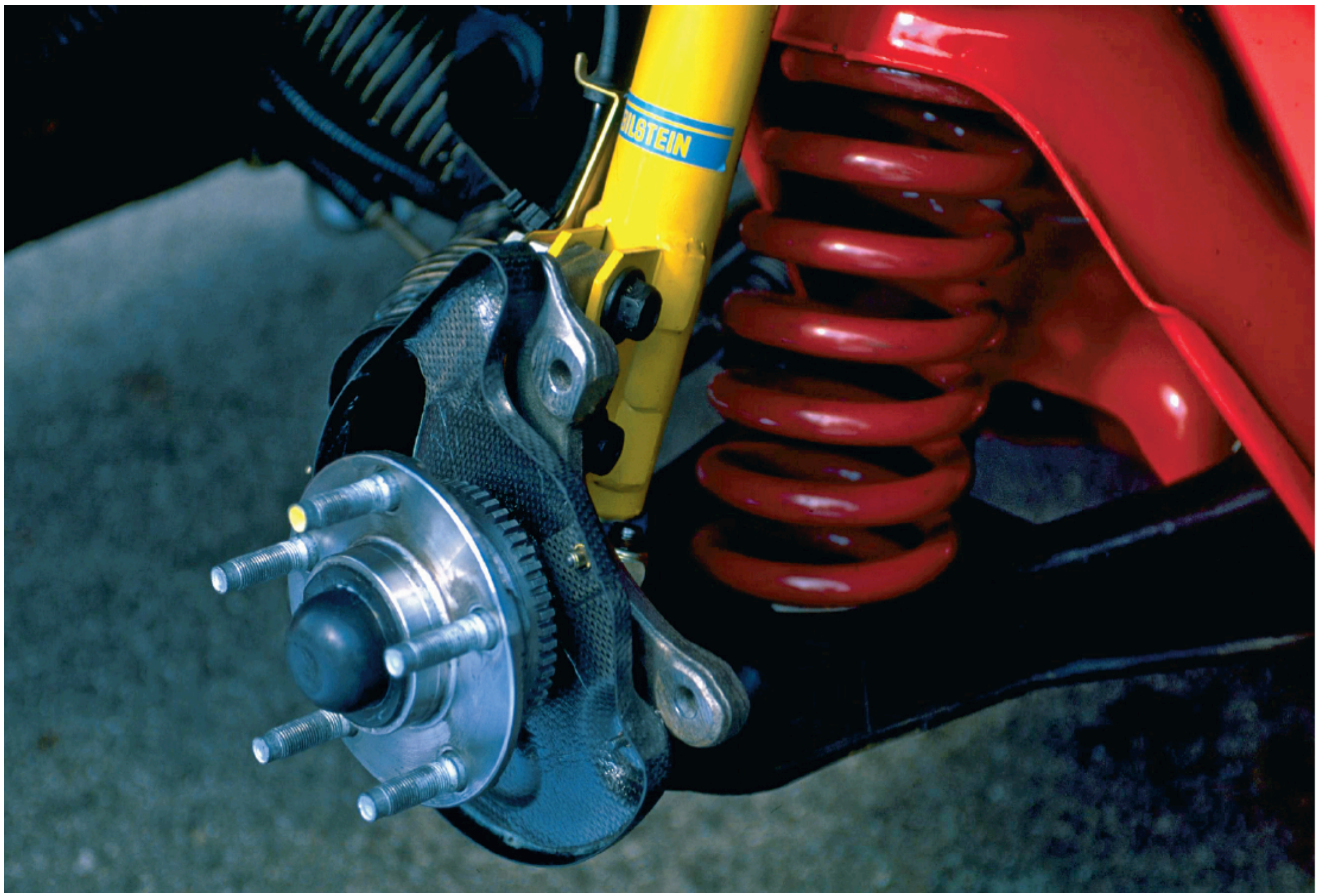
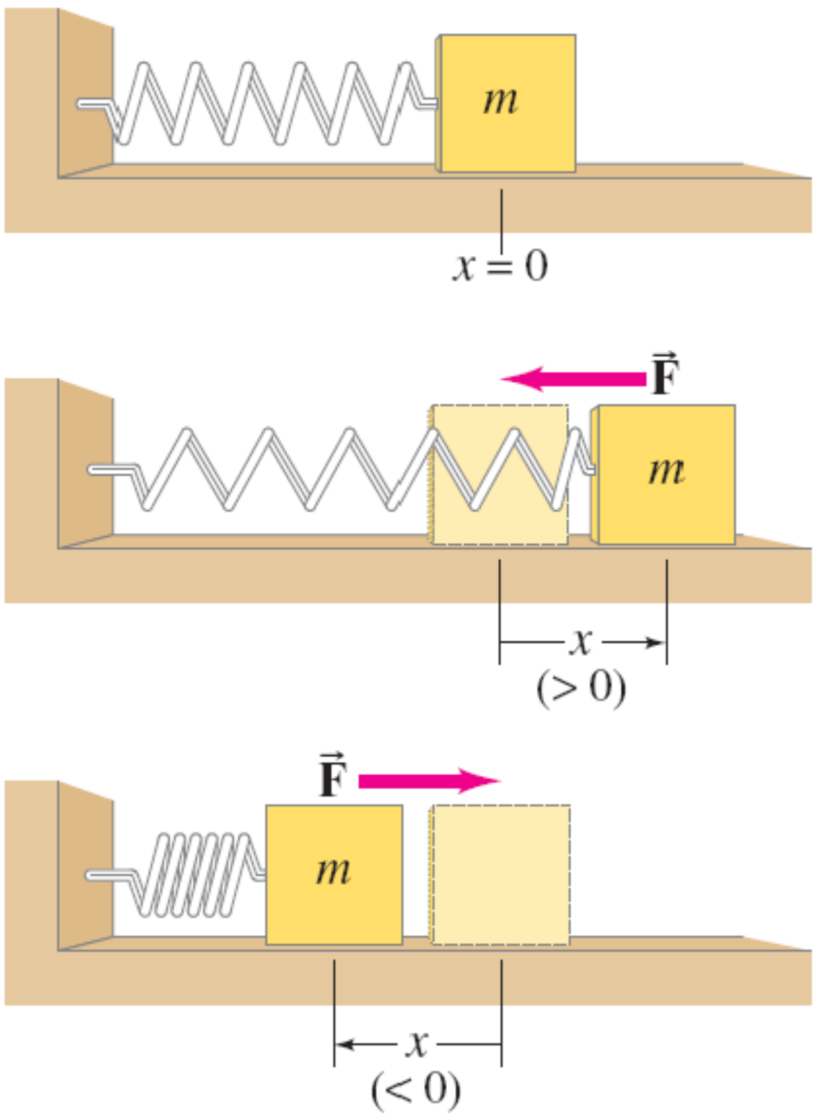
Κεφάλαιο 14
Ταλαντώσεις



Περιεχόμενα 14

- Ταλαντώσεις Ελατηρίου
- Απλή αρμονική κίνηση
- Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή
- Σχέση απλού αρμονικού ταλαντωτή και κυκλικής κίνησης
- Το απλό εκκρεμές
- Το φυσικό εκκρεμές και το στροφικό εκκρεμές
- Εφησυχασμός Ταλάντωσης
- Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις και Συντονισμός

14-1 Ταλαντώσεις Ελατηρίου



Όταν ένα αντικείμενο δονείται ή ταλαντεύεται μπρος-πίσω διανύοντας ένα διάστημα σε τακτό χρονικό διάστημα η κίνηση ονομάζεται περιοδική. Το σύστημα μάζας και ελατηρίου αποτελεί ένα μοντέλο περιοδικού συστήματος

14-1 Ταλαντώσεις Ελατηρίου

Υποθέτουμε ότι μια επιφάνεια είναι άνευ τριβής. Υπάρχει ένα σημείο όπου το ελατήριο ούτε συμπιέζεται ούτε τεντώνεται. Το σημείο αυτό ονομάζεται **σημείο ισορροπίας**. Η **μετατόπιση** μετριέται σε σχέση με το σημείο αυτό (x = 0 στην προηγούμενη διαφάνεια).

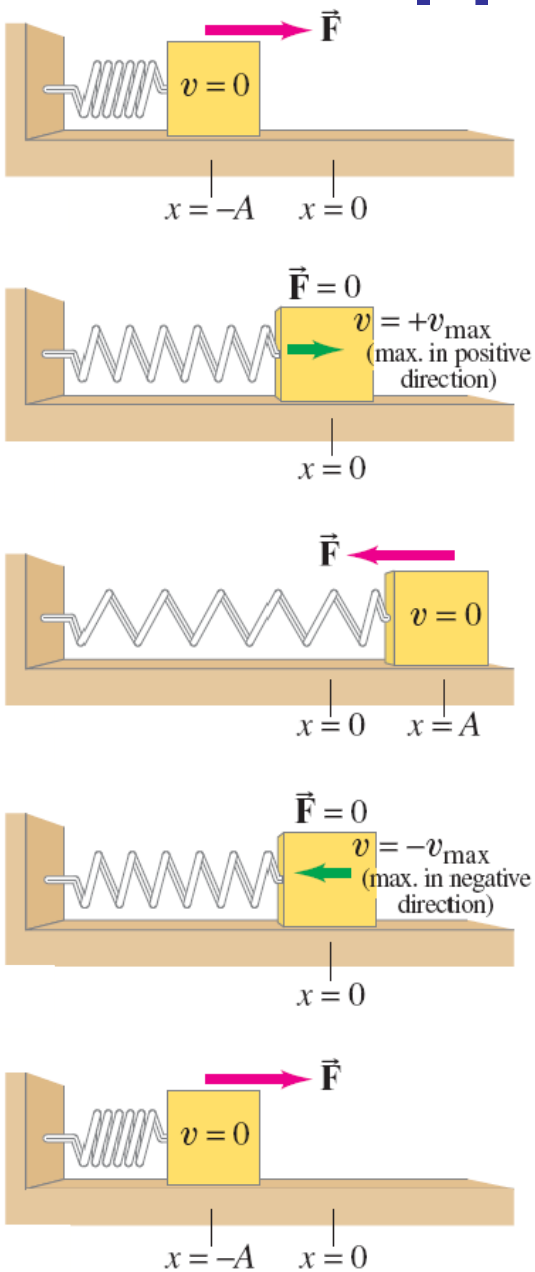
Η **δύναμη** που ασκείται στο ελατήριο είναι ανάλογη της **μετατόπισης**:

$$F = -kx.$$

14-1 Ταλαντώσεις Ελατηρίου

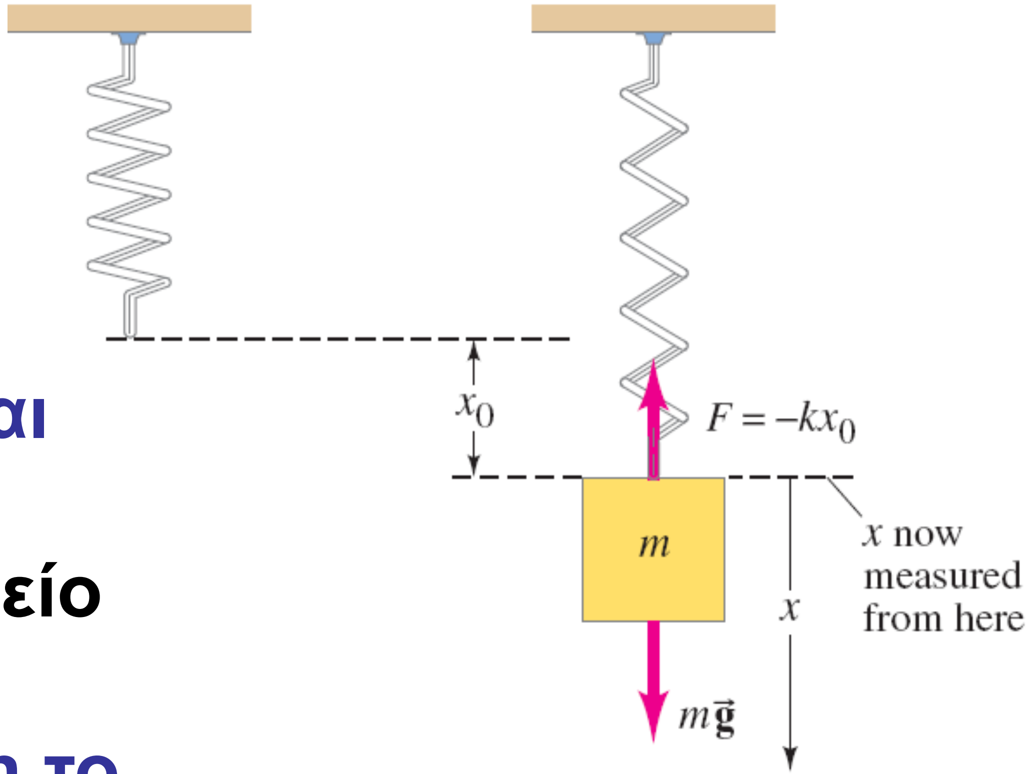
- Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η δύναμη είναι επαναφοράς—δηλ. κατευθύνεται προς το σημείο ισορροπίας.
- k είναι η σταθερά ελατηρίου.
- Η δύναμη δεν είναι σταθερή, επομένως η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή.

14-1 Ταλαντώσεις Ελατηρίου



- Η μετατόπιση μετριέται από το σημείο ισορροπίας.
- Το Πλάτος είναι η μέγιστη μετατόπιση.
- Ένας κύκλος είναι μια πλήρης κίνηση από και προς το σημείο ισορροπίας
- Η περίοδος είναι ο χρόνος που απαιτείται για ένα πλήρη κύκλο.
- Η συχνότητα είναι ο αριθμός των κύκλων ανά δευτερόλεπτο.

14-1 Ταλαντώσεις Ελατηρίου



Ένα ελατήριο κρέμεται **κατακόρυφα**, η μόνη αλλαγή είναι στο **σημείο ισορροπίας**, όπου σε αυτήν την περίπτωση το σημείο αυτό είναι εκεί όπου η δύναμη της βαρύτητας εξισώνεται με τη δύναμη του ελατηρίου

14-1 Ταλαντώσεις Ελατηρίου

Μια τετραμελής οικογένεια ζυγίζει 200 kg, και επιβιβάζονται στο αυτοκίνητό τους που ζυγίζει 1200-kg. Και τα ελατήρια του αυτοκινήτου (αμορτισέρ) συμπιέζονται κατά 3.0 cm. (a) Εάν υποθέσουμε ότι τα τέσσερα ελατήρια συμπεριφέρονται ως ένα, ποια είναι η σταθερά του ελατηρίου (b) Πόσο θα χαμηλώσει το αυτοκίνητο εάν φορτωθεί με 300 kg αντί 200 kg;

ΛΥΣΗ

14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Σε κάθε σύστημα που δονείται η δύναμη είναι ανάλογη της αρνητικής μετατόπισης αποτελεί **απλή αρμονική κίνηση** και συχνά αποκαλείται **απλός** **αρμονικός ταλαντωτής**.

Θέτοντας $F = -kx$ στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα καταλήγουμε στην **διαφορική εξίσωση** της κίνησης:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι:

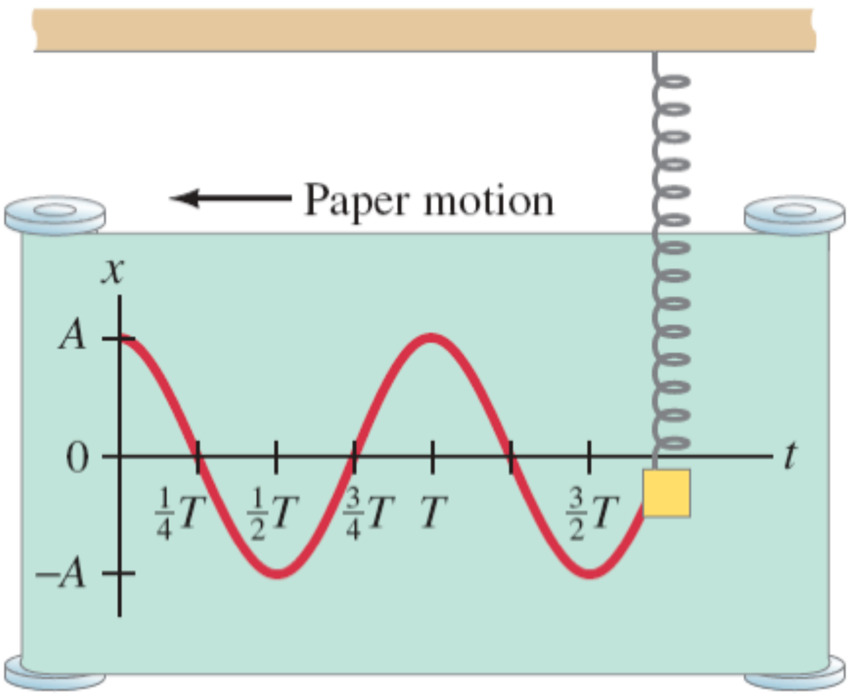
$$x = A\cos(\omega t + \phi).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Με αντικατάσταση βλέπουμε ότι η λύση αυτή επαληθεύει την εξίσωση όπου:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$



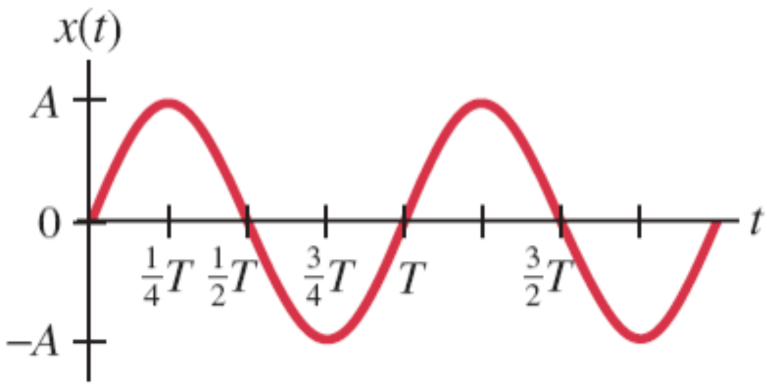
Οι σταθερές *A* και *φ* προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. *A* είναι το πλάτος και *φ* η φάση στο χρόνο *t* = 0.

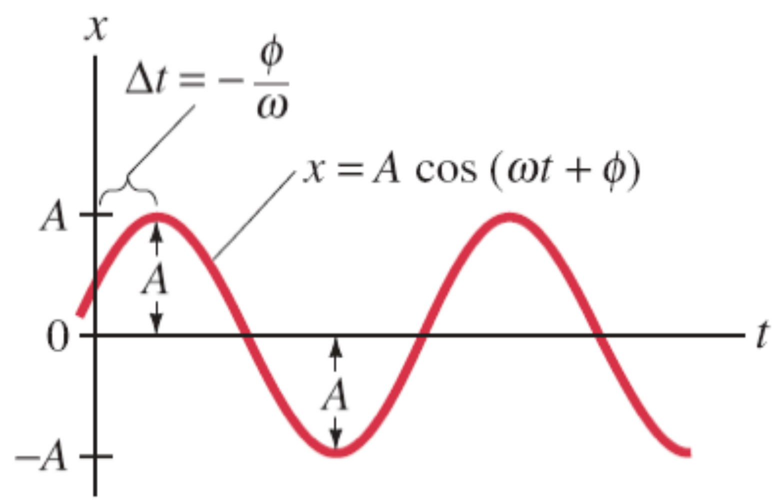
14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Η ταχύτητα προσδιορίζεται από την παράγωγο της μετατόπισης:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \phi)] = -\omega A\sin(\omega t + \phi).$$

Ο ρόλος της φάσης φ φαίνεται στο διάγραμμα:





14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Επειδή $\omega = 2\pi f = \sqrt{k/m},$ **τότε**

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

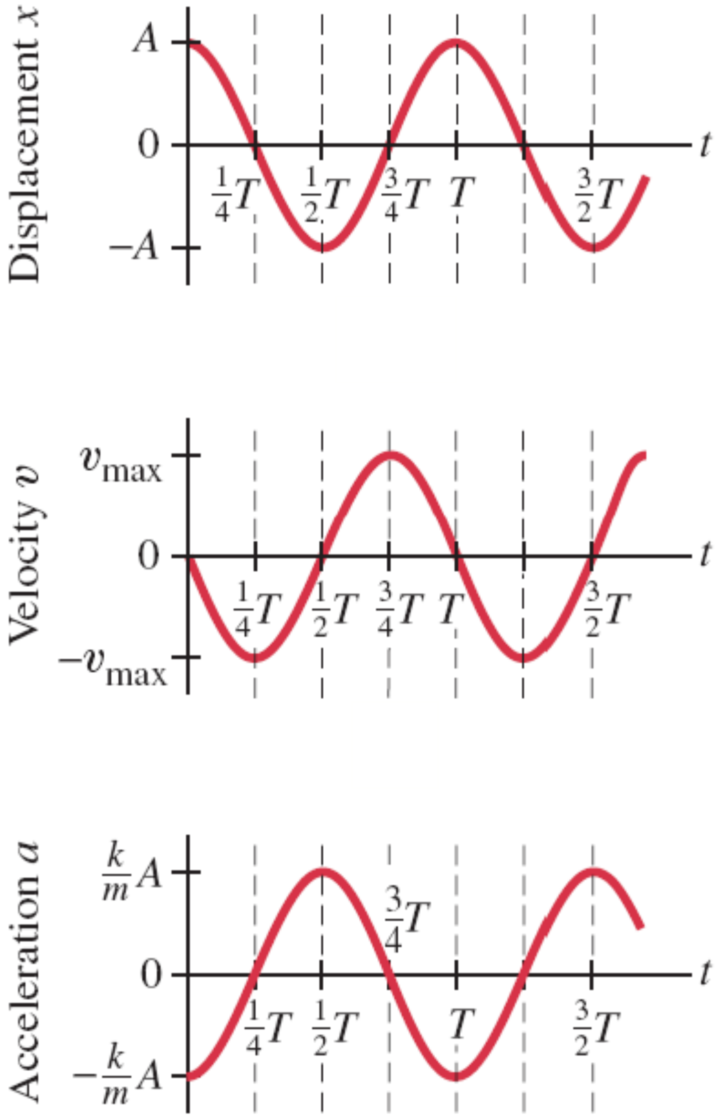
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Προσδιορίστε την περίοδο και τη συχνότητα ταλάντωσης ενός αυτοκινήτου που πέρασε πάνω από ένα εμπόδιο. Η μάζα του αυτοκινήτου είναι 1400 kg, και τα αμορτισέρ του έχουν σταθερά ελατηρίου 6.5×10^4 N/m. Υποθέτουμε ότι το αυτοκίνητο ταλαντεύεται κατακόρυφα.

ΛΥΣΗ

14-2 Απλή αρμονική κίνηση



Η ταχύτητα και η επιτάχυνση για την αρμονική κίνηση περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi).$$

14-2 Απλή αρμονική κίνησης

Σε ένα εργοστάσιο ένας μεγάλος ηλεκτροκινητήρας κάνει το δάπεδο του κτιρίου να τρέμει με συχνότητα 10 Hz. Το πλάτος της δόνησης είναι περίπου 3.0 mm. Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του δαπέδου.

ΛΥΣΗ

14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Ένα ελατήριο τεντώνεται κατά 0.150 m όταν μια μάζα 0.300-kg «κρεμαστεί» πάνω του. Το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία οριζοντίως πάνω σε τραπέζι άνευ τριβής. Η μάζα μετατοπίζεται έτσι ώστε να συμπιέσει το ελατήριο κατά 0.100 m από την θέση ισορροπίας. Να προσδιοριστούν: (a) η σταθερά του ελατηρίου είναι k και η γωνιακή συχνότητα ω; (b) το πλάτος της οριζόντιας ταλάντωσης A; (c) το μέγεθος της μέγιστης ταχύτητας v_{max}; (d) το μέγεθος της μέγιστης επιτάχυνσης a_{max} της μάζας; (e) η περίοδος T και η συχνότητα f; (f) η μετατόπιση x σαν συνάρτηση χρόνου και (g) η ταχύτητα όταν t = 0.150 s.

ΛΥΣΗ

14-3 Η ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή

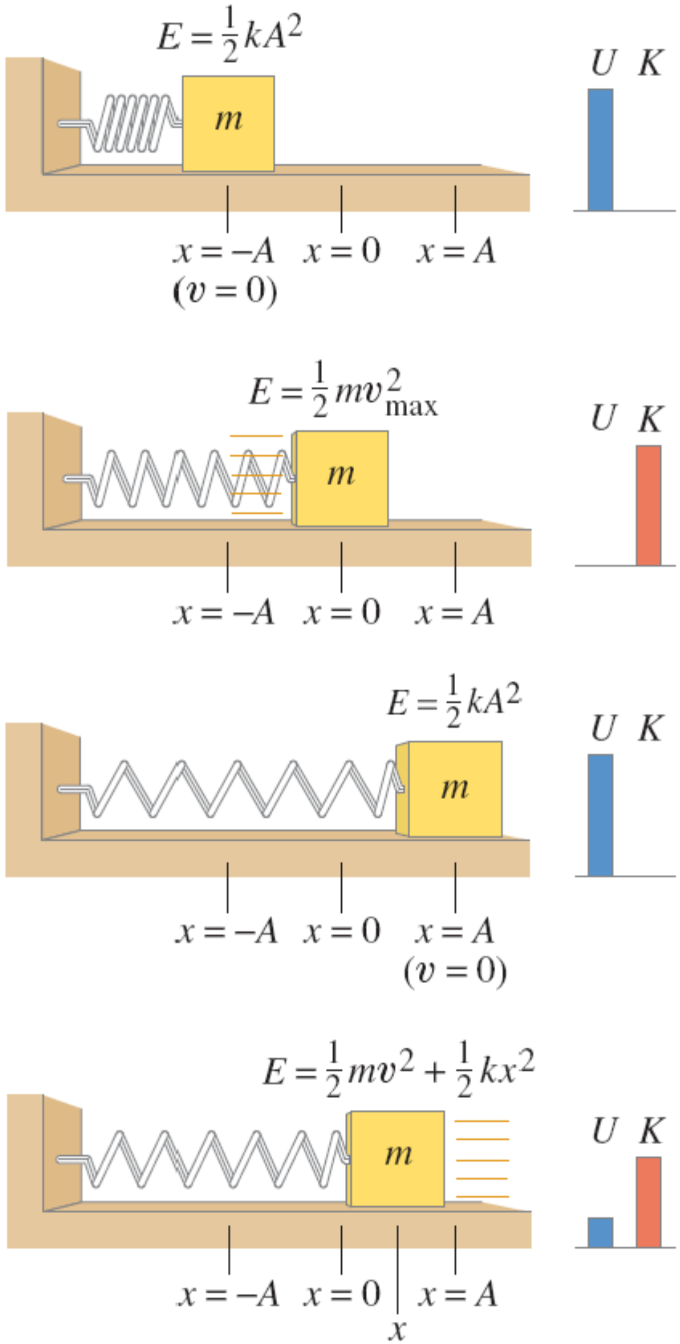
Η **δυναμική ενέργεια** του ελατηρίου δίδεται από τη σχέση:

$$U = -\int F\, dx = \tfrac{1}{2}kx^2.$$

Η μηχανική ενέργειας δίδεται από τη σχέση:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2.$$

Απουσία τριβών η συνολική μηχανική ενέργεια διατηρείται.



14-3 Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή

Στα **όρια** της ταλάντωσης η ενέργεια είναι **μόνο δυναμική.**

$$E = \frac{1}{2}kA^2.$$

Στη **θέση ισορροπίας** όλη η ενέργεια είναι **κινητική.**

14-3 Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή

Η συνολική κινητική ενέργεια είναι, $\frac{1}{2}kA^2.$

επομένως:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

Λύνουμε ως προς την ταχύτητα και βρίσκουμε:

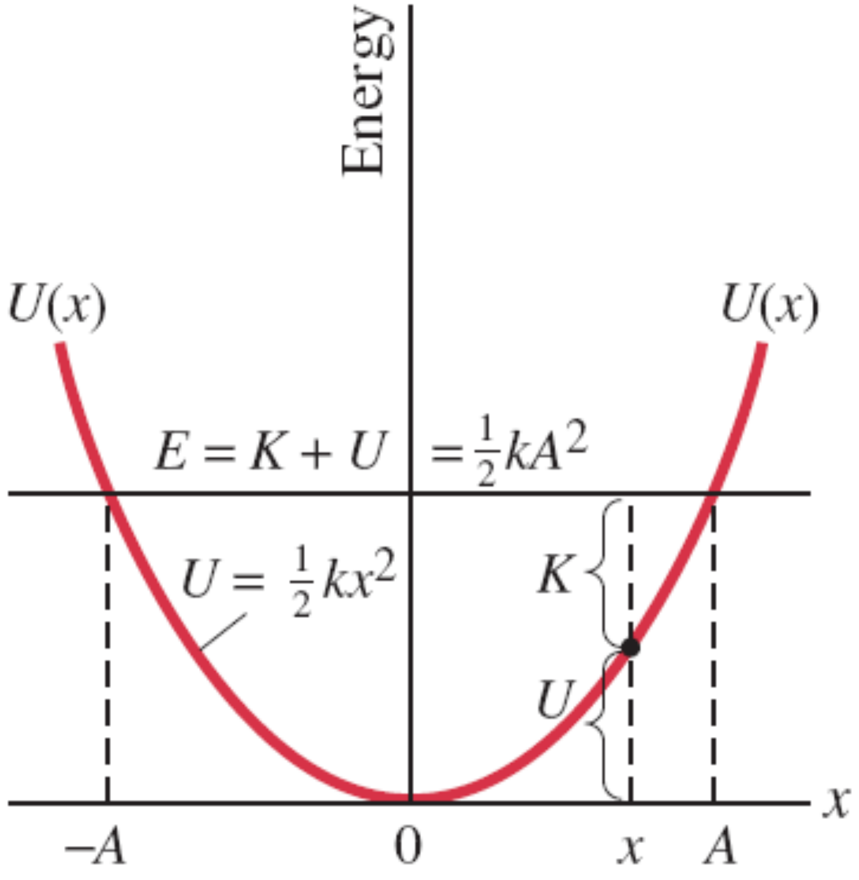
$$v = \pm v_{\max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

όπου $v_{\max}^2 = (k/m)A^2.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

14-3 Η ενέργειας απλού ταλαντωτή

Γραφική παράσταση που απεικονίζει την δυναμική ενέργεια. Βλέπουμε ότι η συνολική ενέργεια είναι σταθερή

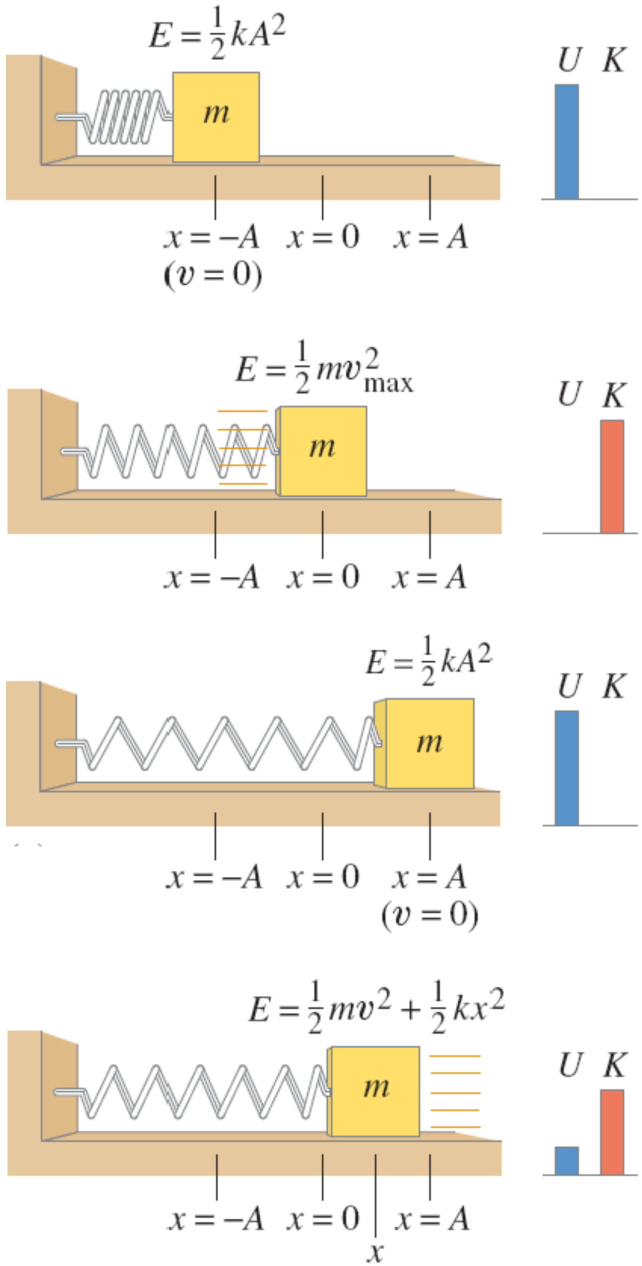


14-3 Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή

Για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή, όπου k = 19.6 N/m, A = 0.100 m, x = -(0.100 m) cos 8.08t, and v = (0.808 m/s) sin 8.08t, προσδιορίστε (a) τη συνολική ενέργεια (b) την κινητική και τη δυναμική ενέργεια σαν συνάρτηση του χρόνου, (c) την ταχύτητα όταν η μάζα βρίσκεται 0.050 m από τη θέση ισορροπίας, (d) την κινητική και δυναμική ενέργεια στο ήμισυ του πλάτους ($x = \pm A/2$).

ΛΥΣΗ

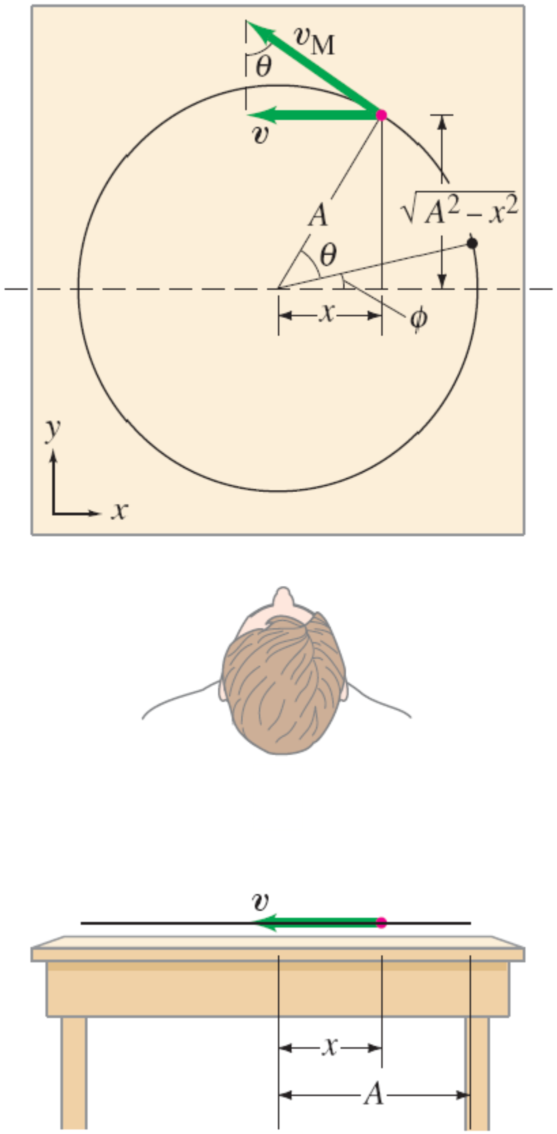
14-3 Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή



Υποθέστε ότι ένα ελατήριο «τεντώνεται» στο διπλάσιο του πλάτους της ταλάντωσης (στο $x = 2A$). Τι συμβαίνει (a) στην ενέργεια του συστήματος (b) στη μέγιστη ταχύτητα της ταλαντευόμενης μάζας, (c) τη μέγιστη ταχύτητα της ταλαντευόμενης μάζας

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

14-4 Σχέση αρμονικού ταλαντωτή και κυκλικής κίνησης



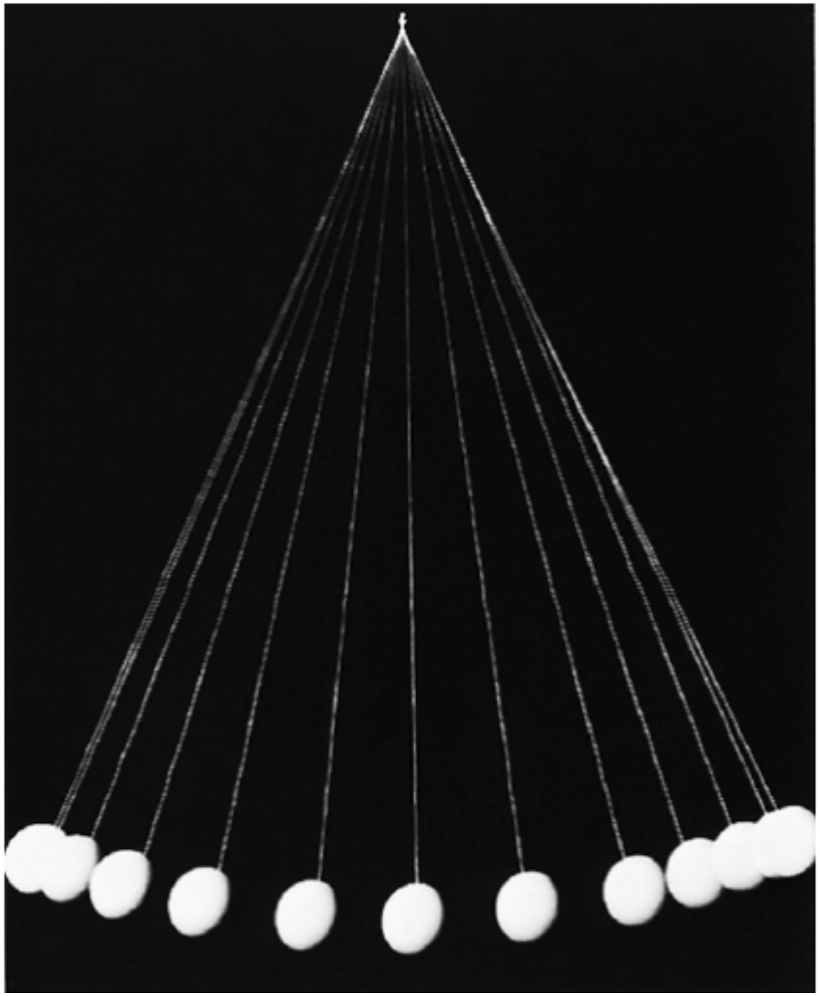
Η προβολή της γραμμικής ταχύτητας πάνω στον άξονα *x* ενός αντικειμένου που κινείται σε κύκλο με ακτίνα *A* με σταθερή ταχύτητα v_M, βρίσκουμε ότι:

$$v = v_M \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

Η εξίσωση αυτή είναι ίδια με την ταχύτητα του απλού αρμονικού ταλαντωτή

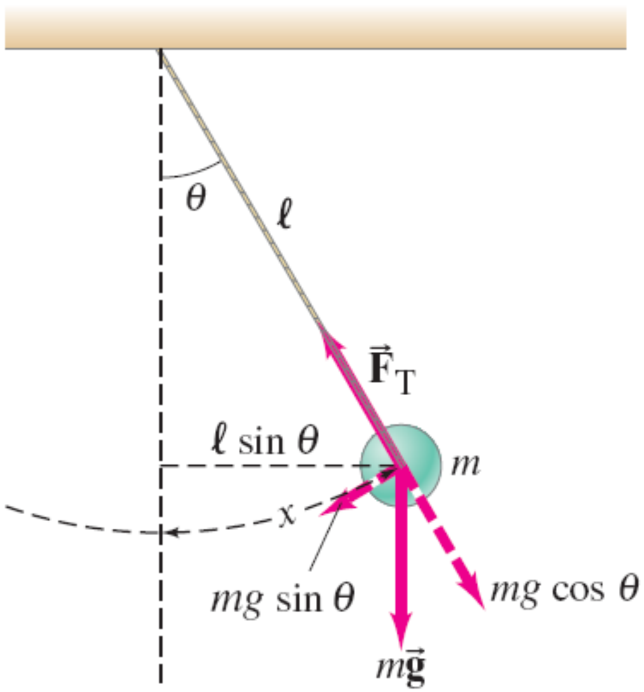
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

14-5 Το απλό εκκρεμές



Το απλό εκκρεμές αποτελείται από μια μάζα που κρέμεται από λεπτό σχοινί, το οποίο υποθέτουμε ότι οι διαστάσεις του δεν μεταβάλλονται και η μάζα του είναι αμελητέα.

14-5 Το απλό εκκρεμές



$$F = -mg\sin\theta,$$

Για μικρές γωνίες $\sin\theta \approx \theta$.

14-5 Το απλό εκκρεμές

Επομένως για μικρές γωνίες

$$F \approx -\frac{mg}{L}x,$$

όπου $x = L\theta.$

Η περίοδος και η συχνότητα είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

14-5 Το απλό εκκρεμές

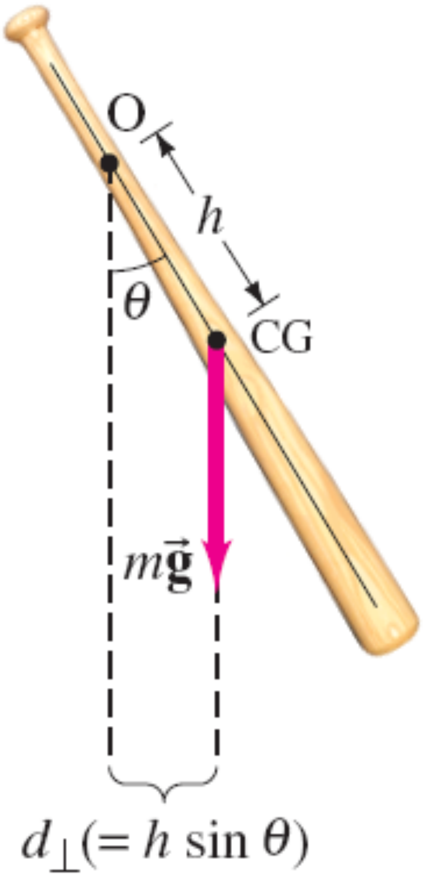
Επομένως εφόσον το σχοινί δεν έχει μάζα και για μικρό πλάτος η περίοδος είναι ανεξάρτητη της μάζας!

14-5 Το απλό εκκρεμές

Ένας γεωλόγος χρησιμοποιεί ένα απλό εκκρεμές με μήκος 37.10 cm και συχνότητα 0.8190 Hz σε μια συγκεκριμένη τοποθεσία της γης. Ποια είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην τοποθεσία αυτή;

ΛΥΣΗ

14-6 Το Φυσικό εκκρεμές και το εκκρεμές στρέψης (Torsional)



Το φυσικό εκκρεμές είναι οποιοδήποτε πραγματικό αντικείμενο που ταλαντεύεται μπρος-πίσω.

Η ροπή πέριξ του σημείου O είναι:

$$\tau = -mgh\sin\theta.$$

Με αντικατάσταση στο νόμο του Νεύτωνα βρίσκουμε:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\sin\theta.$$

14-6 Το Φυσικό εκκρεμές και το στροφικό εκκρεμές

Για μικρές γωνίες έχουμε:

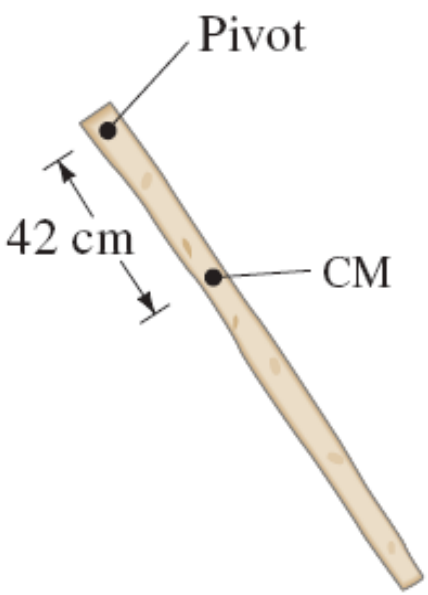
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I}\right)\theta = 0,$$

Που **ταυτίζεται** με την εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή όπου

$$\theta = \theta_{\max}\cos(\omega t + \phi),$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}.$$

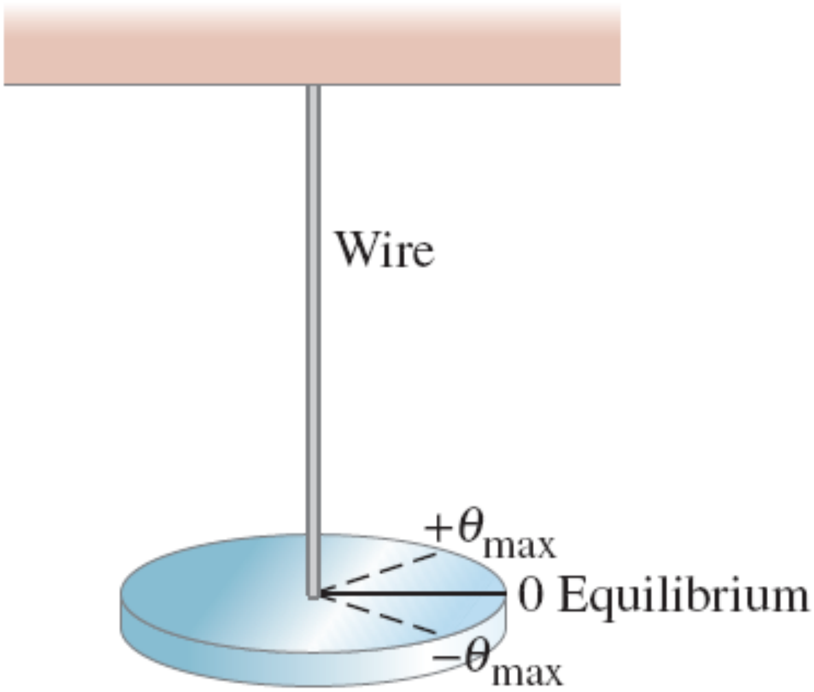
14-6 Το Φυσικό εκκρεμές και το στροφικό εκκρεμές



Ένας εύκολος τρόπος για τον προσδιορισμό της ροπής αδράνειας ενός αντικειμένου γύρω από οποιοδήποτε άξονα μπορεί να γίνει μέσω της μέτρησης της συχνότητας ταλάντωσης γύρω από το συγκεκριμένα άξονα. (a) Θεωρούμε μία ανομοιογενή ράβδο 1.0-kg που μπορεί και ισορροπεί σε σημείο 42 cm από την μια άκρη. Η περίοδος ταλάντωσης πέριξ του σημείου αυτού είναι 1.6 s. Πόση είναι η ροπή αδράνειας γύρω από το σημείο αυτό; (b) Πόση είναι η ροπή αδράνειας για άξονα περιστροφής που περνάει από το κέντρο μάζας και είναι κάθετος στην ράβδο.

ΛΥΣΗ

14-6 Το Φυσικό εκκρεμές και το εκκρεμές στρέψης



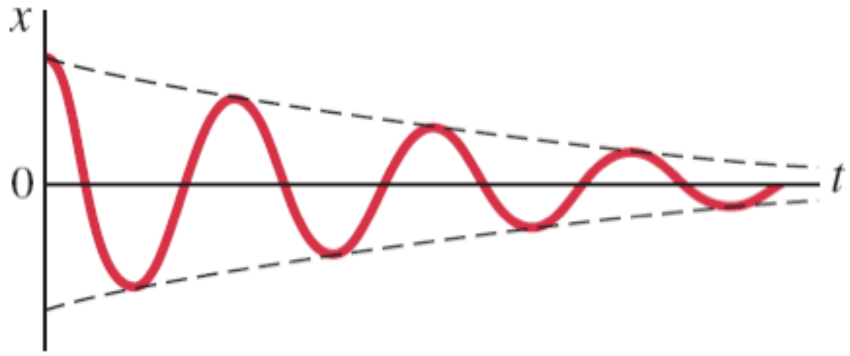
Το εκκρεμές στρέψης «στρίβει» αντί να «κουνιέται». Η κίνηση είναι αρμονική εφόσον το έλασμα (καλώδιο) ακολουθεί το νόμο του Hooke

$$\omega = \sqrt{K/I}.$$

(K είναι μια σταθερά του καλωδίου.)

14-7 Απόσβεση Αρμονικής Κίνησης

Όταν ασκούνται δυνάμεις τριβής ή αντίστασης η ταλάντωση αποσβένει, φθίνει, είναι φθίνουσα ή αποσβένουσα.



Εάν $$F_{\text{damping}} = -bv,$$

τότε $$ma = -kx - bv.$$

14-7 Απόσβεση Αρμονικής Κίνησης

επομένως $$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

εάν το b είναι μικρό τότε η λύση που προκύπτει είναι

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t$$

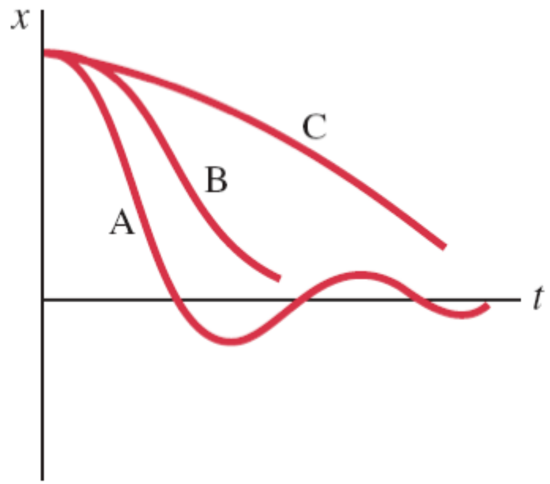
θέτουμε $$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}.$$

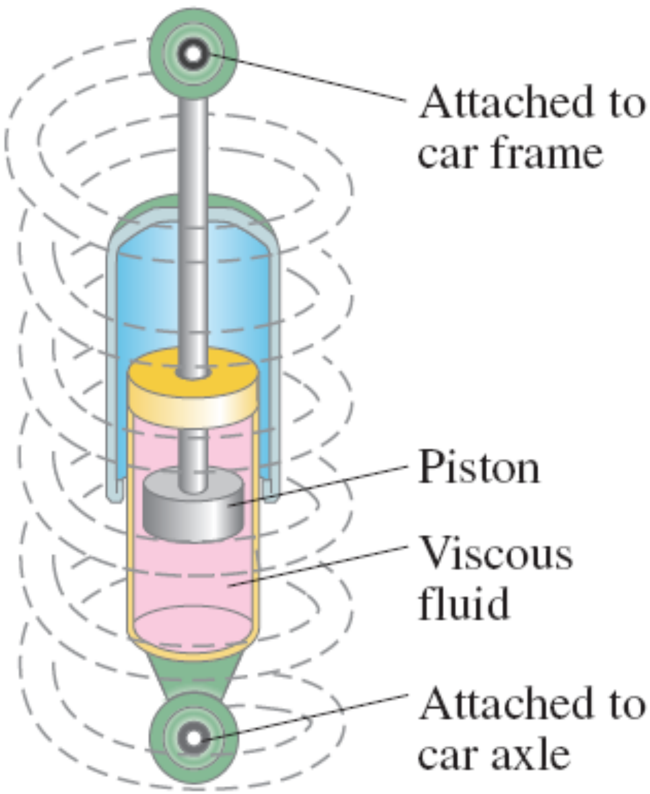
14-7 Απόσβεση Αρμονικής Κίνησης

Εάν $b^2 > 4mk$, ω' γίνεται φανταστική, και το σύστημα είναι overdamped (C) (μεγάλη απόσβεση).

Εάν $b^2 = 4mk$, το σύστημα είναι critically damped (κρίσιμη απόσβεση) (B) —όπου το σύστημα φτάνει στην κατάσταση ισορροπίας στο συντομότερο δυνατόν χρόνο.



14-7 Απόσβεση Αρμονικής Κίνησης

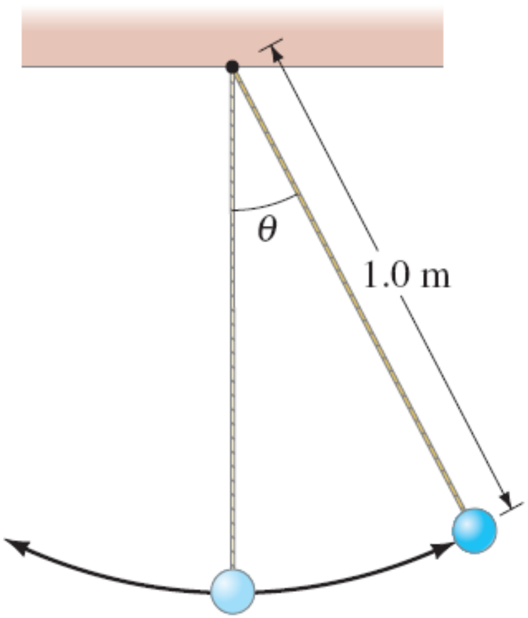


Υπάρχουν συστήματα όπου ο εφησυχασμός (relaxation) είναι ανεπιθύμητος, π.χ. τα ρολόγια.

Σε άλλες περιπτώσεις όπως τα αμορτισέρ του αυτοκινήτου, ή στην αντισεισμική θωράκιση των κτιρίων ,

ο εφησυχασμός είναι μέρος του σχεδιασμού.

14-7 Απόσβεση Αρμονικής Κίνησης



Ένα απλό εκκρεμές με μήκος 1.0 m, τίθεται σε κίνηση με μικρό πλάτος. 5.0 λεπτά αργότερα το πλάτος του είναι μόνο 50% του αρχικού. (a) Πόσο είναι το γ της ταλάντωσης (b) Πόσο μεταβάλλεται η συχνότητα f', από τη συχνότητα *f όταν η κ νηση δεν έχε απόσβεση;*

ΛΥΣΗ

APPROACH We assume the damping force is proportional to angular speed, $d\theta/dt$. The equation of motion for damped harmonic motion is

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t, \quad \text{where} \quad \gamma = \frac{b}{2m} \quad \text{and} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}},$$

for motion of a mass on the end of a spring. For the simple pendulum without damping, we saw in Section 14–5 that

$$F = -mg\theta$$

for small θ. Since $F = ma$, where a can be written in terms of the angular acceleration $\alpha = d^2\theta/dt^2$ as $a = \ell\alpha = \ell\, d^2\theta/dt^2$, then $F = m\ell\, d^2\theta/dt^2$, and

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0.$$

Introducing a damping term, $b(d\theta/dt)$, we have

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0,$$

which is the same as Eq. 14–15 with θ replacing x, and ℓ and g replacing m and k.

SOLUTION (*a*) We compare Eq. 14–15 with our equation just above and see that our equation $x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t$ becomes an equation for θ with

$$\gamma = \frac{b}{2\ell} \quad \text{and} \quad \omega' = \sqrt{\frac{g}{\ell} - \frac{b^2}{4\ell^2}}.$$

At $t = 0$, we rewrite Eq. 14–16 with θ replacing x as

$$\theta_0 = Ae^{-\gamma \cdot 0}\cos\omega' \cdot 0 = A.$$

Then at $t = 5.0\,\text{min} = 300\,\text{s}$, the amplitude given by Eq. 14–16 has fallen to $0.50\,A$, so

$$0.50A = Ae^{-\gamma(300\,\text{s})}.$$

We solve this for γ and obtain $\gamma = \ln 2.0/(300\,\text{s}) = 2.3 \times 10^{-3}\,\text{s}^{-1}$.

(*b*) We have $\ell = 1.0\,\text{m}$, so $b = 2\gamma\ell = 2(2.3 \times 10^{-3}\,\text{s}^{-1})(1.0\,\text{m}) = 4.6 \times 10^{-3}\,\text{m/s}$. Thus $(b^2/4\ell^2)$ is very much less than $g/\ell\,(= 9.8\,\text{s}^{-2})$, and the angular frequency of the motion remains almost the same as that of the undamped motion. Specifically (see Eq. 14–20),

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\left[1 - \frac{\ell}{g}\left(\frac{b^2}{4\ell^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\ell}{g}\left(\frac{b^2}{4\ell^2}\right)\right]$$

where we used the binomial expansion. Then, with $f = (1/2\,\pi)\sqrt{g/\ell}$ (Eq. 14–12b),

$$\frac{f - f'}{f} \approx \frac{1}{2}\frac{\ell}{g}\left(\frac{b^2}{4\ell^2}\right) = 2.7 \times 10^{-7}.$$

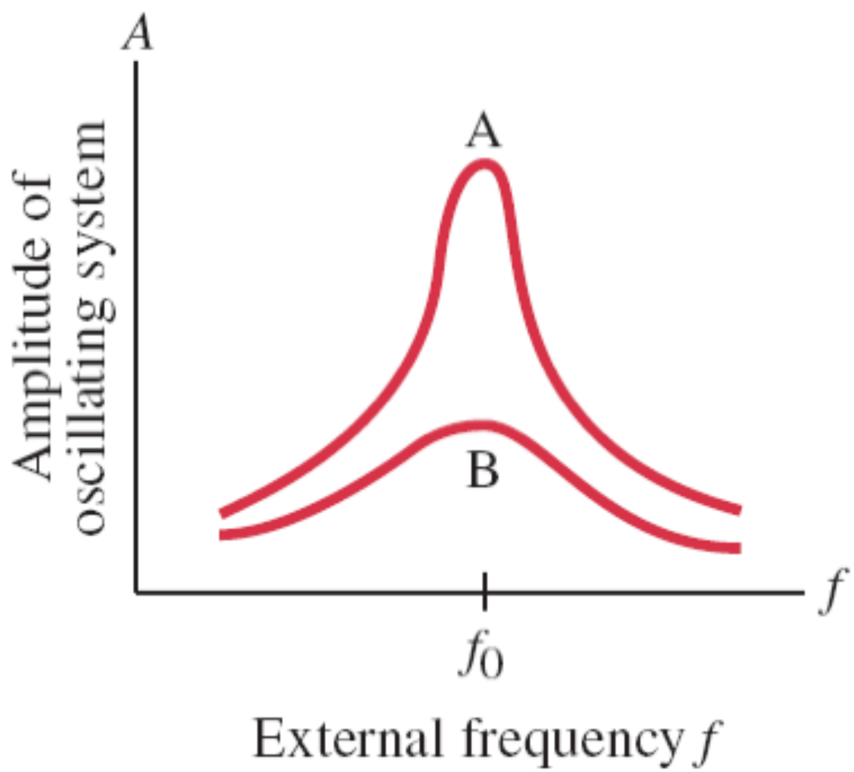
So f' differs from f by less than one part in a million.

14-8 Εξαναγκασμένη Ταλάντωση και Συντονισμός

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις παρατηρούνται όταν δρα πάνω στο σύστημα μια περιοδική δύναμη. Η συχνότητα της δύναμης δεν είναι απαραίτητα ίδια με την φυσική συχνότητα του συστήματος.

Όταν οι δύο συχνότητες ταυτιστούν μιλάμε για συντονισμό, και το πλάτος της ταλάντωσης μπορεί να πάρει τεράστιες τιμές.

14-8 Εξαναγκασμένη Ταλάντωση και Συντονισμός



Το **εύρος** της κορυφής του συντονισμού εξαρτάται από την απόσβεση. Εάν η **απόσβεση είναι μικρή** (A) έχουνε στενές κορυφές ενώ όταν η απόσβεση είναι **μεγάλη** (B) η κορυφή είναι πιο πλατιά.

Η λειτουργία ορισμένων συστημάτων βασίζεται στο συντονισμό όπως **Μουσικά όργανα και** ραδιόφωνα και τηλεοράσεις (μη καλωδιακές).

14-8 Εξαναγκασμένη Ταλάντωση και Συντονισμός

Η Εξίσωση κίνησης είναι:

$$ma = -kx - bv + F_0 \cos \omega t.$$

και η λύση της: $$x = A_0 \sin(\omega t + \phi_0),$$

όπου $$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}}$$

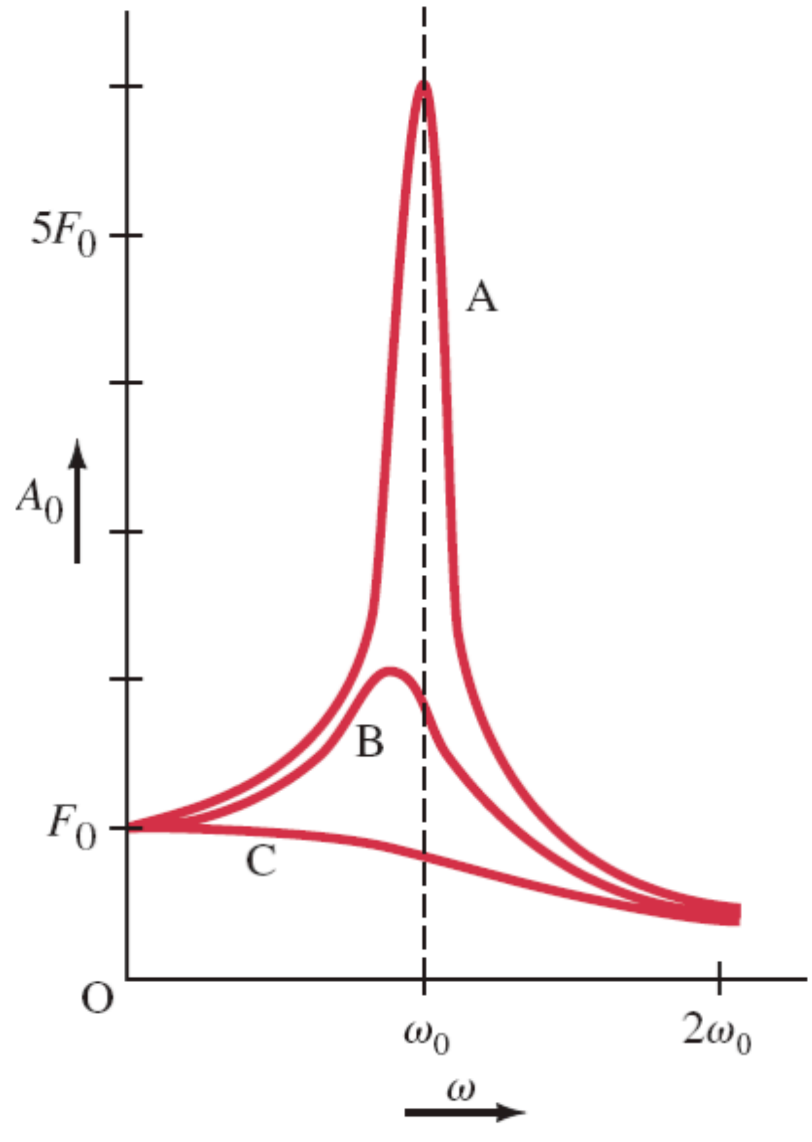
και

$$\phi_0 = \tan^{-1} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega(b/m)}.$$

14-8 Εξαναγκασμένη Ταλάντωση και Συντονισμός

Το εύρος της κορυφής συντονισμού χαρακτηρίζεται από τον παράγοντα Q :

$$Q = \frac{m\omega_0}{b}.$$



ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΗΜ-013 (ΦΥΣΙΚΗ Ι) ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ, 04-2013

Ποια θα έπρεπε να είναι η τιμή της βαρυτικής επιτάχυνσης στη Γη (g) έτσι ώστε εκκρεμές μήκους (L) ενός μέτρου να έχει περίοδο (T) 1 s;
Επειδή όμως η βαρυτική επιτάχυνση είναι $g = 9.80\ m/s^2$ πόσο πρέπει να είναι το μήκος του εκκρεμούς για την ίδια περίοδο;

Δίδεται $T = 2\pi/\omega = 2\pi(L/g)^{1/2}$