

Κεφάλαιο Τ4

Υπέρθωση και στάσιμα κύματα

Κύματα και σωματίδια

Τα κύματα είναι πολύ διαφορετικά από τα σωματίδια.

Τα σωματίδια έχουν μηδενικό μέγεθος.	Τα κύματα έχουν ένα χαρακτηριστικό μέγεθος – το μήκος κύματος.
Διαφορετικά σωματίδια καταλαμβάνουν διαφορετικά σημεία του χώρου.	Σε ένα σημείο, μέσα στο ίδιο μέσο διάδοσης, ενδέχεται να συνδυάζονται δύο ή περισσότερα κύματα – τα κύματα μπορούν να συνυπάρχουν στο ίδιο σημείο.

Κβάντωση

Όταν τα κύματα συνδυάζονται σε συστήματα που υπόκεινται σε οριακές συνθήκες, έχουν συγκεκριμένες συχνότητες.

- Λέμε ότι οι συχνότητες είναι *κβαντισμένες*.
- Η κβάντωση είναι μια θεμελιώδης έννοια της κβαντομηχανικής, η οποία εξετάζεται στη θεματική ενότητα της Σύγχρονης φυσικής.

Πολλά κβαντικά φαινόμενα εξηγούνται με την ανάλυση κυμάτων που υπόκεινται σε οριακές συνθήκες.

Θα χρησιμοποιήσουμε την κβάντωση για να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά διάφορων μουσικών οργάνων, τα οποία βασίζονται σε χορδές και στήλες αέρα.

Τα κύματα μπορούν να συνδυαστούν ακόμα και όταν έχουν διαφορετικές συχνότητες.

Αρχή της υπέρθεσης

Τα κύματα μπορούν να συνδυαστούν στην ίδια θέση του χώρου.

Μπορούμε να αναλύουμε τέτοιους συνδυασμούς κυμάτων χρησιμοποιώντας την **αρχή της υπέρθεσης** (ή **αρχή της επαλληλίας**):

Αν σε ένα μέσο διαδίδονται δύο ή περισσότερα κύματα, η συνισταμένη τιμή της κυματοσυνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών των κυματοσυναρτήσεων των επιμέρους κυμάτων.

Τα κύματα που ακολουθούν αυτή την αρχή ονομάζονται γραμμικά.

- Στην περίπτωση των μηχανικών κυμάτων, τα γραμμικά κύματα συχνά έχουν πλάτος πολύ μικρότερο από το μήκος τους.

Υπέρθωση και συμβολή

Δύο οδεύοντα κύματα μπορούν να περάσουν το ένα μέσα από το άλλο χωρίς να αλλοιωθούν.

- Αυτή είναι μία από τις συνέπειες της αρχής της υπέρθεσης.

Όταν στην ίδια περιοχή του χώρου συνδυάζονται δύο διαφορετικά κύματα και παράγουν ένα συνιστάμενο κύμα, το φαινόμενο ονομάζεται **συμβολή**.

- Ο όρος συμβολή έχει πολύ συγκεκριμένη σημασία στη φυσική.
- Σημαίνει ότι τα κύματα περνούν το ένα μέσα από το άλλο.

Παράδειγμα υπέρθεσης

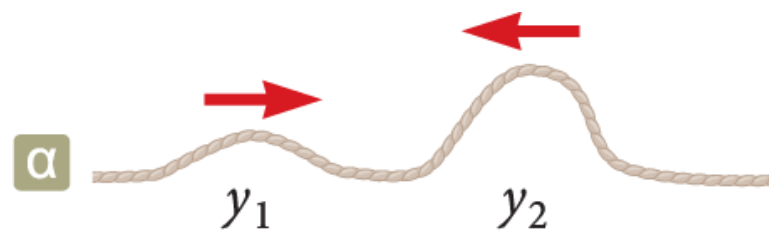
Δύο παλμοί διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις (α).

- Η κυματοσυνάρτηση του παλμού που κινείται προς τα δεξιά είναι η y_1 και η κυματοσυνάρτηση του παλμού που κινείται προς τα αριστερά είναι η y_2 .

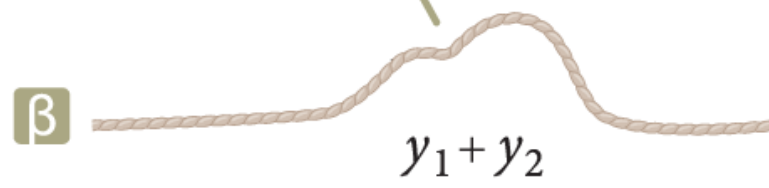
Οι παλμοί έχουν ίδιο μέτρο ταχύτητας, αλλά διαφορετικά σχήματα.

Η μετατόπιση των στοιχείων του μέσου είναι θετική και για τους δύο παλμούς.

Όταν οι παλμοί αρχίζουν να επικαλύπτονται (β), η συνισταμένη κυματοσυνάρτηση είναι $y_1 + y_2$.



Όταν οι παλμοί επικαλύπτονται, η κυματοσυνάρτηση είναι το άθροισμα των επιμέρους κυματοσυναρτήσεων.



Παράδειγμα υπέρθεσης (συνέχεια)

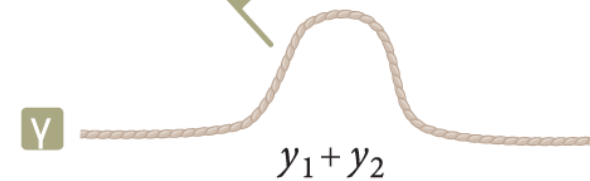
Όταν συναντώνται οι κορυφές των παλμών (γ), ο συνιστάμενος παλμός έχει μεγαλύτερο πλάτος από εκείνο των αρχικών παλμών.

Οι δύο παλμοί χωρίζονται (δ).

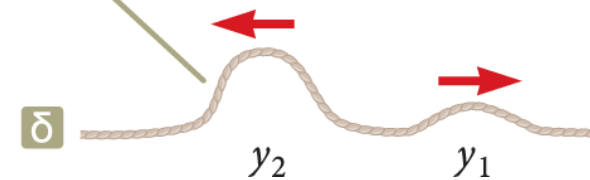
- Συνεχίζουν να κινούνται προς την αρχική τους κατεύθυνση.
- Το σχήμα τους παραμένει αμετάβλητο.

Αυτό το είδος υπέρθεσης ονομάζεται **ενισχυτική συμβολή**.

Όταν οι κορυφές των δύο παλμών ευθυγραμμίζονται, το πλάτος του συνιστάμενου παλμού ισούται με το άθροισμα των επιμέρους πλατών.



Όταν οι παλμοί δεν επικαλύπτονται πλέον, το σχήμα τους είναι ίδιο με το αρχικό και δεν έχει επηρεαστεί μόνιμα από τη συμβολή.



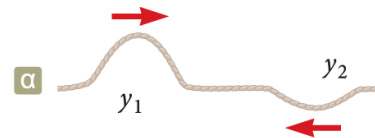
Παράδειγμα καταστρεπτικής συμβολής

Δύο παλμοί διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Ο ένας παλμός είναι ανεστραμμένος σε σχέση με τον άλλο.

Όταν οι παλμοί επικαλύπτονται, η συνισταμένη κυματοσυνάρτηση είναι $y_1 + y_2$.

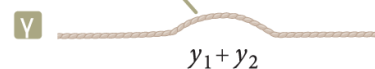
Αυτό το είδος υπέρθεσης ονομάζεται **καταστρεπτική συμβολή**.



Όταν οι παλμοί επικαλύπτονται, η κυματοσυνάρτηση είναι το άθροισμα των επιμέρους κυματοσυναρτήσεων.



Όταν οι κορυφές των δύο παλμών ευθυγραμμίζονται, το πλάτος του συνιστάμενου παλμού ισούται με τη διαφορά μεταξύ των επιμέρους πλατών.



Όταν οι παλμοί δεν επικαλύπτονται πλέον, το σχήμα τους είναι ίδιο με το αρχικό και δεν έχει επηρεαστεί μόνιμα από τη συμβολή.



Είδη συμβολής – Σύνοψη

Ενισχυτική συμβολή συμβαίνει όταν οι μετατοπίσεις που προκαλούν οι δύο παλμοί έχουν την ίδια κατεύθυνση.

- Το πλάτος του συνιστάμενου παλμού είναι μεγαλύτερο από το πλάτος των επιμέρους παλμών.

Καταστρεπτική συμβολή συμβαίνει όταν οι μετατοπίσεις που προκαλούν οι δύο παλμοί έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.

- Το πλάτος του συνιστάμενου παλμού είναι μικρότερο από το πλάτος των επιμέρους παλμών.

Μοντέλο ανάλυσης

Στην αρχή της υπέρθεσης βασίζεται το μοντέλο ανάλυσης της **συμβολής κυμάτων**.

Βρίσκει εφαρμογή σε πολλές περιπτώσεις.

- Προκαλούνται ενδιαφέροντα φαινόμενα με πρακτικές εφαρμογές

Υπέρθωση ημιτονοειδών κυμάτων

Υποθέτουμε ότι δύο κύματα διαδίδονται προς την ίδια κατεύθυνση σε ένα γραμμικό μέσο, και έχουν ίδια συχνότητα, μήκος, και πλάτος.

Μόνο η φάση τους είναι διαφορετική:

- $y_1 = A \sin(kx - \omega t)$
- $y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi)$
- $y = y_1 + y_2 = 2A \cos(\phi/2) \sin(kx - \omega t + \phi/2)$

Η συνισταμένη κυματοσυνάρτηση y είναι επίσης ημιτονοειδής.

Το συνιστάμενο κύμα έχει ίδια συχνότητα και μήκος κύματος με τα αρχικά κύματα.

Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι $2A \cos(\phi/2)$.

Η φάση του συνισταμένου κύματος είναι $\phi/2$.

Ενισχυτική συμβολή ημιτονοειδών κυμάτων

Όταν $\phi = 0$, τότε $\cos(\phi/2) = 1$.

Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι $2A$.

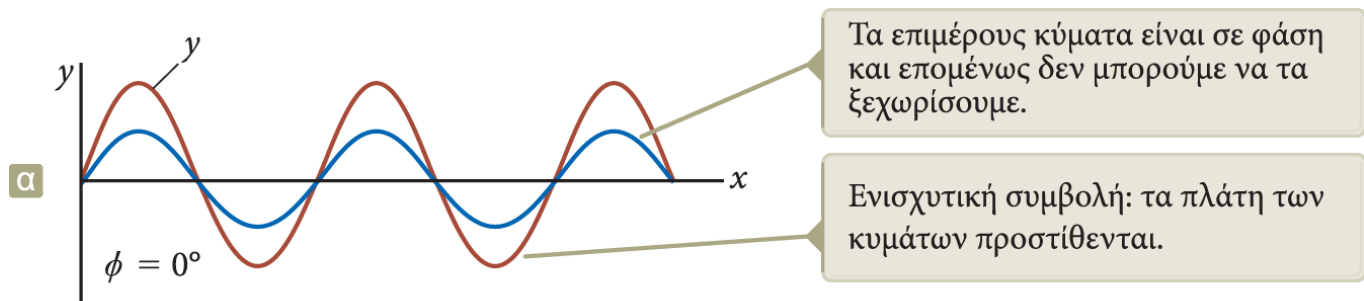
- Οι κορυφές των δύο κυμάτων αντιστοιχούν στα ίδια σημεία του χώρου.

Τα κύματα βρίσκονται παντού σε φάση.

Τα κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά.

Γενικά, ενισχυτική συμβολή παρατηρείται όταν $\cos(\phi/2) = \pm 1$.

- Δηλαδή, όταν $\phi = 0, \pi, 2\pi, \dots$ rad.
 - Η γωνία ϕ είναι άρτιο πολλαπλάσιο του π .



Καταστρεπτική συμβολή ημιτονοειδών κυμάτων

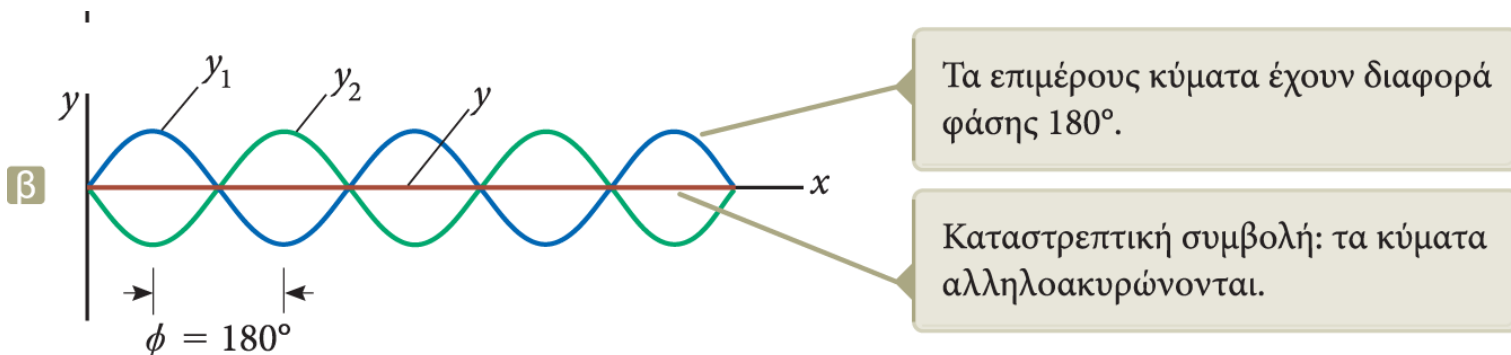
Όταν $\phi = \pi$, τότε $\cos(\phi/2) = 0$.

- Το ίδιο ισχύει όταν η γωνία ισούται με οποιοδήποτε περιττό πολλαπλάσιο του π .

Το συνιστάμενο κύμα έχει μηδενικό πλάτος.

- Δείτε την καφέ ευθεία στην εικόνα.

Τα κύματα συμβάλλουν καταστρεπτικά.

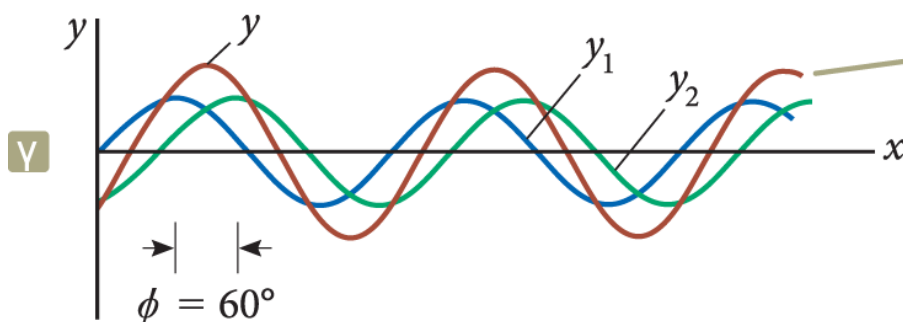


Ημιτονοειδή κύματα, γενική συμβολή

Όταν η γωνία ϕ δεν είναι μηδενική ή ισούται με κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο του π , το συνιστάμενο κύμα έχει πλάτος μεταξύ 0 και $2A$.

Και σε αυτή την περίπτωση, οι κυματοσυναρτήσεις αθροίζονται.

Η συμβολή δεν είναι ούτε ενισχυτική ούτε καταστρεπτική.



Συμβολή ημιτονοειδών κυμάτων – Σύνοψη

Ενισχυτική συμβολή παρατηρείται όταν $\phi = n\pi$, όπου το n είναι άρτιος ακέραιος (συμπεριλαμβανομένου του 0).

- Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι $2A$.

Καταστρεπτική συμβολή παρατηρείται όταν $\phi = n\pi$, όπου το n είναι περιττός ακέραιος.

- Το πλάτος είναι 0.

Η γενική συμβολή παρατηρείται όταν $0 < \phi < n\pi$.

- Για το πλάτος του συνισταμένου κύματος ισχύει $0 < A_{\text{συν.}} < 2A$

Συμβολή ημιτονοειδών κυμάτων με διαφορετικό πλάτος

Ενισχυτική συμβολή παρατηρείται όταν $\phi = n\pi$, όπου το n είναι άρτιος ακέραιος (συμπεριλαμβανομένου του 0).

- Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι ίσο με το άθροισμα του πλάτους των κυμάτων.

Η καταστρεπτική συμβολή παρατηρείται όταν $\phi = n\pi$, όπου το n είναι περιττός ακέραιος.

- Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι μικρότερο, αλλά τα κύματα δεν αλληλοαναιρούνται πλήρως.

Συμβολή ηχητικών κυμάτων

Ο ήχος ενός ηχείου S μπορεί να φτάσει στον δέκτη R μέσω δύο διαφορετικών διαδρομών.

Η απόσταση του δέκτη από το ηχείο κατά μήκος οποιαδήποτε διαδρομής ονομάζεται **μήκος διαδρομής r** .

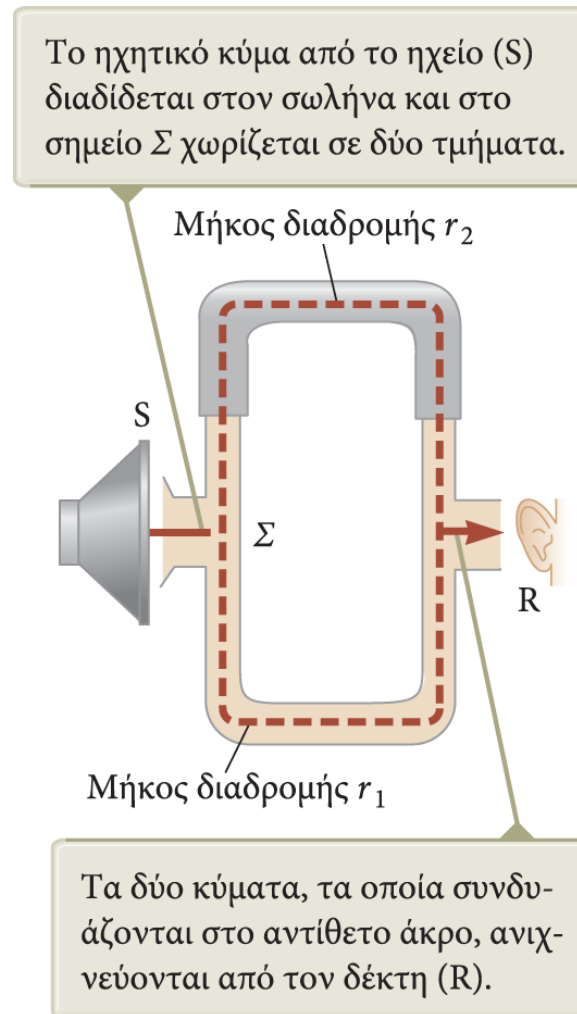
Το μήκος r_1 της κάτω διαδρομής είναι σταθερό.

Το μήκος r_2 της άνω διαδρομής μπορεί να μεταβληθεί.

Όταν $\Delta r = |r_2 - r_1| = n\lambda$, παρατηρείται ενισχυτική συμβολή.

- $n = 0, 1, \dots$

Ο δέκτης θα καταγράψει μέγιστη ένταση του ήχου.



Συμβολή ηχητικών κυμάτων (2)

Όταν $\Delta r = |r_2 - r_1| = (n\lambda)/2$ (για περιττές τιμές του n), συμβαίνει καταστρεπτική συμβολή.

Ο δέκτης δεν ανιχνεύει ήχο.

Όταν δύο κύματα από την ίδια πηγή ακολουθούν διαδρομές διαφορετικού μήκους, μπορεί να αποκτήσουν διαφορά φάσης.

Στάσιμα κύματα

Υποθέτουμε ότι δύο κύματα με ίδιο πλάτος, συχνότητα, και μήκος διαδίδονται στο ίδιο μέσο προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Τα κύματα συνδυάζονται σύμφωνα με το μοντέλο της συμβολής κυμάτων.

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \text{ και}$$

$$y_2 = A \sin(kx + \omega t)$$

Συμβάλλουν σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης.



Στάσιμα κύματα (συνέχεια)

Το συνιστάμενο κύμα είναι $y = (2A \sin kx) \cos \omega t$.

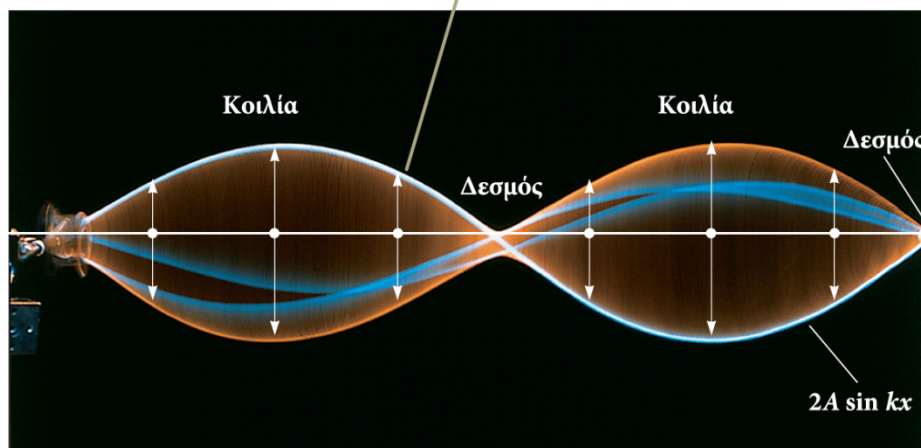
Αυτή η εξίσωση είναι η κυματοσυνάρτηση ενός στάσιμου κύματος.

- Δεν περιέχει κάποιον όρο $kx - \omega t$, οπότε δεν περιγράφει οδεύον κύμα.

Όταν παρατηρούμε ένα στάσιμο κύμα, δεν αντιλαμβανόμαστε καμία κίνηση στην κατεύθυνση διάδοσης κάποιου από τα αρχικά κύματα.

Παράδειγμα στάσιμου κύματος

Το πλάτος της κατακόρυφης ταλάντωσης οποιουδήποτε στοιχείου της χορδής εξαρτάται από την οριζόντια θέση του. Κάθε στοιχείο ταλαντώνεται μέσα στα όρια της περιβάλλουσας συνάρτησης $2A \sin kx$.



Προσέξτε το στάσιμο περίγραμμα που προκύπτει από την υπέρθεση δύο πανομοιότυπων κυμάτων που διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης κάθε στοιχείου είναι $2A \sin kx$.

- Εξαρτάται από τη θέση x του στοιχείου στο μέσο.

Κάθε στοιχείο εκτελεί ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω .

Σημείωση σχετικά με το πλάτος

Για να περιγράψουμε τα κύματα, χρησιμοποιούμε τρία είδη πλάτους.

- Το πλάτος των επιμέρους κυμάτων, A .
- Το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης των στοιχείων του μέσου διάδοσης.
 - Είναι ίσο με $2A \sin kx$.
 - Κάθε στοιχείο του στάσιμου κύματος ταλαντώνεται στο πλαίσιο της περιβάλλουσας συνάρτησης $2A \sin kx$.
- Το πλάτος του στάσιμου κύματος, $2A$

Στάσιμα κύματα, ορισμοί

Τα σημεία μηδενικού πλάτους ονομάζονται **δεσμοί** ή **κόμβοι**.

- Αντιστοιχούν σε τιμές του x που ικανοποιούν τη σχέση

$$x = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \kappa$$

Τα σημεία του μέσου στα οποία παρατηρείται μέγιστη μετατόπιση $2A$ ονομάζονται **κοιλίες** ή **αντιδεσμοί**.

- Αντιστοιχούν σε τιμές του x που ικανοποιούν τη σχέση

$$x = \frac{n\lambda}{4} \quad n = 1, 3, 5, \kappa$$

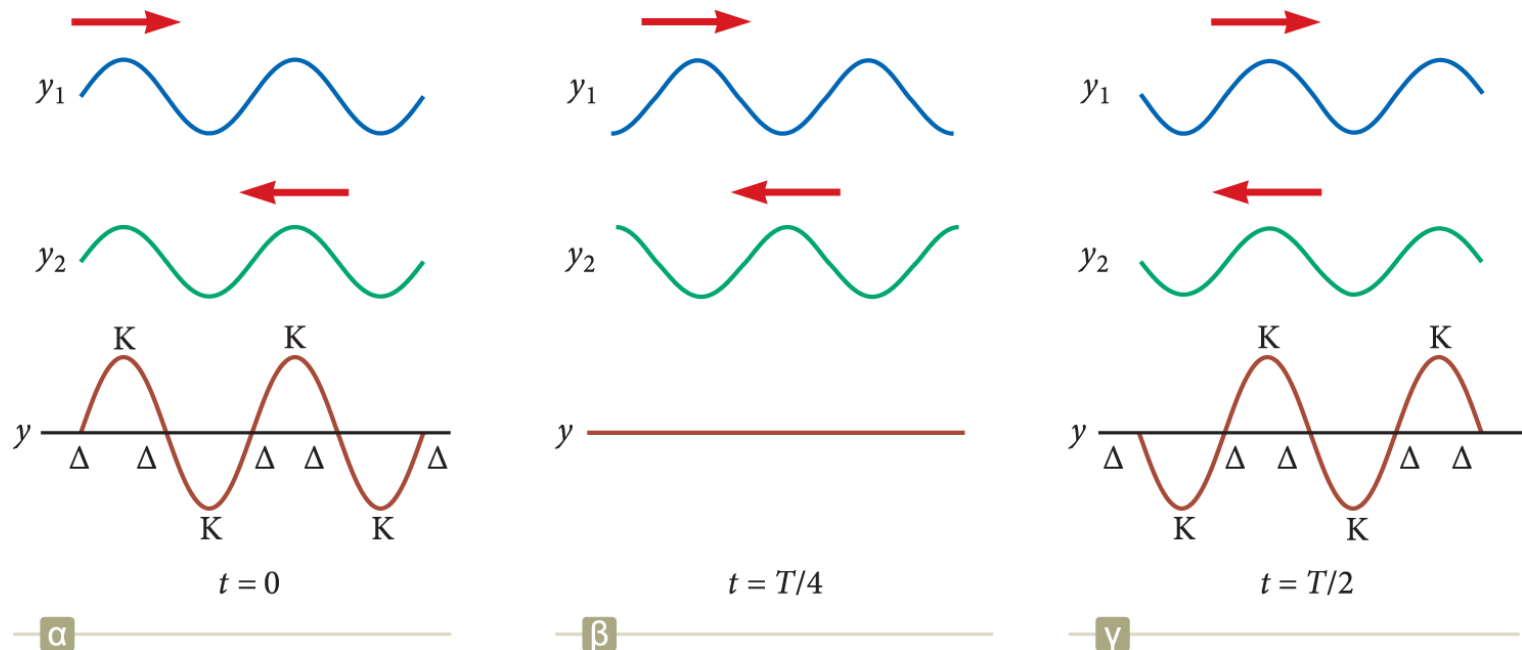
Χαρακτηριστικά των δεσμών και των κοιλιών

Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών κοιλιών είναι ίση με $\lambda/2$.

Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών δεσμών είναι ίση με $\lambda/2$.

Η απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της επόμενης κοιλίας είναι ίση με $\lambda/4$.

Δεσμοί και κοιλίες (συνέχεια)



Στα παραπάνω διαγράμματα απεικονίζονται τα στάσιμα κύματα που δημιουργούν σε διάφορες χρονικές στιγμές δύο κύματα ίδιου πλάτους, τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Σε ένα στάσιμο κύμα, τα στοιχεία του μέσου εναλλάσσονται μεταξύ των ακραίων θέσεων που φαίνονται στα διαγράμματα (α) και (γ).

Δημιουργία στάσιμων κυμάτων σε χορδές

Ας θεωρήσουμε μια χορδή (ή ένα νήμα), η οποία είναι στερεωμένη στα δύο άκρα της.

Η χορδή έχει μήκος L .

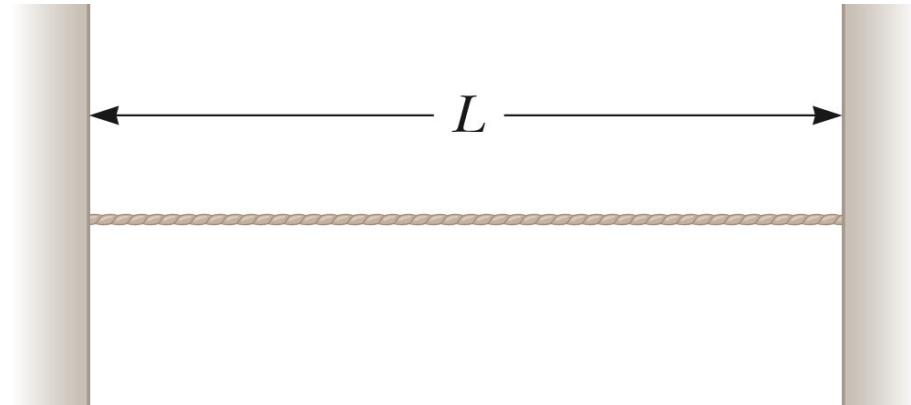
Τα κύματα διαδίδονται μέσω της χορδής και προς τις δύο κατευθύνσεις.

Επομένως, η συνεχής υπέρθεση των κυμάτων που προσπίπτουν και ανακλώνται στα άκρα δημιουργεί στάσιμα κύματα στη χορδή.

Τα κύματα που δημιουργούνται όμως υπόκεινται σε μια οριακή συνθήκη.

Τα άκρα της χορδής είναι υποχρεωτικά δεσμοί.

- Τα άκρα είναι ακίνητα, οπότε η μετατόπισή τους πρέπει να είναι μηδενική.



Δημιουργία στάσιμων κυμάτων σε χορδές (2)

Λόγω αυτής της οριακής συνθήκης, η χορδή έχει πεπερασμένο πλήθος φυσικών κυματομορφών, οι οποίες ονομάζονται **κανονικοί τρόποι ταλάντωσης** ή **ιδιομορφές**.

- Κάθε κανονικός τρόπος ταλάντωσης έχει μία χαρακτηριστική συχνότητα.
 - Η κατάσταση κατά την οποία υπάρχουν μόνο ορισμένες συχνότητες ταλάντωσης ονομάζεται **κβάντωση**.
- Μπορούμε να περιγράψουμε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης μιας χορδής επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες ότι τα άκρα πρέπει να είναι δεσμοί, και ότι οι δεσμοί και οι κοιλίες πρέπει να απέχουν απόσταση ίση με το ένα τέταρτο του μήκους κύματος μεταξύ τους.

Θα ορίσουμε το μοντέλο ανάλυσης των **κυμάτων που υπόκεινται σε οριακές συνθήκες**.

Δημιουργία στάσιμων κυμάτων σε χορδές (3)

Αυτός είναι ο πρώτος κανονικός τρόπος ταλάντωσης που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες.

Στα δύο άκρα της χορδής υπάρχουν δεσμοί.

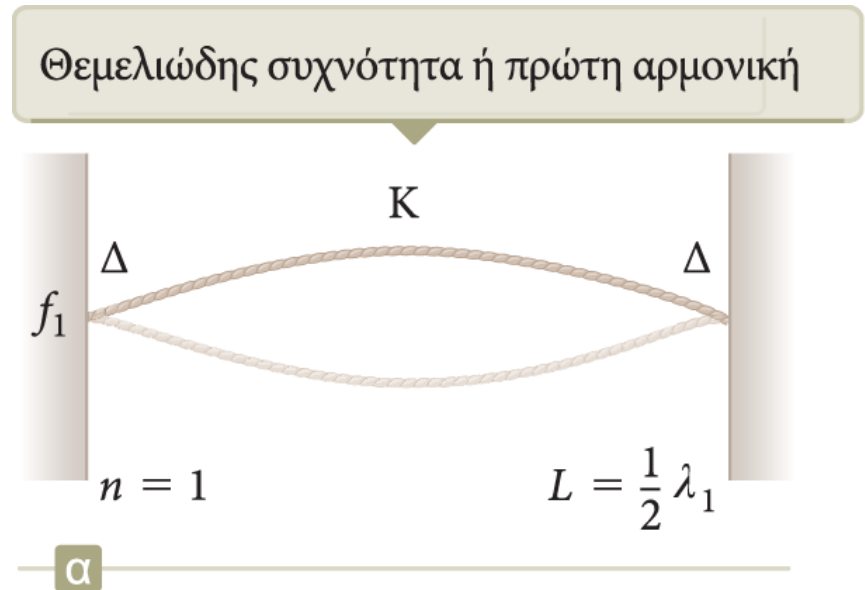
Στο μέσο της χορδής υπάρχει μία κοιλιά.

Ο συγκεκριμένος κανονικός τρόπος ταλάντωσης έχει το μέγιστο μήκος κύματος:

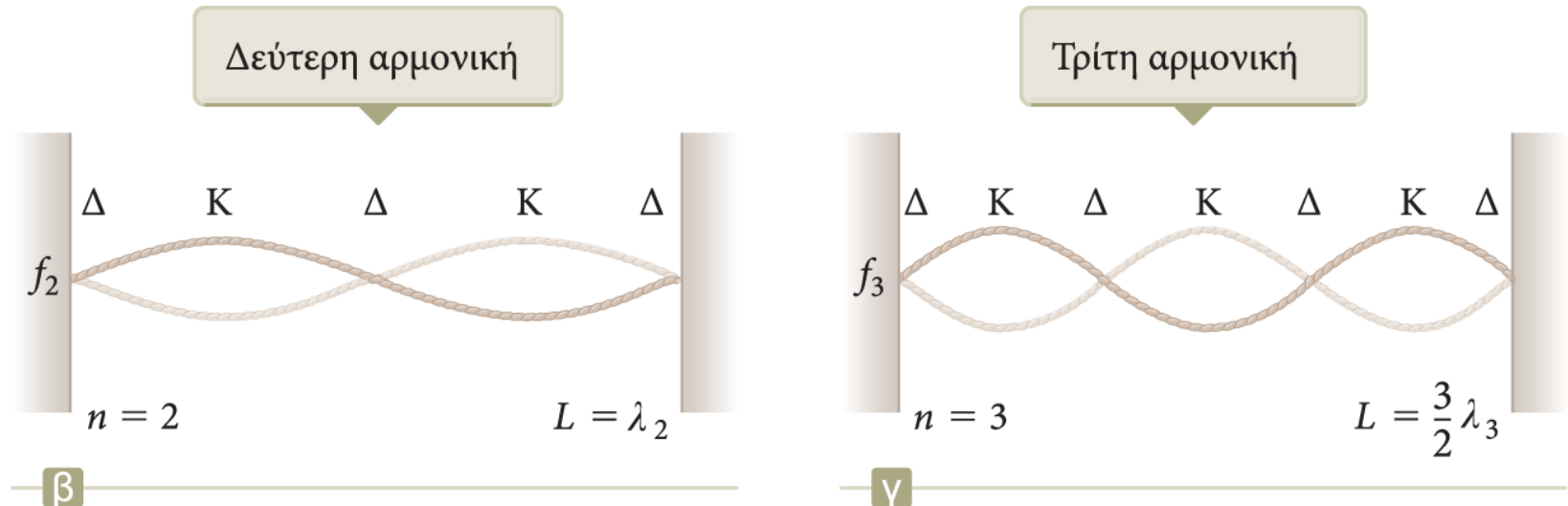
- $\frac{1}{2}\lambda_1 = L$ άρα $\lambda_1 = 2L$

Το τμήμα του στάσιμου κύματος μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ονομάζεται βρόχος.

Στον πρώτο κανονικό τρόπο ταλάντωσης, η χορδή σχηματίζει έναν βρόχο καθώς ταλαντώνεται.



Δημιουργία στάσιμων κυμάτων σε χορδές (4)



Κάθε επόμενος κανονικός τρόπος ταλάντωσης έχει έναν επιπλέον βρόχο από τον προηγούμενο.

- Το τμήμα του στάσιμου κύματος μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ονομάζεται βρόχος. Ο δεύτερος κανονικός τρόπος ταλάντωσης (β) αντιστοιχεί στην περίπτωση $\lambda = L$. Ο τρίτος κανονικός τρόπος ταλάντωσης (γ) αντιστοιχεί στην περίπτωση $\lambda = 2L/3$.

Δημιουργία στάσιμων κυμάτων σε χορδές – Σύνοψη

Το μήκος κύματος των κανονικών τρόπων ταλάντωσης μιας χορδής μήκους L με σταθερά άκρα είναι $\lambda_n = 2L/n$, όπου $n = 1, 2, 3, \dots$

- Ο δείκτης n αντιστοιχεί στον n -οστό κανονικό τρόπο ταλάντωσης.
- Αυτοί είναι οι δυνατοί κανονικοί τρόποι ταλάντωσης της χορδής.

Οι ιδιοσυχνότητες δίνονται από τη σχέση

$$f_n = n \frac{v}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- Είναι γνωστές και ως κβαντισμένες συχνότητες.

Κύματα που διαδίδονται σε χορδές, αρμονική σειρά

Η **θεμελιώδης συχνότητα** προκύπτει για τον πρώτο κανονικό τρόπο ταλάντωσης, δηλαδή για $n = 1$.

- Είναι η χαμηλότερη συχνότητα f_1 .

Οι συχνότητες των υπόλοιπων κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.

- $f_n = nf_1$

Αυτές οι συχνότητες σχηματίζουν μια **αρμονική σειρά**.

Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης ονομάζονται **αρμονικές**.

Μουσικές νότες που παράγονται σε χορδές

Μια μουσική νότα καθορίζεται από τη θεμελιώδη συχνότητά της.

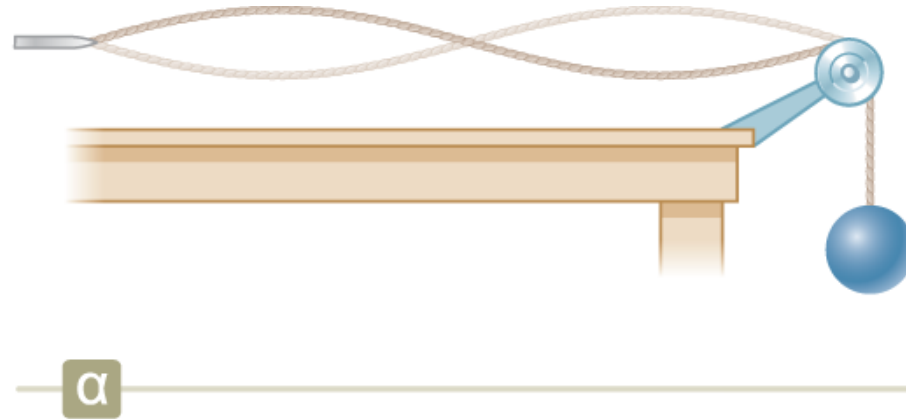
Μπορούμε να μεταβάλλουμε τη συχνότητα μιας χορδής μεταβάλλοντας είτε την τάση της είτε το μήκος της.

Αρμονικές – Παράδειγμα

Η μεσαία χορδή Ντο ενός πιάνου έχει θεμελιώδη συχνότητα 262 Hz. Ποιες είναι οι επόμενες δύο αρμονικές της χορδής;

- $f_1 = 262 \text{ Hz}$
- $f_2 = 2f_1 = 524 \text{ Hz}$
- $f_3 = 3f_1 = 786 \text{ Hz}$

Δημιουργία στάσιμου κύματος σε χορδή – Παράδειγμα



Το ένα άκρο της χορδής είναι στερεωμένο σε ένα έλασμα που ταλαντώνεται.

Το άλλο άκρο διέρχεται από μια τροχαλία. Από το άκρο του νήματος κρέμεται μια σφαίρα.

- Η αναρτημένη σφαίρα προκαλεί τάση στο νήμα.

Το νήμα ταλαντώνεται στη δεύτερη αρμονική του.

Συντονισμός

Ένα σύστημα μπορεί να ταλαντώνεται με έναν ή περισσότερους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Ας υποθέσουμε ότι θέτουμε μια χορδή σε κίνηση με ένα έλασμα που ταλαντώνεται.

Αν ασκήσουμε μια περιοδική δύναμη σε ένα τέτοιο σύστημα, το πλάτος της επακόλουθης κίνησης του νήματος είναι μέγιστο όταν η συχνότητα εφαρμογής της δύναμης είναι ίση με μία από τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος.

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **συντονισμός**.

Όταν το έλασμα διεγείρεται σε με μία από τις ιδιοσυχνότητες της χορδής, δημιουργούνται στάσιμα κύματα μεγάλου πλάτους.



Έλασμα που ταλαντώνεται

Συντονισμός (συνέχεια)

Επειδή το πλάτος της ταλάντωσης είναι μεγάλο όταν ένα σύστημα διεγείρεται σε κάποια από τις ιδιοσυχνότητές του, αυτές αναφέρονται συχνά και ως **συχνότητες συντονισμού**.

Αν το νήμα δεν ταλαντώνεται με μία από τις ιδιοσυχνότητές του, οι ταλαντώσεις έχουν μικρό πλάτος και μεταβλητό σχήμα.

Στάσιμα κύματα σε στήλες αέρα

Σε στήλες αέρα μπορούν να δημιουργηθούν στάσιμα κύματα εξαιτίας της συμβολής διαμήκων ηχητικών κυμάτων που διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Η διαφορά φάσης μεταξύ του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος εξαρτάται από το αν ο σωλήνας έχει ανοιχτά ή κλειστά άκρα.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το μοντέλο των κυμάτων που υπόκεινται σε οριακές συνθήκες.

Στάσιμα κύματα σε στήλες αέρα, κλειστό άκρο

Το κλειστό άκρο ενός σωλήνα είναι δεσμός μετατόπισης στο στάσιμο κύμα.

- Το άκαμπτο φράγμα στο συγκεκριμένο άκρο δεν επιτρέπει τη διαμήκη κίνηση του αέρα.

Το κλειστό άκρο αντιστοιχεί σε κοιλία πίεσης.

- Πρόκειται για ένα σημείο μέγιστης μεταβολής της πίεσης.
- Το κύμα πίεσης έχει διαφορά φάσης 90° από το κύμα μετατόπισης.

Στάσιμα κύματα σε στήλες αέρα, ανοιχτό άκρο

Το ανοιχτό άκρο ενός σωλήνα είναι κοιλία μετατόπισης στο στάσιμο κύμα.

- Καθώς το πύκνωμα εξέρχεται από το ανοιχτό άκρο του σωλήνα, δεν υπάρχει πλέον ο περιορισμός του σωλήνα, οπότε ο συμπιεσμένος αέρας μπορεί να εκτονωθεί ελεύθερα στην ατμόσφαιρα.

Το ανοιχτό άκρο αντιστοιχεί σε δεσμό πίεσης.

- Πρόκειται για ένα σημείο στο οποίο η πίεση είναι σταθερή.

Στάσιμα κύματα σε σωλήνα με ανοιχτά άκρα

Τα δύο άκρα είναι κοιλίες μετατόπισης.

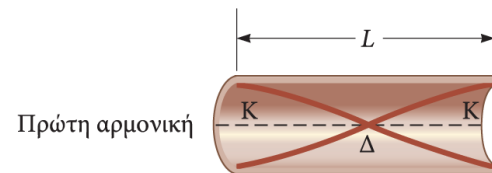
Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $v/2L$.

- Αυτό αντιστοιχεί στην πρώτη εικόνα.

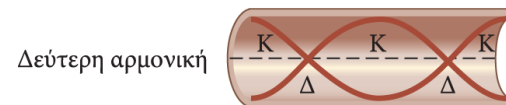
Οι συχνότητες των υψηλότερων αρμονικών δίνονται από τη σχέση $f_n = nf_1 = n(v/2L)$, όπου $n = 1, 2, 3, \dots$

Σε έναν σωλήνα με ανοιχτά άκρα, οι ιδιοσυχνότητες της ταλάντωσης συνιστούν μια αρμονική σειρά, η οποία περιλαμβάνει όλα τα ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.

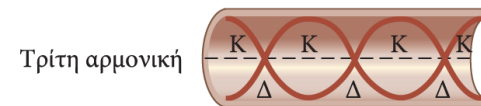
Σε έναν σωλήνα με ανοιχτά άκρα, τα άκρα είναι κοιλίες μετατόπισης και η αρμονική σειρά περιλαμβάνει όλα τα ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.



$$\lambda_1 = 2L$$
$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$$



$$\lambda_2 = L$$
$$f_2 = \frac{v}{L} = 2f_1$$



$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$$
$$f_3 = \frac{3v}{2L} = 3f_1$$

α

Στάσιμα κύματα σε σωλήνα με ένα κλειστό άκρο

Το κλειστό άκρο είναι δεσμός μετατόπισης.

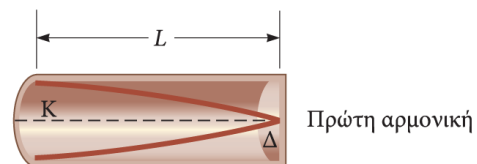
Το ανοιχτό άκρο είναι κοιλία μετατόπισης.

Το στάσιμο κύμα για τον θεμελιώδη τρόπο ταλάντωσης καλύπτει απόσταση $\frac{1}{4}\lambda$.

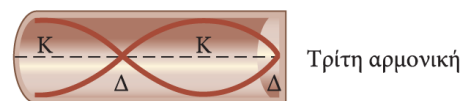
Οι συχνότητες των υψηλότερων αρμονικών δίνονται από τη σχέση $f_n = nf = n(v/4L)$, όπου $n = 1, 3, 5, \dots$

Σε έναν σωλήνα με ένα κλειστό άκρο, οι ιδιοσυχνότητες της ταλάντωσης συνιστούν μια αρμονική σειρά, η οποία περιλαμβάνει μόνο τα περιττά ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.

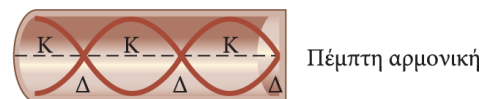
Σε έναν σωλήνα με ένα κλειστό άκρο, το ανοιχτό άκρο είναι κοιλία μετατόπισης και το κλειστό άκρο είναι δεσμός. Η αρμονική σειρά περιλαμβάνει μόνο τα περιττά ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.



$$\lambda_1 = 4L$$
$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4L}$$



$$\lambda_3 = \frac{4}{3}L$$
$$f_3 = \frac{3v}{4L} = 3f_1$$



$$\lambda_5 = \frac{4}{5}L$$
$$f_5 = \frac{5v}{4L} = 5f_1$$

Σημείωση σχετικά με τα μουσικά όργανα

Καθώς η θερμοκρασία αυξάνεται:

- Οι ήχοι που παράγουν οι στήλες αέρα γίνονται οξύτεροι.
 - Έχουν υψηλότερη συχνότητα.
 - Η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση της ταχύτητας του ήχου.
- Οι ήχοι που παράγουν οι χορδές γίνονται πιο βαθείς.
 - Έχουν χαμηλότερη συχνότητα.
 - Η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί διαστολή των χορδών.
 - Καθώς οι χορδές διαστέλλονται, η τάση τους μειώνεται.

Μουσικά όργανα (συνέχεια)

Γενικά, τα μουσικά όργανα που βασίζονται σε στήλες αέρα διεγείρονται με συντονισμό.

Η στήλη αέρα δέχεται ένα ηχητικό κύμα με πολλές συχνότητες.

Ο ήχος προέρχεται:

- Στα ξύλινα πνευστά, από μια γλωττίδα που ταλαντώνεται.
- Στα χάλκινα πνευστά, από την ταλάντωση των χειλέων του εκτελεστή.
- Στο φλάουτο, από το φύσημα στο επιστόμιο του οργάνου.

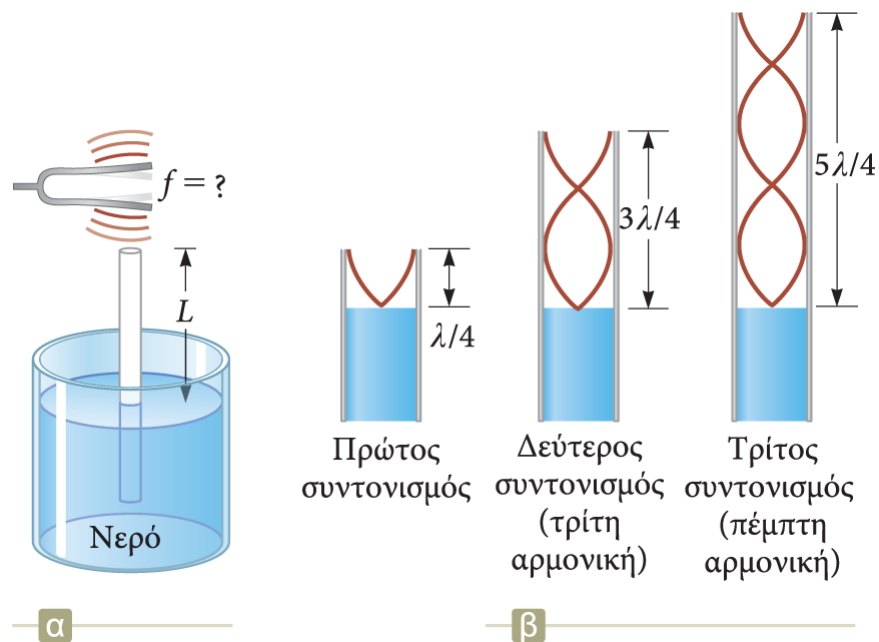
Συντονισμός σε στήλες αέρα – Παράδειγμα

Τοποθετούμε ένα διαπασών κοντά στην κορυφή του σωλήνα.

Όταν το L αντιστοιχεί σε κάποια από τις συχνότητες συντονισμού του σωλήνα, ο ήχος είναι δυνατότερος.

Το νερό συμπεριφέρεται όπως το κλειστό άκρο ενός σωλήνα.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τα μήκη κύματος από τις τιμές του μήκους του σωλήνα για τις οποίες παρατηρείται συντονισμός.



Στάσιμα κύματα σε ράβδους

Μια ράβδος είναι στερεωμένη στο μέσον της.

Τρίβεται στο ένα άκρο της κατά τη διαμήκη διεύθυνση.

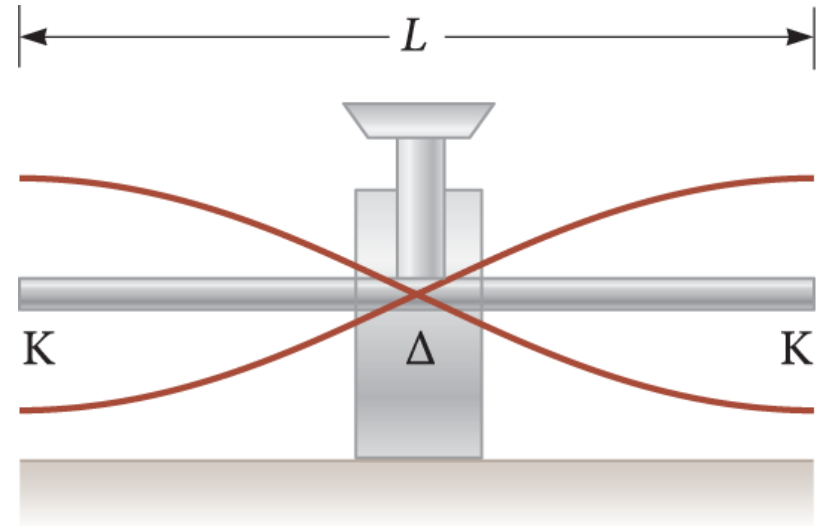
Η ράβδος ταλαντώνεται.

Οι ταλαντώσεις των στοιχείων της ράβδου είναι διαμήκεις.

Το μέσο της ράβδου είναι δεσμός μετατόπισης επειδή είναι στερεωμένο.

Τα άκρα της ράβδου είναι κοιλίες μετατόπισης επειδή ταλαντώνονται ελεύθερα.

Ο πρώτος κανονικός τρόπος ταλάντωσης (φαίνεται στην εικόνα) έχει μήκος κύματος $2L$ και συχνότητα $f = v/2L$.



$$\lambda_1 = 2L$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$$

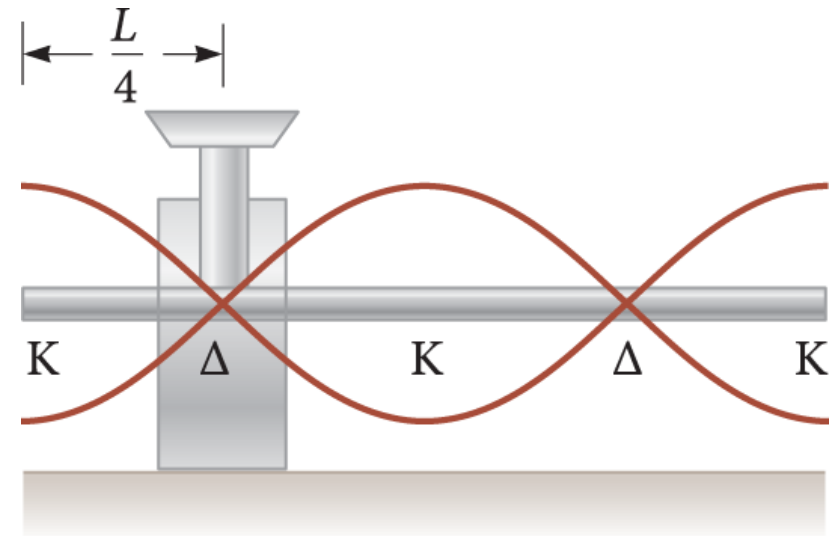
α

Στάσιμα κύματα σε ράβδους (συνέχεια)

Στερεώνοντας τη ράβδο σε διαφορετικά σημεία, ενδέχεται να πάρουμε άλλους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης κατά τη διέγερση της ράβδου.

Εδώ, η ράβδος έχει στερεωθεί σε απόσταση $L/4$ από το ένα άκρο της.

Έτσι παράγεται ο δεύτερος κανονικός τρόπος ταλάντωσης της.

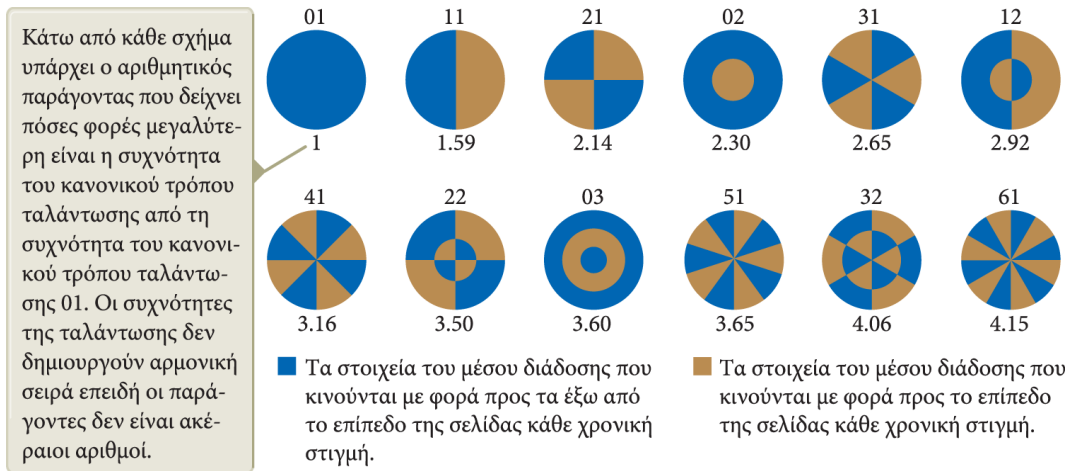


$$\lambda_2 = L$$

$$f_2 = \frac{v}{L} = 2f_1$$

β

Στάσιμα κύματα σε μεμβράνες



Σε μια εύκαμπτη μεμβράνη η οποία είναι τεντωμένη πάνω από μια κυκλική στεφάνη μπορούν να διαδοθούν ταλαντώσεις σε δύο διαστάσεις.

Ο παραγόμενος ήχος δεν αποτελείται από αρμονικές επειδή τα στάσιμα κύματα έχουν συχνότητες που δεν είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας βασικής συχνότητας.

- Ο παραγόμενος ήχος μπορεί να περιγραφεί πιο σωστά ως κρότος ή θόρυβος παρά ως μουσική.

Ο πρώτος κανονικός τρόπος ταλάντωσης, ο οποίος έχει συχνότητα f_1 , περιέχει μόνο μία καμπύλη δεσμού.

Χωρική και χρονική συμβολή

Χωρική συμβολή συμβαίνει όταν το πλάτος της ταλάντωσης των στοιχείων του μέσου μεταβάλλεται ως προς τη θέση κάθε στοιχείου.

- Τέτοια φαινόμενα συμβολής μελετήσαμε μέχρι τώρα.

Χρονική συμβολή συμβαίνει όταν τα κύματα άλλοτε βρίσκονται σε φάση και άλλοτε εκτός φάσης.

- Προκύπτει από την υπέρθεση δύο κυμάτων με λίγο διαφορετικές συχνότητες.
- Υπάρχει χρονική εναλλαγή μεταξύ ενισχυτικής και καταστρεπτικής συμβολής.

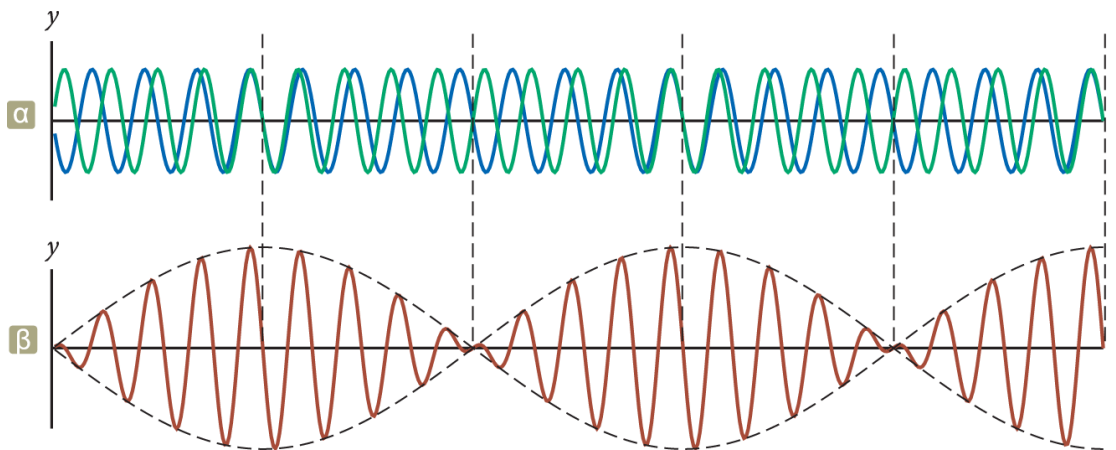
Διακροτήματα και συχνότητα διακροτημάτων

Το **διακρότημα** είναι η περιοδική μεταβολή του πλάτους σε ένα δεδομένο σημείο λόγω της υπέρθεσης δύο κυμάτων με λίγο διαφορετικές συχνότητες.

Το πλήθος των μεγίστων του πλάτους που ακούμε ανά δευτερόλεπτο είναι η **συχνότητα διακροτημάτων**.

Ισούται με τη διαφορά των συχνοτήτων μεταξύ των δύο πηγών.

Η μέγιστη συχνότητα που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί είναι περίπου 20 διακροτήματα το δευτερόλεπτο (beats/sec).



Διακροτήματα, εξισώσεις

Το πλάτος του συνισταμένου κύματος μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση

$$y_{\text{συν.}} = 2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t$$

- Άρα, και η ένταση μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο.

Η συχνότητα των διακροτημάτων είναι $f_{\text{διακ.}} = |f_1 - f_2|$.

Μη ημιτονοειδή κύματα

Τα σχήματα των κυμάτων που παράγει ένα μουσικό όργανο είναι το αποτέλεσμα της υπέρθεσης των διαφόρων αρμονικών.

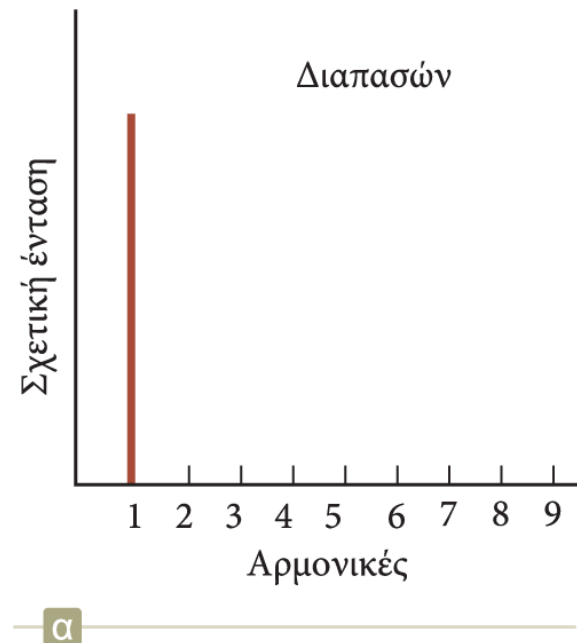
Η ανθρώπινη αντιληπτική απόκριση που μας επιτρέπει να κατατάσσουμε τους ήχους σε μια κλίμακα υψηλού-χαμηλού (πρίμου-μπάσου) ονομάζεται **τονικό ύψος** (ή **οξύτητα**).

- Τονικό ύψος και συχνότητα
 - Η συχνότητα είναι η φυσική μέτρηση του αριθμού των ταλαντώσεων ανά δευτερόλεπτο.
 - Το τονικό ύψος είναι μια ψυχολογική αντίδραση σε έναν ήχο.
 - Η συχνότητα είναι το ερέθισμα και το τονικό ύψος είναι η απόκριση σε αυτό το ερέθισμα.

Η ανθρώπινη αντιληπτική απόκριση που συνδέεται με διάφορους συνδυασμούς αρμονικών είναι η **ποιότητα** (ή **χροιά**) του ήχου.

Ποιότητα του ήχου – Διαπασών

Όταν χτυπάμε ένα διαπασών, αυτό παράγει μόνο τη θεμελιώδη συχνότητα.

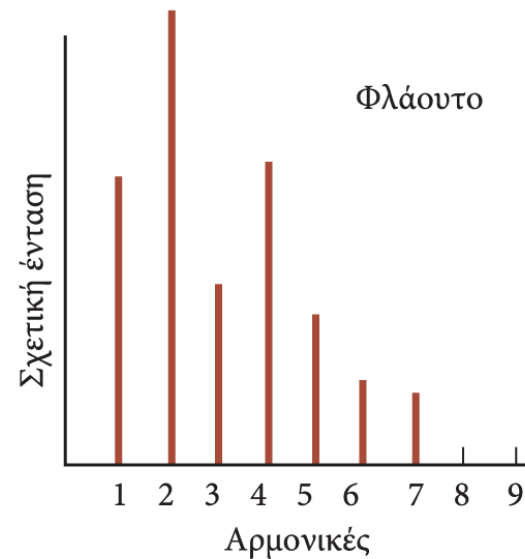
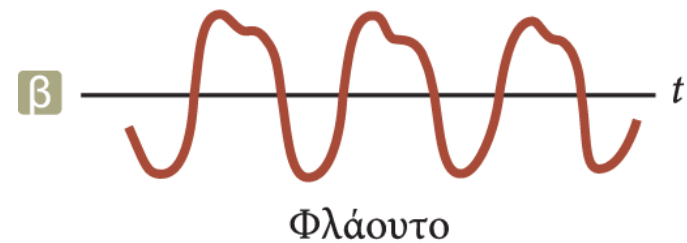


Ποιότητα του ήχου – Φλάουτο

Η ίδια νότα σε ένα φλάουτο ακούγεται διαφορετικά.

Η δεύτερη αρμονική έχει πολύ μεγάλη ένταση.

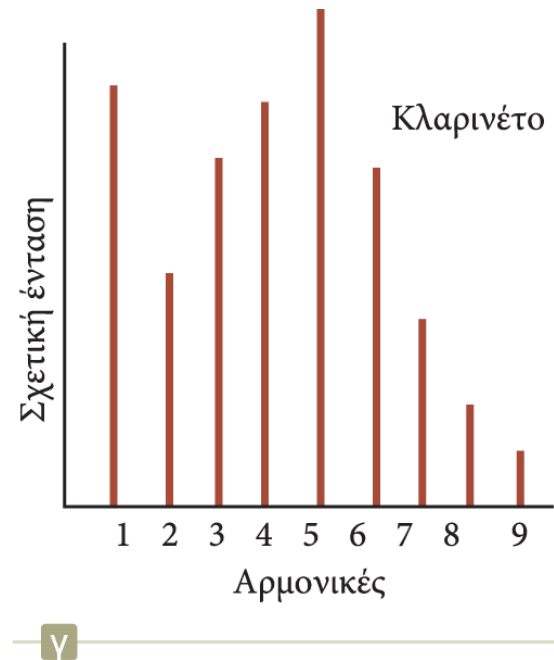
Η τέταρτη αρμονική έχει σχεδόν την ίδια ένταση με την πρώτη.



Ποιότητα του ήχου – Κλαρινέτο

Η πέμπτη αρμονική έχει πολύ μεγάλη ένταση.

Η πρώτη και η τέταρτη αρμονική είναι παρόμοιες, ενώ και η τρίτη δεν έχει μεγάλη διαφορά από αυτές.



Ανάλυση μη ημιτονοειδών κυμάτων

Αν το κύμα είναι περιοδικό, μπορούμε να το αναπαραστήσουμε όσο πιστά θέλουμε συνδυάζοντας έναν αρκετά μεγάλο αριθμό ημιτονοειδών κυμάτων που δημιουργούν μια αρμονική σειρά.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε οποιαδήποτε περιοδική συνάρτηση ως μια σειρά ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών όρων.

- Αυτό βασίζεται στη μαθηματική τεχνική που μας παρέχει το **θεώρημα του Fourier**.

Το αντίστοιχο άθροισμα των όρων που αναπαριστά το περιοδικό κύμα ονομάζεται **σειρά Fourier**.

Αν έχουμε μια συνάρτηση y που μεταβάλλεται περιοδικά ως προς τον χρόνο, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fourier μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση ως:

$$y(t) = \sum_n (A_n \sin 2\pi f_n t + B_n \cos 2\pi f_n t)$$

- $f_1 = 1/T$ και $f_n = n f_1$
- Οι συντελεστές A_n και B_n είναι τα πλάτη των κυμάτων.

Δημιουργία ενός τετραγωνικού κύματος με σύνθεση Fourier

Στη **σύνθεση Fourier**, προσθέτουμε διάφορες αρμονικές για να δημιουργήσουμε ένα συνιστάμενο κύμα συγκεκριμένου σχήματος.

Για να δημιουργήσουμε ένα τετραγωνικό κύμα με τη σύνθεση Fourier, προσθέτουμε όλα τα περιττά πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας f .

Στο (α), προσθέτουμε αρμονικές με συχνότητες f και $3f$.

Στο (β), προσθέτουμε την αρμονική με συχνότητα $5f$.

Στο (γ), με την προσθήκη αρμονικών με περιττές συχνότητες μέχρι και την $9f$, το κύμα προσεγγίζει το τετραγωνικό κύμα.

