού)



# 15-3 Μεταφορά Ενέργειας με Κύματα



Η Ενέργεια που μεταφέρεται από ένα κύμα είναι:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 2\pi^2mf^2A^2.$$

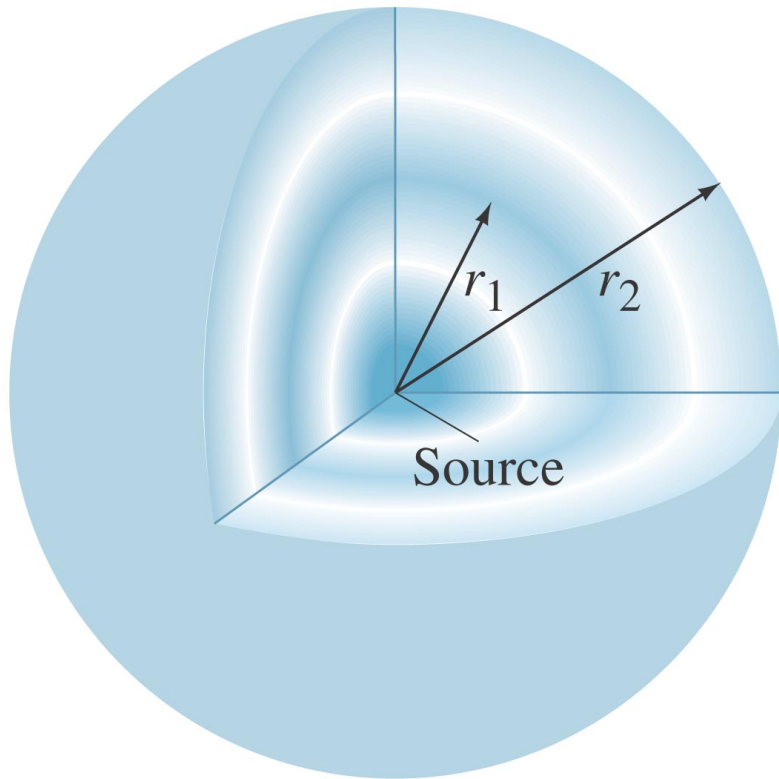
Εάν υποθέσουμε ότι το μέσο είναι ομογενές και έχει πυκνότητα  $\rho$  τότε:

$$I = \frac{\bar{P}}{S} = 2\pi^2v\rho f^2A^2.$$

Η **Ένταση (Ισχύς/επιφάνεια)** ενός κύματος είναι συνεπώς ανάλογη των **τετραγώνων του πλάτους και της συχνότητας**

# 15-3 Μεταφορά Ενέργειας με Κύματα

Όταν το κύμα διαδίδεται σε 3-διαστάσεις και όταν το μέσο είναι ομογενές, το κύμα ονομάζεται σφαιρικό.



Για σφαιρικά κύματα για λόγους γεωμετρίας ισχύει:

$$I \propto \frac{1}{r^2}.$$

# 15-3 Μεταφορά Ενέργειας με Κύματα

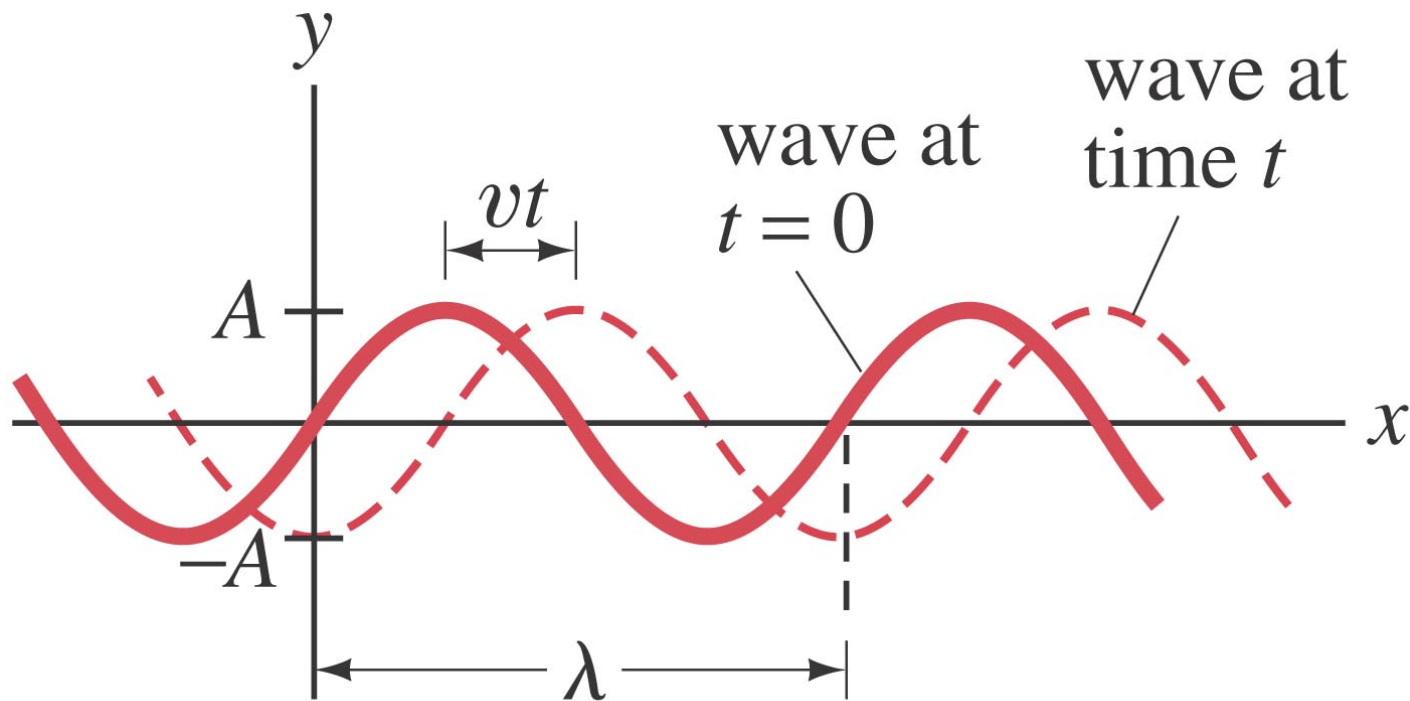
Η ένταση ενός σεισμικού κύματος P 100 km από την εστία είναι  $1.0 \times 10^6 \text{ W/m}^2$ . Πόση θα είναι η έντασή του 400 km από την εστία;

**ΛΥΣΗ**

# 15-4 Μαθηματική Εξίσωση Κυματικής

Εάν ένα κύμα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$D(x) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x.$$



# 15-4 Μαθηματική Εξίσωση Κυματικής

Μετά από χρόνο  $t$ , το κύμα έχει διανύσει απόσταση  $vt$ , και συνεπώς:

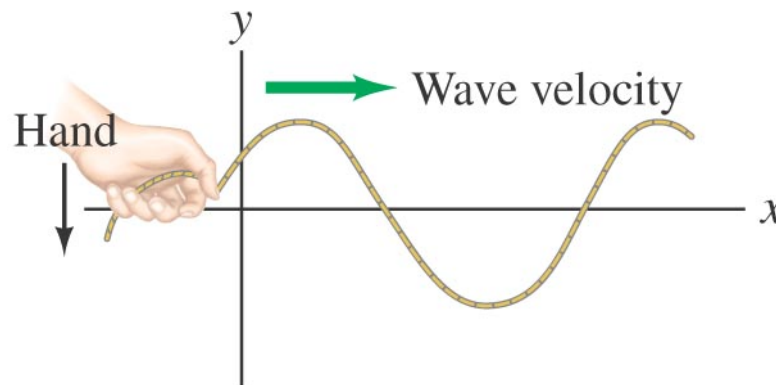
$$D(x, t) = A \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right].$$

ή:  $D(x, t) = A \sin(kx - \omega t),$

όπου  $\omega = 2\pi f, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad v = \lambda f$

# 15-4 Μαθηματική Εξίσωση Κυματικής

Το αριστερό άκρο μιας χορδής ταλαντεύεται αρμονικά με συχνότητα  $f = 250$  Hz και πλάτος 2.6 cm. Η τάση της χορδής είναι 140 N και έχει γραμμική πυκνότητα  $\mu = 0.12$  kg/m. Σε  $t = 0$ , το ένα άκρο της χορδής έχει κατακόρυφη μετατόπιση 1.6 cm και πέφτει. Βρείτε (a) το μήκος κύματος που παράγεται και (b) την εξίσωση του κύματος.

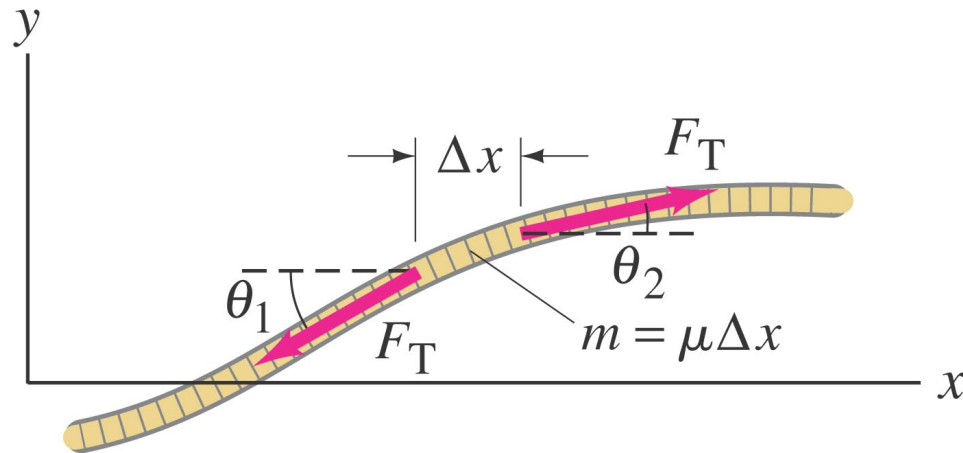


**ΛΥΣΗ**



# 15-5 Η εξίσωση του Κύματος

Θεωρούμε τμήμα χορδής που βρίσκεται υπό τάση



Από τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα γράφουμε

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$F_T \sin \theta_2 - F_T \sin \theta_1 = (\mu \Delta x) \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}.$$

# 15-5 Η εξίσωση του Κύματος

Υποθέτοντας μικρές γωνίες και στο όριο  $\Delta x \rightarrow 0$ , βρίσκουμε (με κάμπωση αριθμητική) ότι:

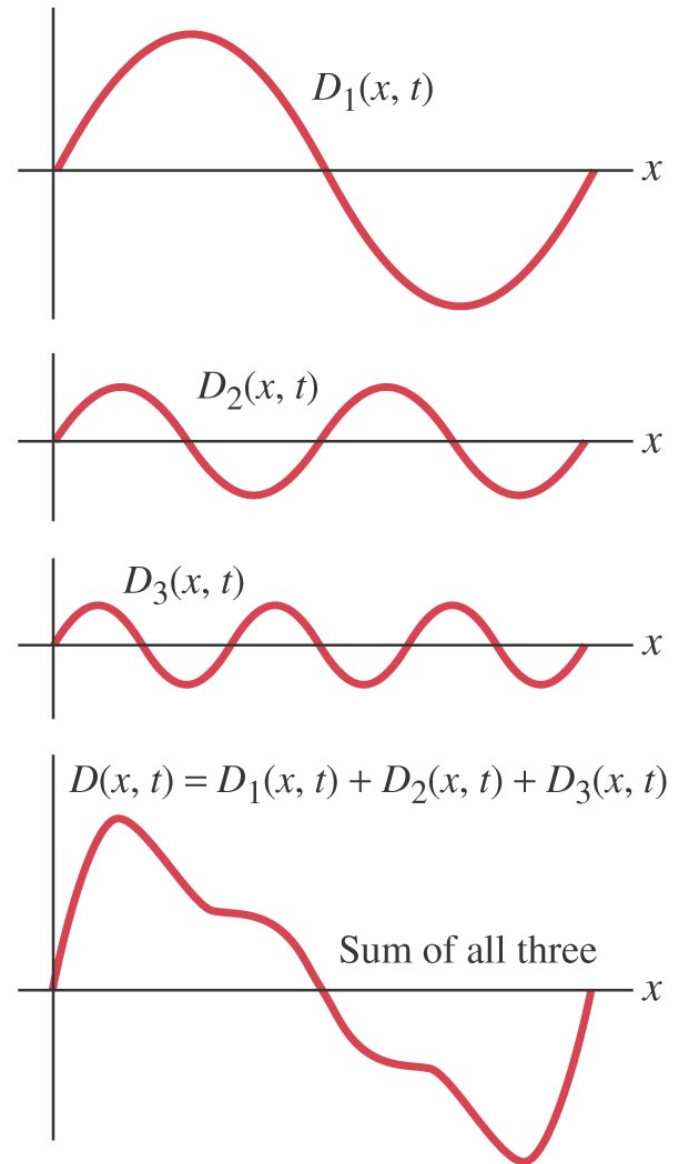
$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}.$$

Αυτή είναι και η εξίσωση του μονοδιάστατου κύματος. Είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού **μερικών παραγώγων** ως προς τον χρόνο και τη μετατόπιση. Οι λύσεις είναι **ημιτονοειδείς** συναρτήσεις.

# 15-6 Ο Κανόνας Υπέρθεσης

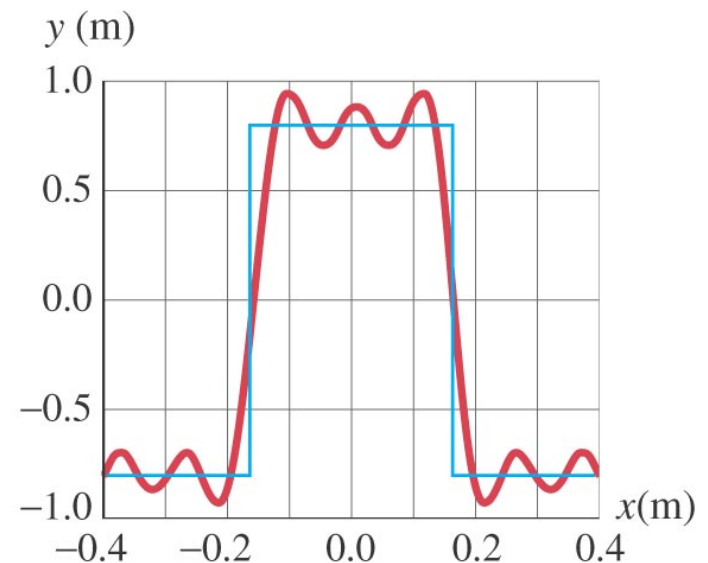
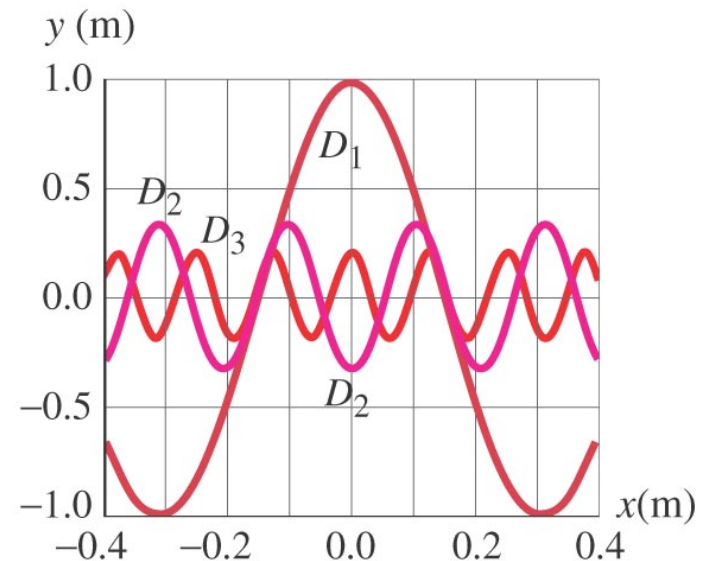
**Υπέρθεση:** Η μετατόπιση σε οποιοδήποτε σημείο προκύπτει από το **διανυσματικό** άθροισμα όλων των κυμάτων που διέρχονται από το συγκεκριμένο σημείο σε κάθε χρονική στιγμή.

**Θεώρημα Fourier:** Κάθε σύνθετο περιοδικό κύμα μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα ημιτονοειδών κυμάτων (συναρτήσεων) διαφόρων συχνοτήτων πλατών και φάσεων.

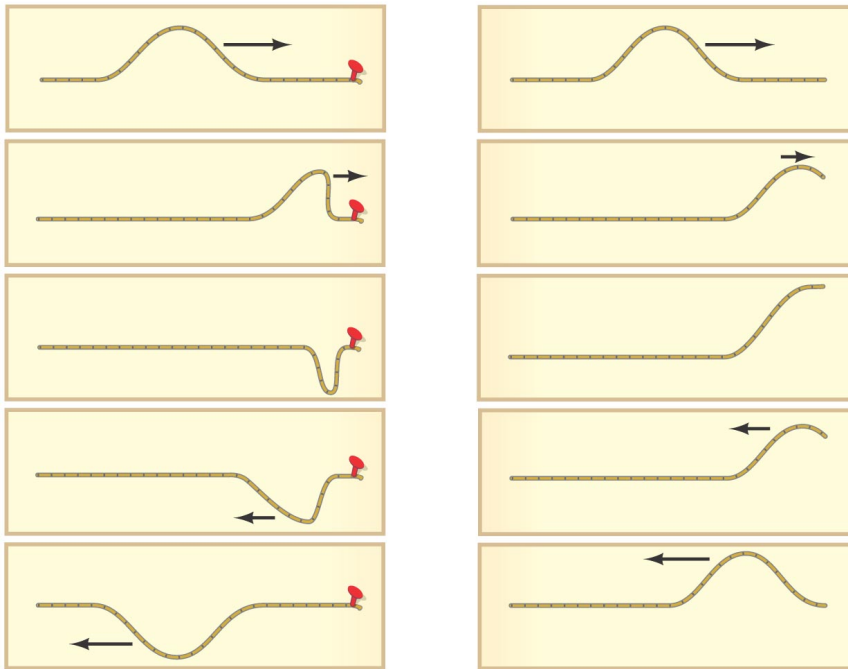


# 15-6 Ο Κανόνας Υπέρθεσης

Σε  $t = 0$ , τρία κύματα  $D_1 = A \cos kx$ ,  $D_2 = -1/3 A \cos 3kx$ , και  $D_3 = 1/5 A \cos 5kx$ , όπου  $A = 1.0 \text{ m}$  και  $k = 10 \text{ m}^{-1}$ . Κάντε γραφική παράσταση των τριών κυμάτων από  $x = -0.4 \text{ m}$  μέχρι  $+0.4 \text{ m}$ . (Τα τρία αυτά κύματα είναι οι τρεις πρώτοι όροι της ανάπτυξης Fourier για ένα «τετράγωνο κύμα.»)



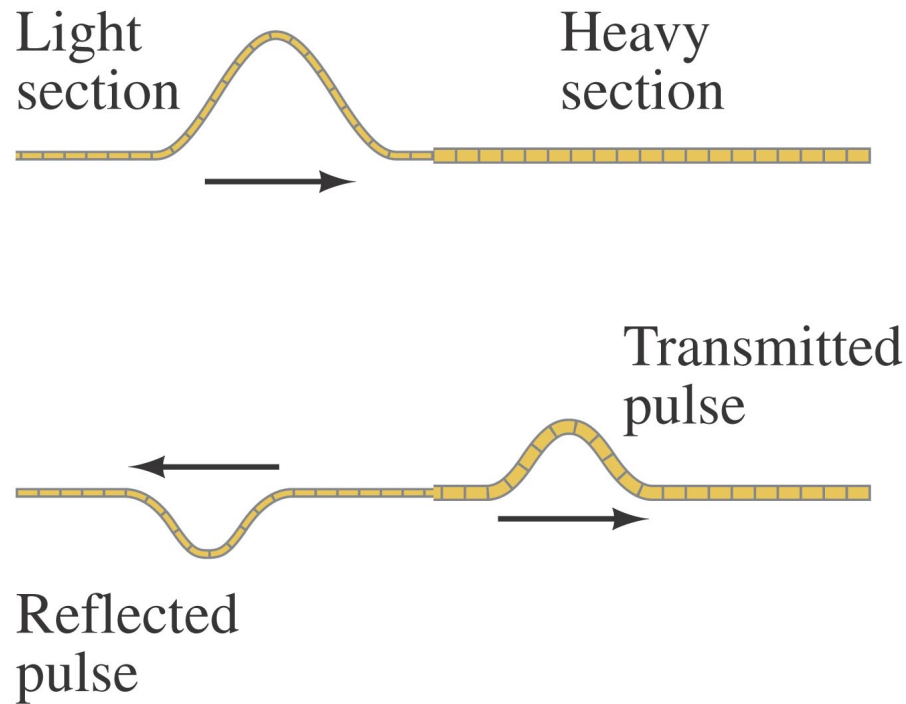
# 15-7 Ανάκλαση και Διάδοση



Όταν ένα αντικείμενο φτάσει στην άκρη του μέσου (της χορδής), το κύμα ανακλάται και το κύμα επιστρέφει με ίδιο πλάτος (πρόσημο).

Όταν ένα κύμα προσκρούσει σε ένα εμπόδιο, ανακλάται αλλά με αντίστροφο πλάτος (αντίθετο πρόσημο).

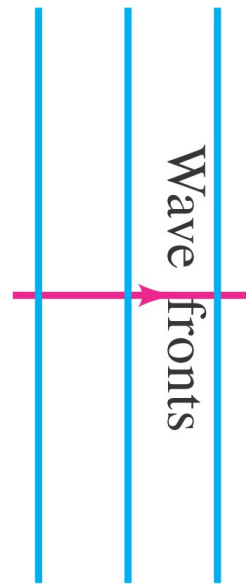
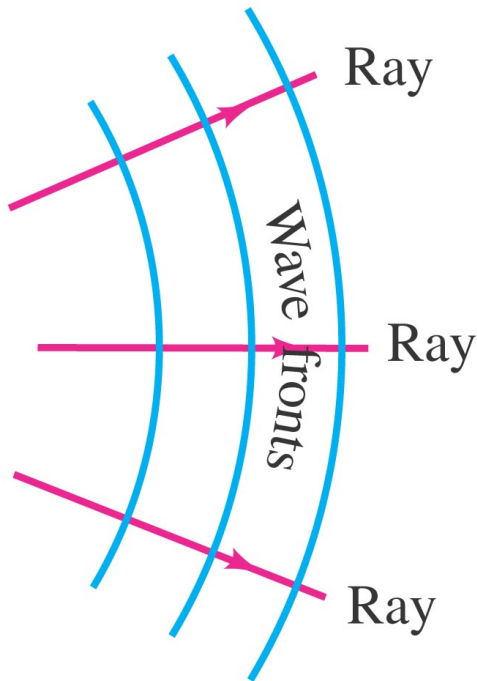
# 15-7 Ανάκλαση και Διάδοση



Όταν ένα κύμα συναντήσει ένα πυκνότερο μέσο, τότε ένα τμήμα του κύματος διαδίδεται και ένα τμήμα ανακλάται. Εάν η ταχύτητα στο πυκνότερο μέσο είναι μικρότερη, τότε το μήκος κύματος είναι μικρότερο.

# 15-7 Ανάκλαση και Διάδοση

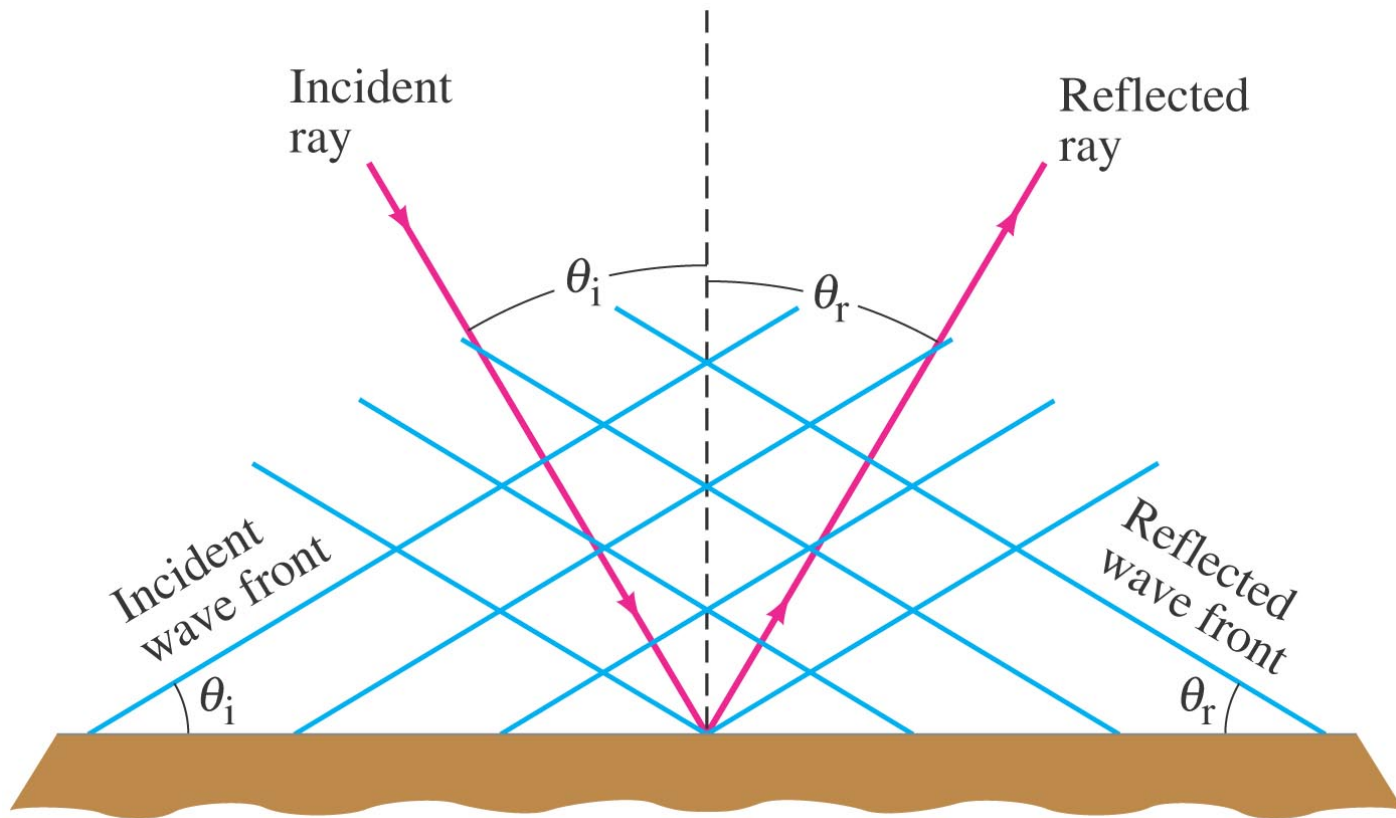
Κύματα πολλαπλών διαστάσεων απεικονίζονται με μέτωπα κύματος, δηλ. επιφάνειες όπου **όλα τα κύματα έχουν την ίδια φάση.**



Γραμμές κάθετες στα μέτωπα ονομάζονται ακτίνες και δηλώνουν την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος.

# 15-7 Ανάκλαση και Διάδοση

**Κανόνας ανάκλασης:** Η γωνία προπτώσεως είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης

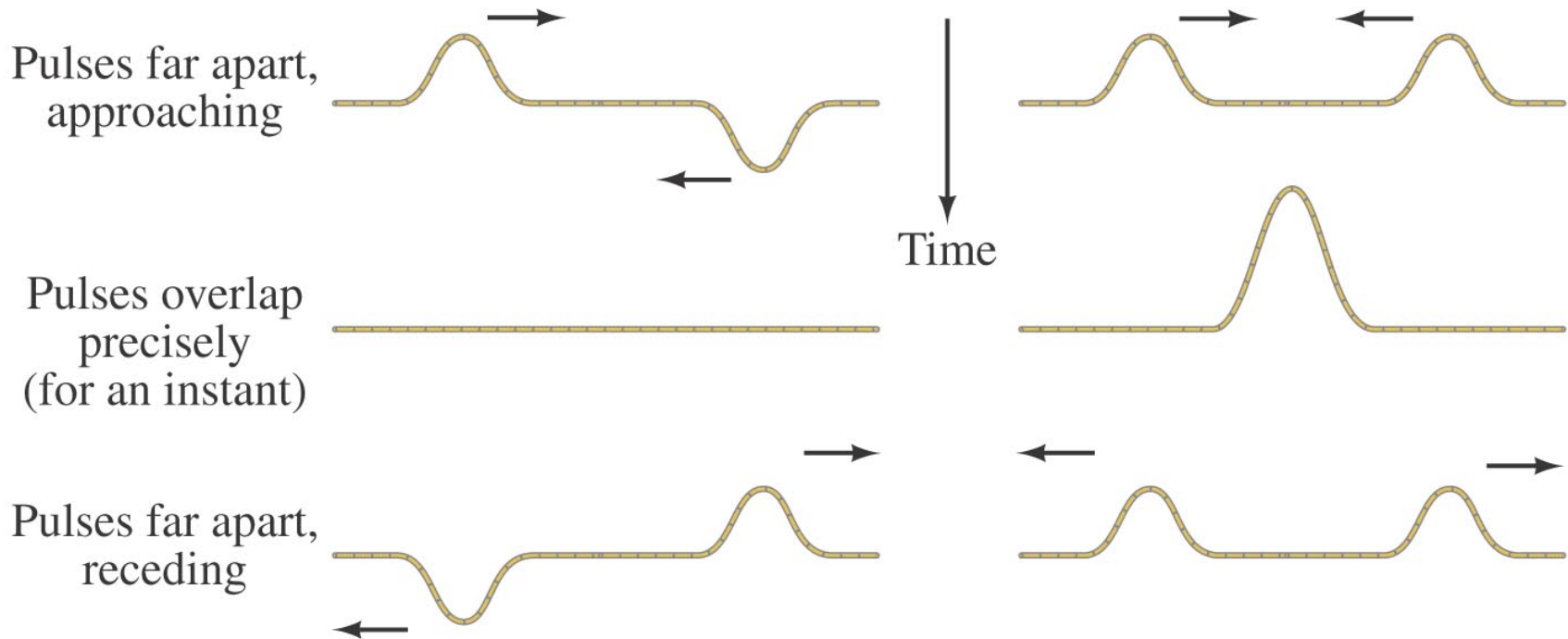




# 15-8 Συμβολή

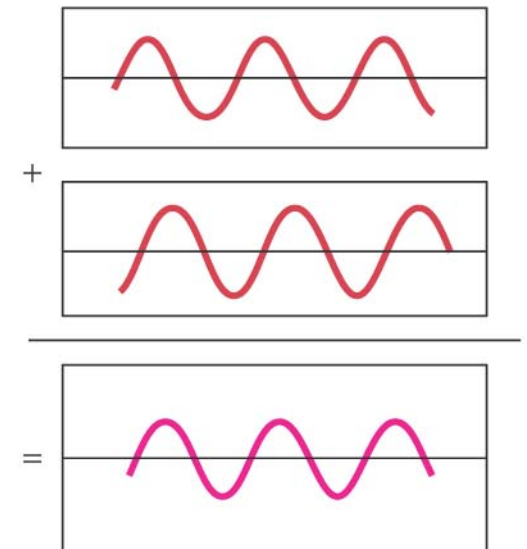
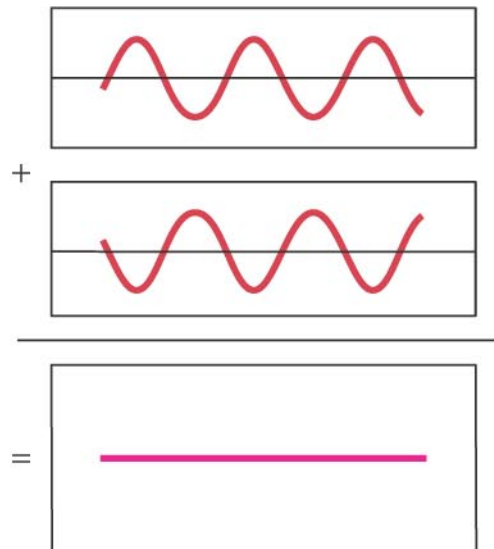
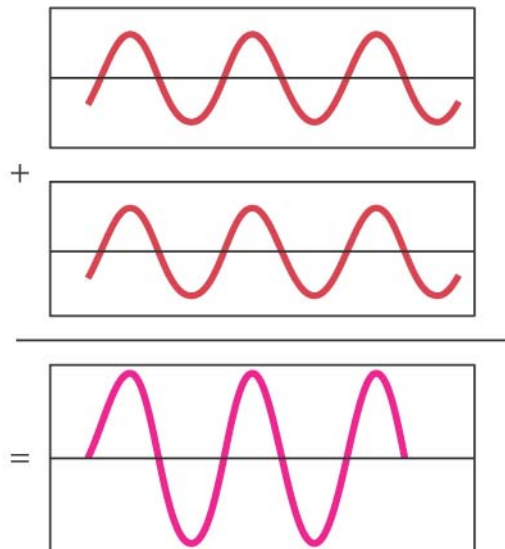
Σύμφωνα με τον κανόνα υπέρθεσης: Η μετατόπιση σε οποιοδήποτε σημείο προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα όλων των κυμάτων που διέρχονται από το συγκεκριμένο σημείο σε κάθε χρονική στιγμή.

(a) Καταστρεπτική συμβολή and (b) Ενισχυτική Συμβολή

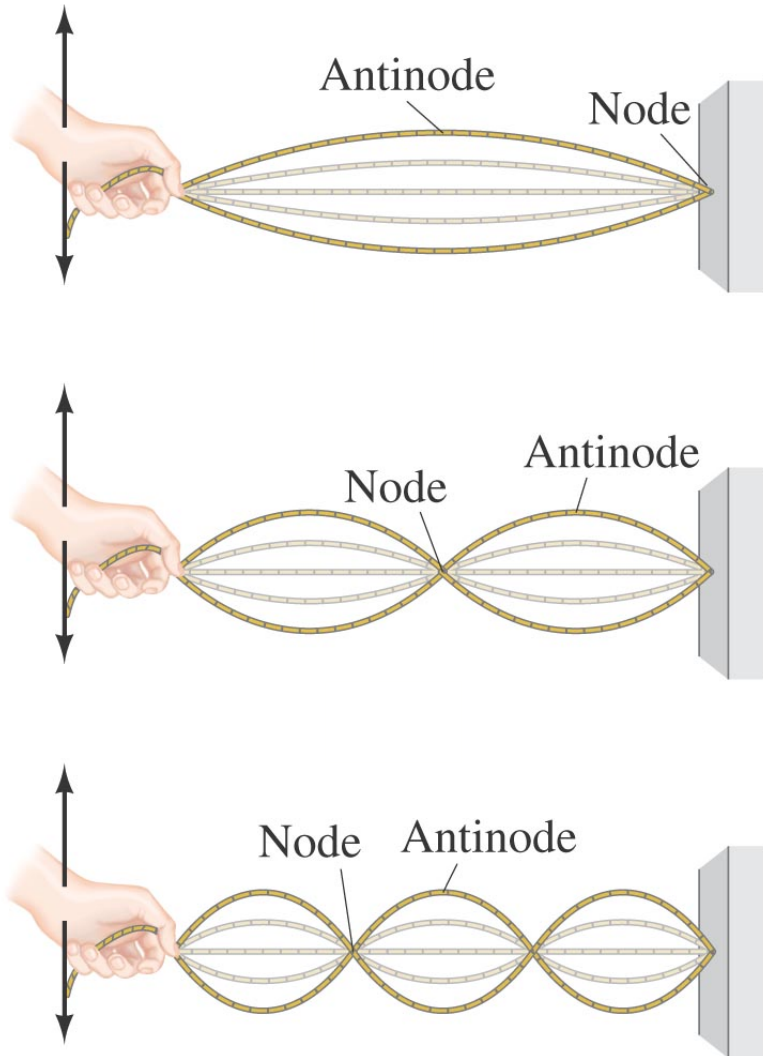


# 15-8 Συμβολή

Οι γραφικές παραστάσεις δείχνουν αθροίσματα δύο κυμάτων. (a) Ενισχυτικό άθροισμα. (b) Καταστρεπτικό άθροισμα και (c) μερικώς καταστρεπτικό άθροισμα

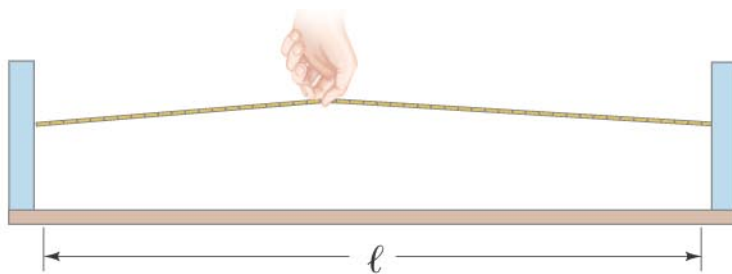


# 15-9 Στάσιμα Κύματα, Συντονισμός



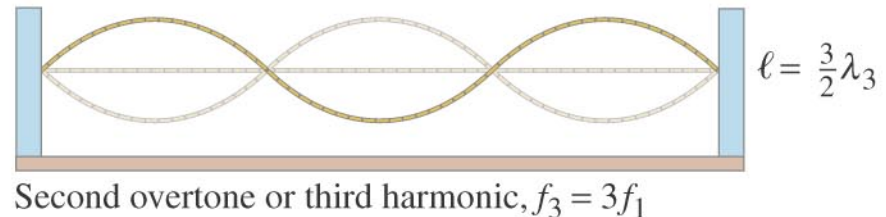
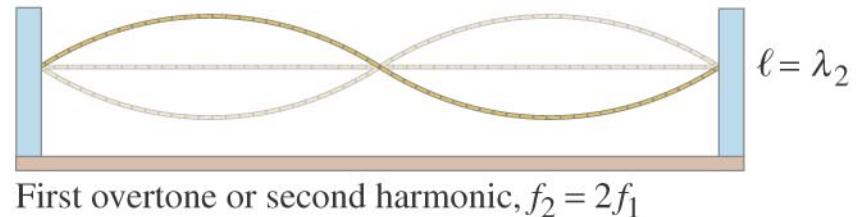
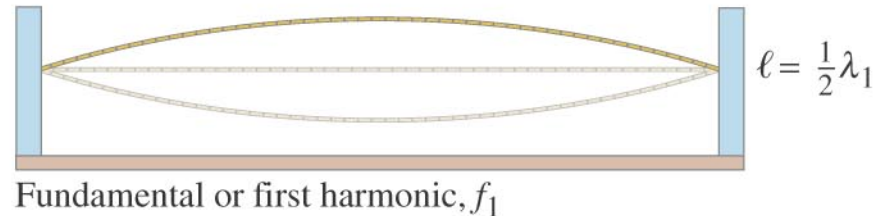
Στάσιμα Κύματα δημιουργούνται όταν τα άκρα της χορδής είναι σταθερά. Στην περίπτωση αυτή τα μόνα κύματα που επιτρέπονται είναι αυτά που δημιουργούν κόμβους στις άκρες και σε διάφορα σημεία κατά μήκος της χορδής. Στους κόμβους το πλάτος του κύματος είναι **ΜΗΔΕΝ**.

# 15-9 Στάσιμα Κύματα, Συντονισμός



Οι συχνότητες των στάσιμων κυμάτων ονομάζονται **συχνότητες συντονισμού ή αρμονικές συχνότητες**.

Η χαμηλότερη συχνότητα ονομάζεται θεμελιώδης



# 15-9 Στάσιμα Κύματα, Συντονισμός

Τα μήκη και οι συχνότητες των στάσιμων κυμάτων είναι:

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

**και**

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2\ell} = nf_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

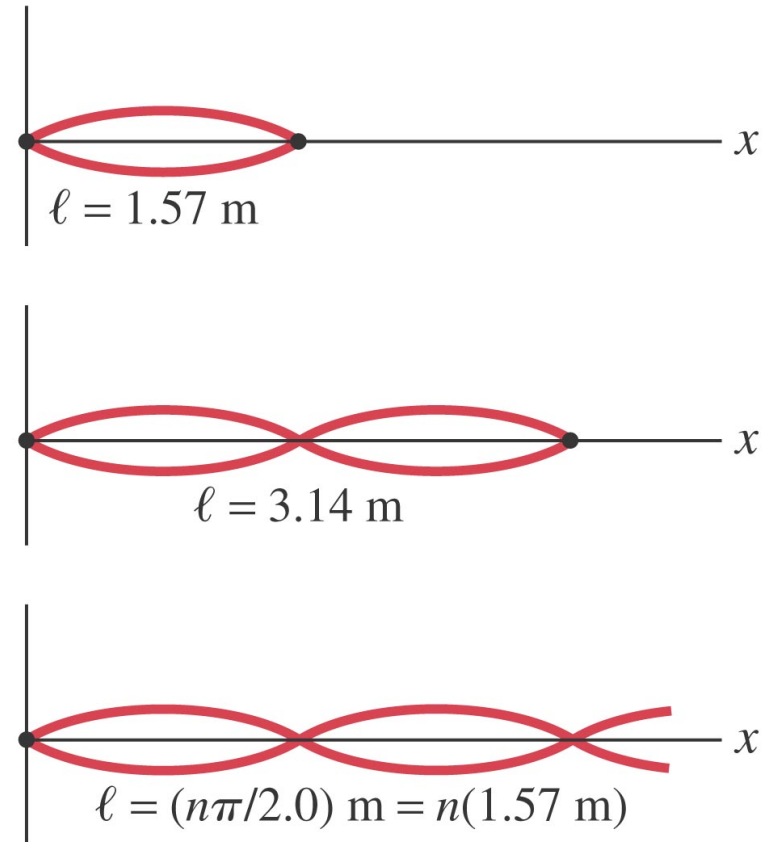
# 15-9 Στάσιμα Κύματα, Συντονισμός

Η χορδή ενός πιάνου έχει μήκος 1.10 m και μάζα 9.00 g. (a) Πόση τάση απαιτείται ώστε η χορδή να δονείται με θεμελιώδη συχνότητα 131 Hz; (b) Ποιες είναι οι συχνότητες των πρώτων τεσσάρων αρμονικών;

**ΛΥΣΗ**

# 15-9 Στάσιμα Κύματα, Συντονισμός

Δύο κύματα που ταξιδεύουν με αντίθετες φορές μιας χορδής με σταθερό σημείο στο  $x = 0$  περιγράφονται από τις συναρτήσεις  $D_1 = (0.20 \text{ m})\sin(2.0x - 4.0t)$  και  $D_2 = (0.20\text{m})\sin(2.0x + 4.0t)$  (όπου  $x$  είναι σε m,  $t$  σε s), παράγοντας στάσιμα κύματα. Βρείτε (a) την συνάρτηση του στάσιμου κύματος, (b) το μέγιστο πλάτος στο σημείο  $x = 0.45 \text{ m}$ , (c) που βρίσκεται το άλλο σταθερό σημείο της χορδής ( $x > 0$ ), (d) σε πιο σημείο έχουμε το μέγιστο πλάτος



**ΛΥΣΗ**

**APPROACH** We use the principle of superposition to add the two waves. The given waves have the form we used to obtain Eq. 15–18, which we thus can use.

**SOLUTION** (a) The two waves are of the form  $D = A \sin(kx \pm \omega t)$ , so

$$k = 2.0 \text{ m}^{-1} \quad \text{and} \quad \omega = 4.0 \text{ s}^{-1}.$$

These combine to form a standing wave of the form of Eq. 15–18:

$$D = 2A \sin kx \cos \omega t = (0.40 \text{ m}) \sin(2.0x) \cos(4.0t),$$

where  $x$  is in meters and  $t$  in seconds.

(b) At  $x = 0.45 \text{ m}$ ,

$$D = (0.40 \text{ m}) \sin(0.90) \cos(4.0t) = (0.31 \text{ m}) \cos(4.0t).$$

The maximum amplitude at this point is  $D = 0.31 \text{ m}$  and occurs when  $\cos(4.0t) = 1$ .

(c) These waves make a standing wave pattern, so both ends of the string must be nodes. Nodes occur every half wavelength, which for our string is

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{2.0} \text{ m} = 1.57 \text{ m}.$$

If the string includes only one loop, its length is  $\ell = 1.57 \text{ m}$ . But without more information, it could be twice as long,  $\ell = 3.14 \text{ m}$ , or any integral number times  $1.57 \text{ m}$ , and still provide a standing wave pattern, Fig. 15–27.

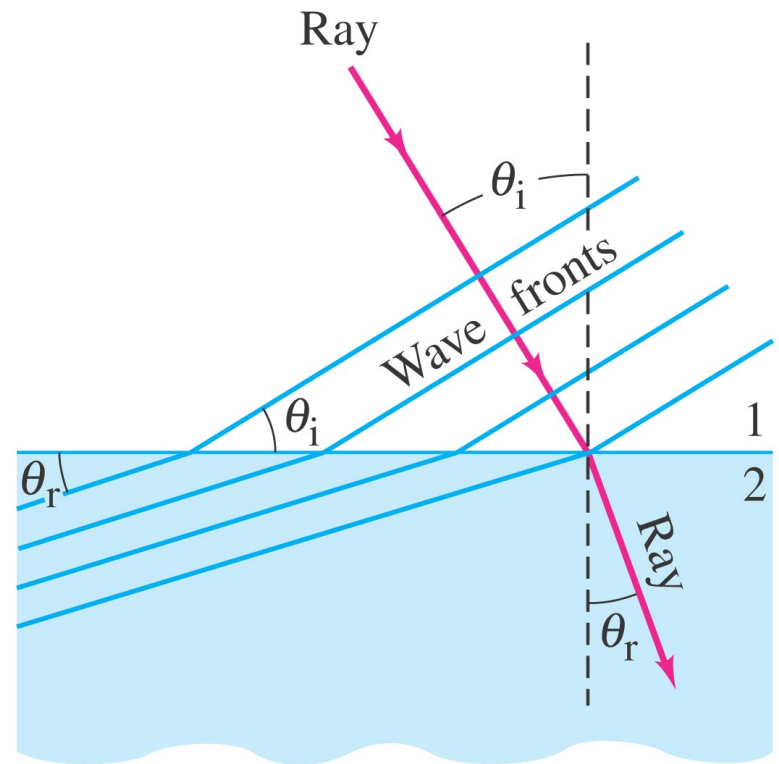
(d) The nodes occur at  $x = 0$ ,  $x = 1.57 \text{ m}$ , and, if the string is longer than  $\ell = 1.57 \text{ m}$ , at  $x = 3.14 \text{ m}$ ,  $4.71 \text{ m}$ , and so on. The maximum amplitude (antinode) is  $0.40 \text{ m}$  [from part (b) above] and occurs midway between the nodes. For  $\ell = 1.57 \text{ m}$ , there is only one antinode, at  $x = 0.79 \text{ m}$ .



# 15-10 Διάθλαση

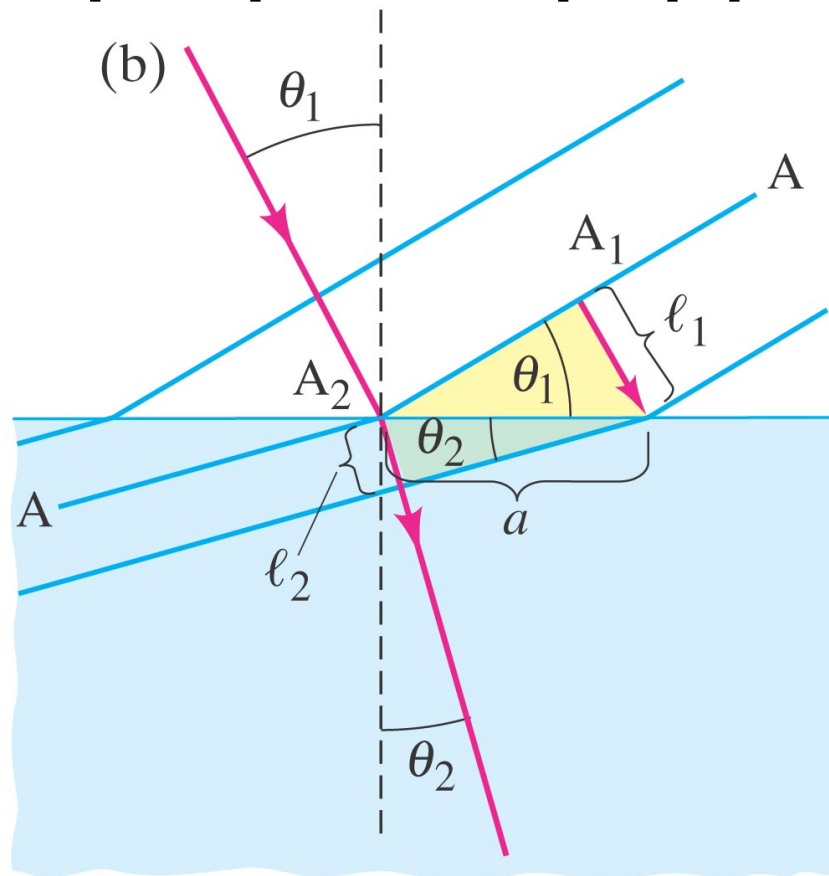
Όταν ένα κύμα συναντήσει μια διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων με διαφορετική πυκνότητα, τότε η κατεύθυνση διάδοσης του κύματος αλλάζει σύμφωνα με τη σχέση:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1}.$$



# 15-10 Διάθλαση

Η κόκκινη γραμμή δείχνει τη μεταβολή όταν περνάμε από μέσο με χαμηλή ταχύτητα σε μέσο με μεγαλύτερη ταχύτητα. Η τροχιά είναι αντιστρεπτή όταν ακολουθούμε την αντίστροφη πορεία.

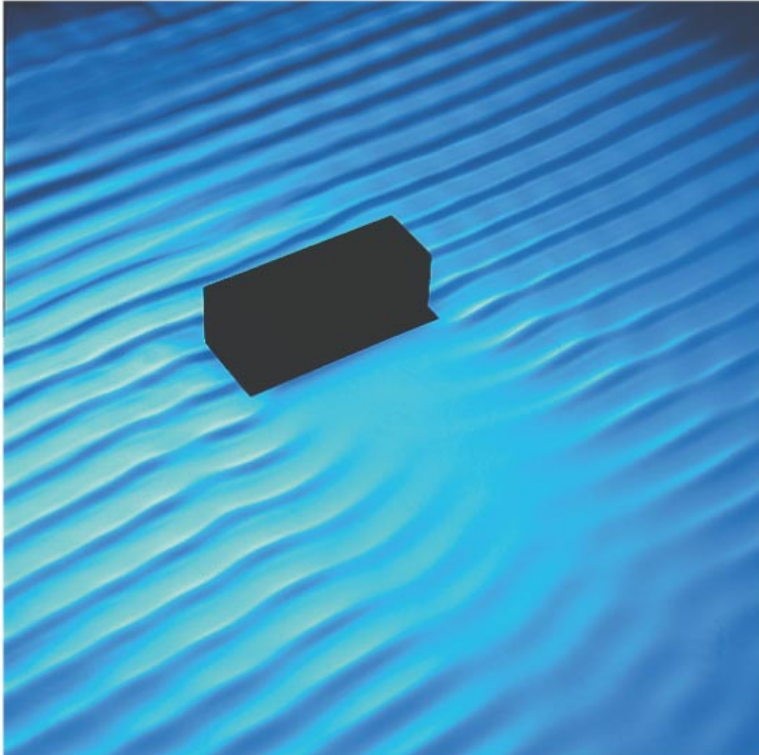


# 15-10 Διάθλαση

Ένα σεισμικό κύμα P περνάει από γεωλογικό πέτρωμα με ταχύτητα  $6.5 \text{ km/s}$  σε πέτρωμα με ταχύτητα  $8.0 \text{ km/s}$ . Εάν η γωνία πρόσπτωσης στη διαχωριστική επιφάνεια είναι  $30^\circ$ , πόση είναι η γωνία διάθλασης;

**ΛΥΣΗ**

# 15-11 Περίθλαση



Όταν ένα κύμα συναντήσει ένα αντικείμενο στην τροχιά του, το κύμα το «προσπερνάει» αφήνοντας μια «σκιά» πίσω από το αντικείμενο.

# 15-11 Περίθλαση

Ο βαθμός περίθλασης εξαρτάται από το μέγεθος του εμποδίου (αντικειμένου) σε σχέση με το μήκος κύματος. Εάν το αντικείμενο είναι **ΠΟΛΥ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ** από το μήκος κύματος το κύμα **ΔΕΝ ΕΠΙΡΕΑΖΕΤΑΙ** (a). Όσο περισσότερο πλησιάζουν οι διαστάσεις του αντικειμένου στο μήκος κύματος τόσο περισσότερη περίθλαση έχουμε. (b, c, d).



Water waves passing blades of grass



Stick in water



Short-wavelength waves passing log



Long-wavelength waves passing log