

ΜΑΘΗΜΑ-3

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1)$$

Βρείτε ποιο εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των παρακάτω διανυσμάτων είναι μηδέν.

$$\vec{a} = 3 \vec{i} + 2 \vec{j} - 7 \vec{k}$$

$$\vec{b} = 5 \vec{i} + 6 \vec{j} - 5 \vec{k} \quad (2)$$

$$\vec{c} = 2 \vec{i} + 4 \vec{j} + 2 \vec{k}$$

ΜΑΘΗΜΑ-3

Παράγωγοι Τροχιών

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k}$$

$$= \dot{x}(t) \vec{i} + \dot{y}(t) \vec{j} + \dot{z}(t) \vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2} \vec{k}$$

$$= \ddot{x}(t) \vec{i} + \ddot{y}(t) \vec{j} + \ddot{z}(t) \vec{k}$$

(3)

Παραδείγματα με Εξισώσεις Τροχιών

Παράγωγοι Τροχιάς - I

$$\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + t \vec{j} + t^4 \vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = 2t \vec{i} + \vec{j} + 4t^3 \vec{k} \quad (4)$$

$$\vec{a}(t) = 2 \vec{i} + 0 \vec{j} + 12t^2 \vec{k}$$

Παραδείγματα με Εξισώσεις Τροχιών

Παράγωγοι Τροχιάς - II

$$\vec{r}(t) = \sin(t) \vec{i} + \cos(t) \vec{j} + \tan(t) \vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = \cos(t) \vec{i} - \sin(t) \vec{j} + \frac{1}{\cos^2(t)} \vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = -\sin(t) \vec{i} - \cos(t) \vec{j} + 2 \frac{\tan(t)}{\cos^2(t)} \vec{k}$$

(5)

Παραδείγματα με Εξισώσεις Τροχιών

Παράγωγοι Τροχιάς - III

$$\vec{r}(t) = e^t \vec{i} + e^{t^2} \vec{j} + \log(t) \vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = e^t \vec{i} + 2te^{t^2} \vec{j} + \frac{1}{t} \vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = e^t \vec{i} + 2(1+2t^2)te^{t^2} \vec{j} - \frac{1}{t^2} \vec{k}$$

(6)

Ολοκληρώσεις Τροχιών

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= a_x(t) \vec{i} + a_y(t) \vec{j} + a_z(t) \vec{k} \\ \vec{v}(t) &= \int a_x(t) dt \vec{i} + \int a_y(t) dt \vec{j} + \int a_z(t) dt \vec{k} \\ &= v_x(t) \vec{i} + v_y(t) \vec{j} + v_z(t) \vec{k} \\ \vec{r}(t) &= \int v_x(t) dt \vec{i} + \int v_y(t) dt \vec{j} + \int v_z(t) dt \vec{k} \\ &= x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}\end{aligned}\tag{7}$$

Παραδείγματα με Εξισώσεις Τροχιών

Ολοκληρώματα Τροχιάς - I

$$\vec{a}(t) = 2 \vec{i} + 0 \vec{j} + 12t^2 \vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = 2t \vec{i} + c \vec{j} + 4t^3 \vec{k} \quad (8)$$

$$\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + ct \vec{j} + t^4 \vec{k}$$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ σε n - ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$$\vec{r}_1 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

$$\vec{r}_2 = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n)$$

$$\vec{r}_1 \bullet \vec{r}_2 = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \dots + x_{n-1}y_{n-1} + x_ny_n)$$

(9)

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ σε n - ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Παράγωγοι Τροχιών

$$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_{n-1}(t), x_n(t))$$

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_{n-1}(t)}{dt}, \frac{dx_n(t)}{dt} \right)$$

$$= (v_1(t), v_2(t), v_3(t), \dots, v_{n-1}(t), v_n(t))$$

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}, \frac{d^2x_2(t)}{dt^2}, \frac{d^2x_3(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^2x_{n-1}(t)}{dt^2}, \frac{d^2x_n(t)}{dt^2} \right)$$

$$= (a_1(t), a_2(t), a_3(t), \dots, a_{n-1}(t), a_n(t))$$

(10)