Κεφάλαιο Τ1

Ταλαντώσεις

Ταλαντώσεις και μηχανικά κύματα

Η *περιοδική κίνηση* είναι η επαναλαμβανόμενη κίνηση ενός σώματος, το οποίο επιστρέφει σε μια δεδομένη θέση και με την ίδια ταχύτητα μετά από ένα σταθερό χρονικό διάστημα.

Οι επαναλαμβανόμενες κινήσεις ενός τέτοιου σώματος ονομάζονται *ταλαντώσεις*.

Θα επικεντρωθούμε σε μια ειδική περίπτωση περιοδικής κίνησης που ονομάζεται *απλή αρμονική κίνηση*.

- Με την απλή αρμονική κίνηση μπορούμε επίσης να κατανοήσουμε τα μηχανικά κύματα.

Με τις ταλαντώσεις και τα κύματα μπορούμε επίσης:

- Να εξηγήσουμε τις ταλαντώσεις γεφυρών και ουρανοξυστών.
- Να κατανοήσουμε τη λειτουργία του ραδιοφώνου και της τηλεόρασης.
- Να κατανοήσουμε την ατομική θεωρία.

Περιοδική κίνηση

Η ***περ οδ κή κ νηση*** είναι η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν επιστρέφει ανά τακτά χρονικά διαστήματα σε μια συγκεκριμένη θέση.

Στα μηχανικά συστήματα, όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα είναι ανάλογη της θέσης του σώματος ως προς τη θέση ισορροπίας του, παρατηρείται μια ειδική μορφή περιοδικής κίνησης.

- Αν η δύναμη αυτή έχει κατεύθυνση πάντα προς τη θέση ισορροπίας, τότε η κίνηση ονομάζεται ***απλή αρμον κή κ νηση***.

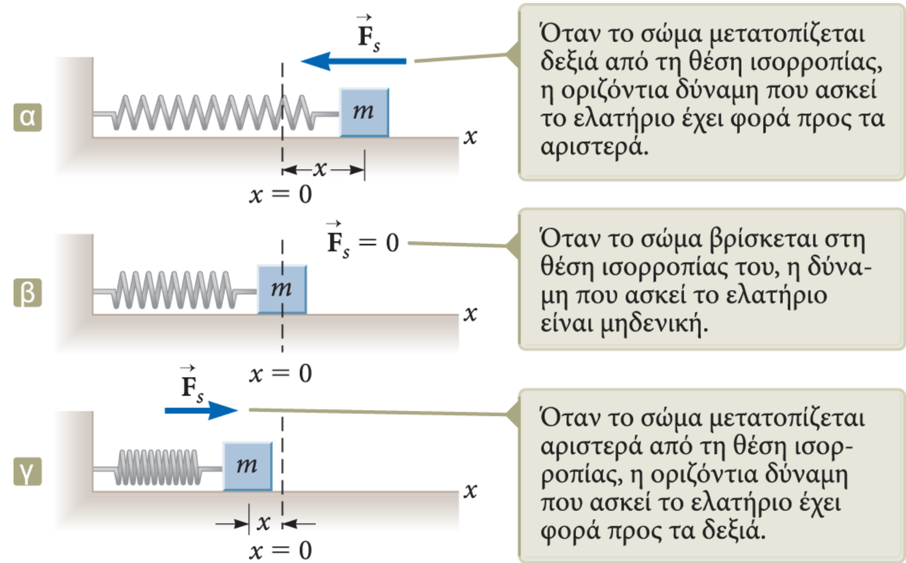
Κίνηση συστήματος σώματος-ελατηρίου

Ένας κύβος μάζας *m* είναι συνδεδεμένος στο άκρο ενός ελατηρίου και μπορεί και κινείται ελεύθερα επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές.

Όταν το ελατήριο δεν είναι ούτε εκτεταμένο ούτε συμπιεσμένο, ο κύβος βρίσκεται στη ***θέση σορροπ ας***.

- $x = 0$

Αν ένα τέτοιο σύστημα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του, θα αρχίσει να ταλαντώνεται.



Ο νόμος του Hooke

Ο νόμος του Hooke ορίζει ότι $F_s = -kx$

- F_s είναι η δύναμη επαναφοράς.
  - Έχει κατεύθυνση πάντα προς τη θέση ισορροπίας
  - Άρα, είναι πάντα αντίθετη με τη μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας.
- k είναι η σταθερά ελατηρίου.
- x είναι η μετατόπιση.

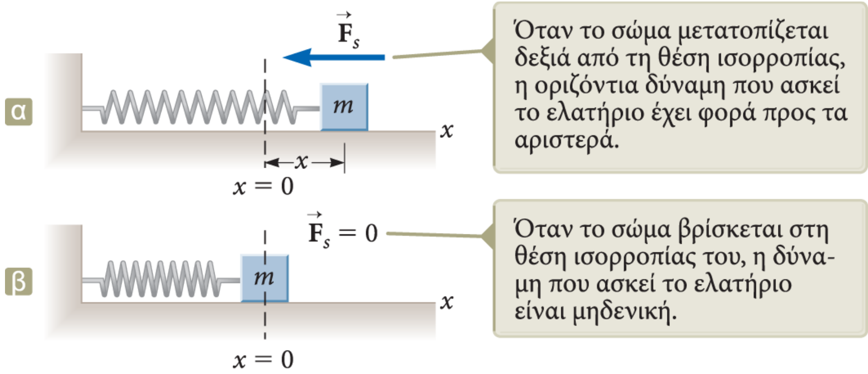
Δύναμη επαναφοράς και το σύστημα σώματος-ελατηρίου

Στην εικόνα (α), ο κύβος μετατοπίζεται δεξιά από το σημείο $x = 0$.

- Η θέση είναι θετική.
- Η δύναμη επαναφοράς έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά.

Στην εικόνα (β), ο κύβος βρίσκεται στη θέση ισορροπίας.

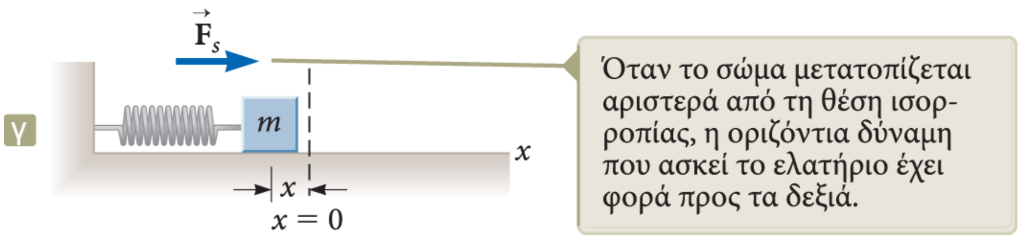
- $x = 0$
- Το ελατήριο δεν είναι ούτε εκτεταμένο ούτε συμπιεσμένο.
- Η δύναμη είναι ίση με 0.



Δύναμη επαναφοράς (*συνέχεια*)

Το σώμα μετατοπίζεται αριστερά από το σημείο x = 0.

- Η θέση είναι αρνητική.
- Η δύναμη επαναφοράς έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά.



Επιτάχυνση

Μόλις ο κύβος μετατοπιστεί από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερος, θα κινηθεί ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης και άρα θα επιταχυνθεί.

Η δύναμη που περιγράφει ο νόμος του Hooke είναι η συνισταμένη δύναμη του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα.

$$-kx = ma_x$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

Η επιτάχυνση του κύβου είναι ανάλογη της μετατόπισής του.

Η κατεύθυνση της επιτάχυνσης είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της μετατόπισης του κύβου από τη θέση ισορροπίας του.

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική κίνηση όταν η επιτάχυνσή του είναι ανάλογη της θέσης του και έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας.

Επιτάχυνση (*συνέχεια*)

Η επιτάχυνση ***δεν*** είναι σταθερή.

- Άρα, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις της κινηματικής.
- Αν ο κύβος μετατοπιστεί στη θέση $x = A$, τότε η αρχική επιτάχυνσή του είναι $-kA/m$.
- Τη στιγμή που ο κύβος διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, $a = 0$.
- Ο κύβος θα συνεχίσει να κινείται μέχρι τη θέση $x = -A$ όπου η επιτάχυνσή του είναι $+kA/m$.

Κίνηση του σώματος

Ο κύβος συνεχίζει να ταλαντώνεται μεταξύ των σημείων –A και +A.

- Στα σημεία αυτά αλλάζει η κατεύθυνση της κίνησης.

Η δύναμη είναι συντηρητική.

Αν δεν υπάρχουν τριβές, η κίνηση δεν θα σταματήσει ποτέ.

- Στα πραγματικά συστήματα υπάρχουν τριβές, οπότε αυτά δεν ταλαντώνονται επ’ άπειρον.

Μοντέλο ανάλυσης: Σωματίδιο που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση

Μοντελοποιούμε τον κύβο ως σωματίδιο.

- **Μοντέλο του σωματιδίου που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση**

Θεωρούμε ότι η ταλάντωση γίνεται στον άξονα *x*.

Επιτάχυνση

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Θέτουμε

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

οπότε $a = -\omega^2 x$

Σωματίδιο που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση (2)

Πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση που να ικανοποιεί την εξίσωση.

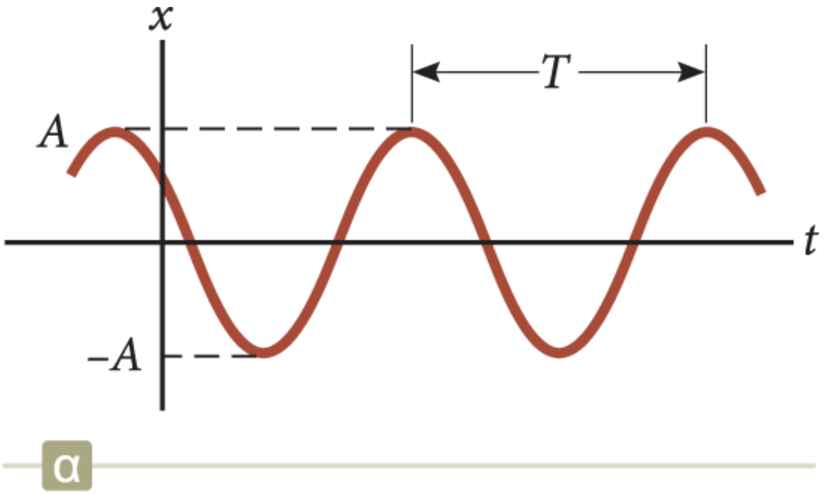
- Δηλαδή μια συνάρτηση $x(t)$ η οποία θα έχει δεύτερη παράγωγο ίδια με την αρχική συνάρτηση, αλλά με αρνητικό πρόσημο και πολλαπλασιασμένη με ω^2.
- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις του ημιτόνου (sine) και του συνημιτόνου (cosine) πληρούν αυτές τις προϋποθέσεις.

Απλή αρμονική κίνηση – Γραφική αναπαράσταση

Μία λύση είναι η $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$.

Τα A, ω, ϕ είναι σταθερές.

Θα ορίσουμε τη φυσική σημασία τους, χρησιμοποιώντας την καμπύλη του συνημιτόνου.



Απλή αρμονική κίνηση – Ορισμοί

Το *A* είναι το πλάτος της κίνησης.

- Είναι η μέγιστη τιμή της θέσης του σωματιδίου είτε προς τη θετική είτε προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα *x*.

Η σταθερά ω ονομάζεται κυκλική συχνότητα ή γωνιακή συχνότητα.

- Μετριέται σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο (rad/s)
- $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Η σταθερή γωνία ϕ ονομάζεται σταθερά φάσης ή αρχική γωνία φάσης.

Απλή αρμονική κίνηση (*συνέχεια*)

Οι σταθερές A και ϕ προσδιορίζονται με μονοσήμαντο τρόπο από τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 0$.

- Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $x = A$, τότε $\phi = 0$.

Η **φάση** της κίνησης είναι το μέγεθος $(\omega t + \phi)$.

Η συνάρτηση $x(t)$ είναι περιοδική και έχει την ίδια τιμή κάθε φορά που το ωt αυξάνεται κατά 2π ακτίνια.

Περίοδος

Η ***περ οδος*** *T* της κίνησης είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σωματίδιο για να πραγματοποιήσει έναν πλήρη κύκλο κίνησης.

- Οι τιμές των *x* και *v* για το σωματίδιο τη χρονική στιγμή *t* είναι ίσες με τις τιμές των *x* και *v* τη χρονική στιγμή *t* + *T*.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Συχνότητα

Το αντίστροφο της περιόδου είναι η ***συχνότητα***.

Η συχνότητα είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το σωματίδιο ανά μονάδα χρόνου.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Μετριέται σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο = hertz (Hz).

Σύνοψη εξισώσεων – Περίοδος και συχνότητα

Ας ξαναγράψουμε τις εξισώσεις της συχνότητας και της περιόδου για να λύσουμε ως προς ω.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Η περίοδος και η συχνότητα μπορούν επίσης να εκφραστούν ως:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Η συχνότητα και η περίοδος εξαρτώνται μόνο από τη μάζα του σωματιδίου και τη σταθερά του ελατηρίου.

Δεν εξαρτώνται από τις παραμέτρους της κίνησης.

Η συχνότητα είναι μεγάλη όταν το ελατήριο είναι σκληρό (έχει μεγάλη σταθερά *k*) και μειώνεται όσο αυξάνεται η μάζα του σωματιδίου.

Οι εξισώσεις της απλής αρμονικής κίνησης

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

Η απλή αρμονική κίνηση είναι κίνηση σε μία διάσταση, οπότε συμβολίζουμε την κατεύθυνσή της με τα πρόσημα + και –.

Υπενθυμίζουμε ότι η απλή αρμονική κίνηση **δεν** είναι ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Μέγιστες τιμές των *v* και *a*

Επειδή οι συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου κυμαίνονται μεταξύ των τιμών ±1, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις μέγιστες τιμές της ταχύτητας και της επιτάχυνσης για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση.

$$v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\, A$$

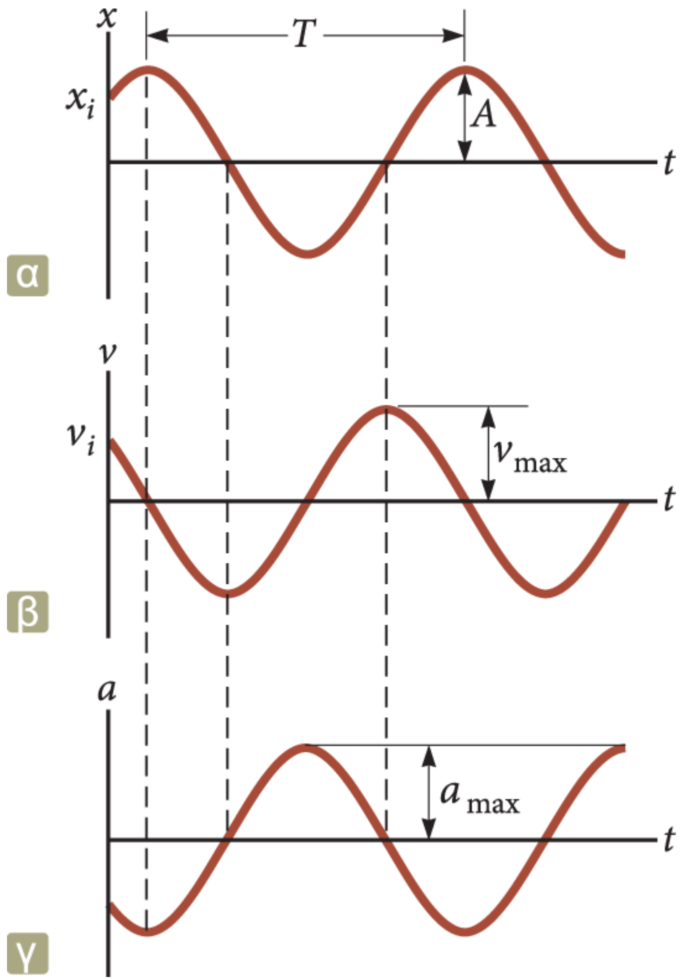
$$a_{\max} = \omega^2 A = \frac{k}{m}\, A$$

Γραφήματα

Δεξιά φαίνονται τα γραφήματα:

- (α) θέσης-χρόνου
- (β) ταχύτητας-χρόνου
- (γ) επιτάχυνσης-χρόνου

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι εκτός φάσης από τη θέση κατά 90° και 180°, αντίστοιχα.



Απλή αρμονική κίνηση – Παράδειγμα 1

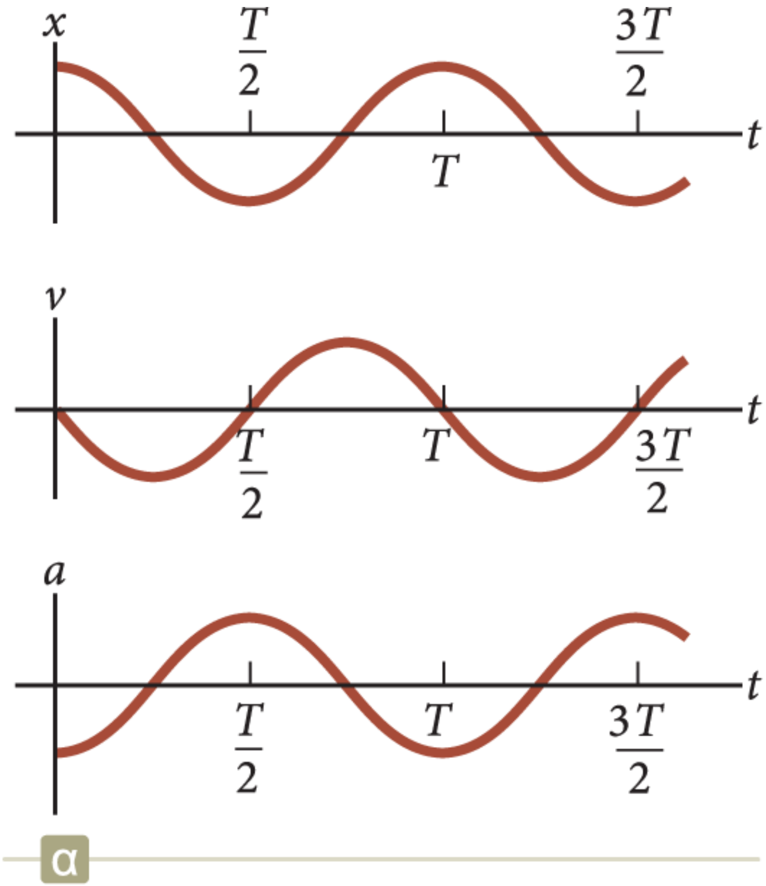
Οι αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

- $x(0) = A$
- $v(0) = 0$

Αυτό σημαίνει ότι $\phi = 0$.

Οι ακραίες τιμές της επιτάχυνσης είναι $\pm\omega^2 A$ και προκύπτουν στις θέσεις $\pm A$.

Οι ακραίες τιμές της ταχύτητας είναι $\pm\omega A$ και προκύπτουν στη θέση $x = 0$.



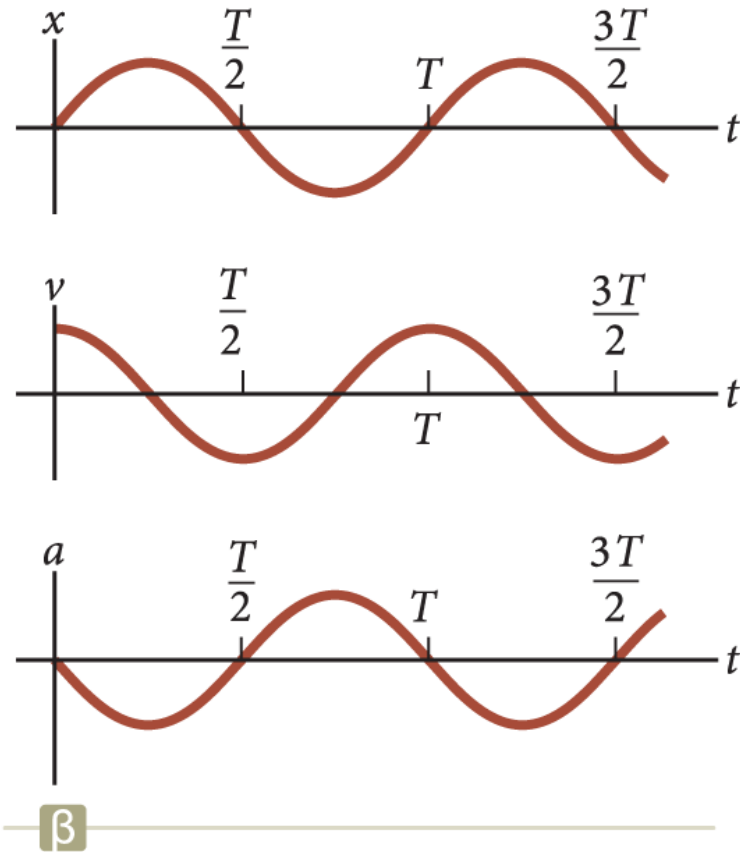
Απλή αρμονική κίνηση – Παράδειγμα 2

Οι αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

- $x\,(0) = 0$
- $v\,(0) = v_i$

Αυτό σημαίνει ότι $\phi = -\pi/2$.

Το γράφημα έχει μετατεθεί προς τα δεξιά κατά ένα τέταρτο του κύκλου ταλάντωσης ως προς το γράφημα $x\,(0) = A$.



Ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή

Ένα σύστημα στο οποίο ένα σωματίδιο εκτελεί απλή αρμονική κίνηση έχει μηχανική ενέργεια.

- Για παράδειγμα, υποθέστε ότι ένα σύστημα σώματος-ελατηρίου κινείται επάνω σε μια επιφάνεια χωρίς τριβές.

Εφόσον η επιφάνεια δεν έχει τριβές, το σύστημα είναι απομονωμένο.

- Άρα, η συνολική ενέργειά του είναι σταθερή.

Μπορούμε να βρούμε την κινητική ενέργειά του από τη σχέση

- $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$
  - Υποθέτουμε ότι το ελατήριο δεν έχει μάζα, οπότε η μάζα του συστήματος είναι η μάζα του σώματος.

Μπορούμε να βρούμε την ελαστική δυναμική ενέργεια από τη σχέση

- $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$

Η συνολική ενέργεια είναι $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$.

Ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή (*συνέχεια*)

Η συνολική μηχανική ενέργεια είναι σταθερή.

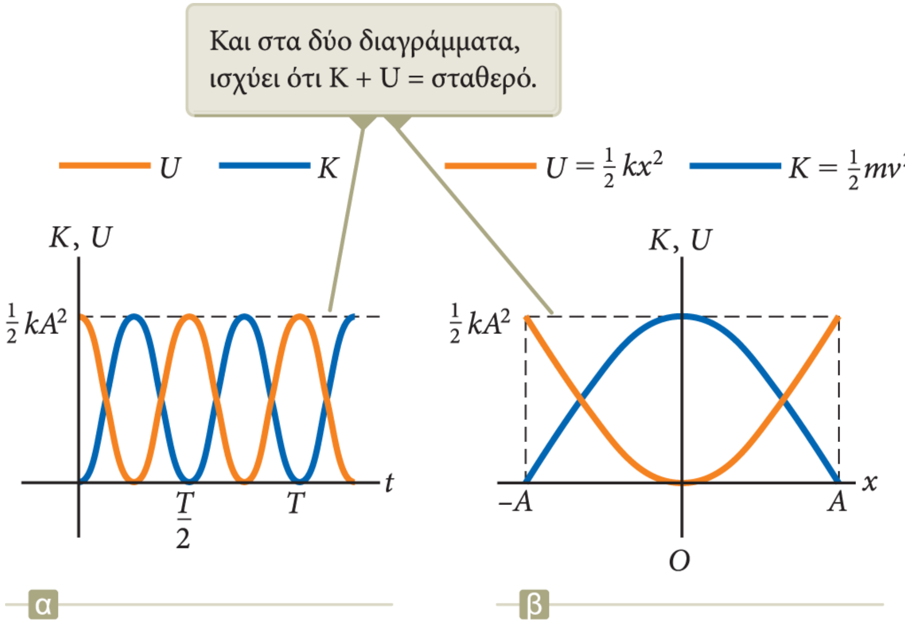
- Σε κάθε χρονική στιγμή, η συνολική ενέργεια είναι

$\frac{1}{2}kA^2$

Η συνολική μηχανική ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους.

Η αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μετατρέπεται συνεχώς σε κινητική ενέργεια του σώματος και αντιστρόφως.

Στο διάγραμμα, $\varphi = 0$.

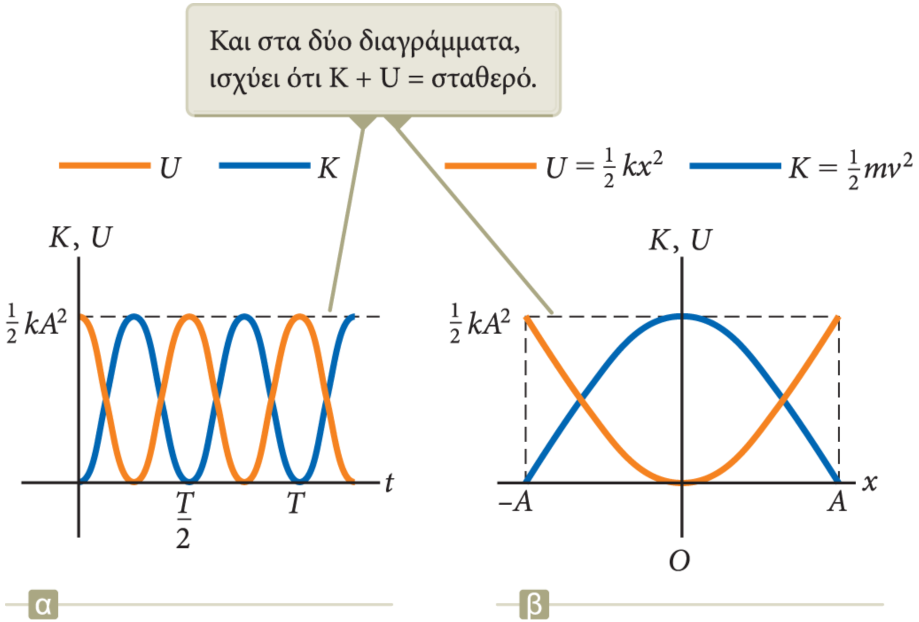


Ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή (*τελική διαφάνεια*)

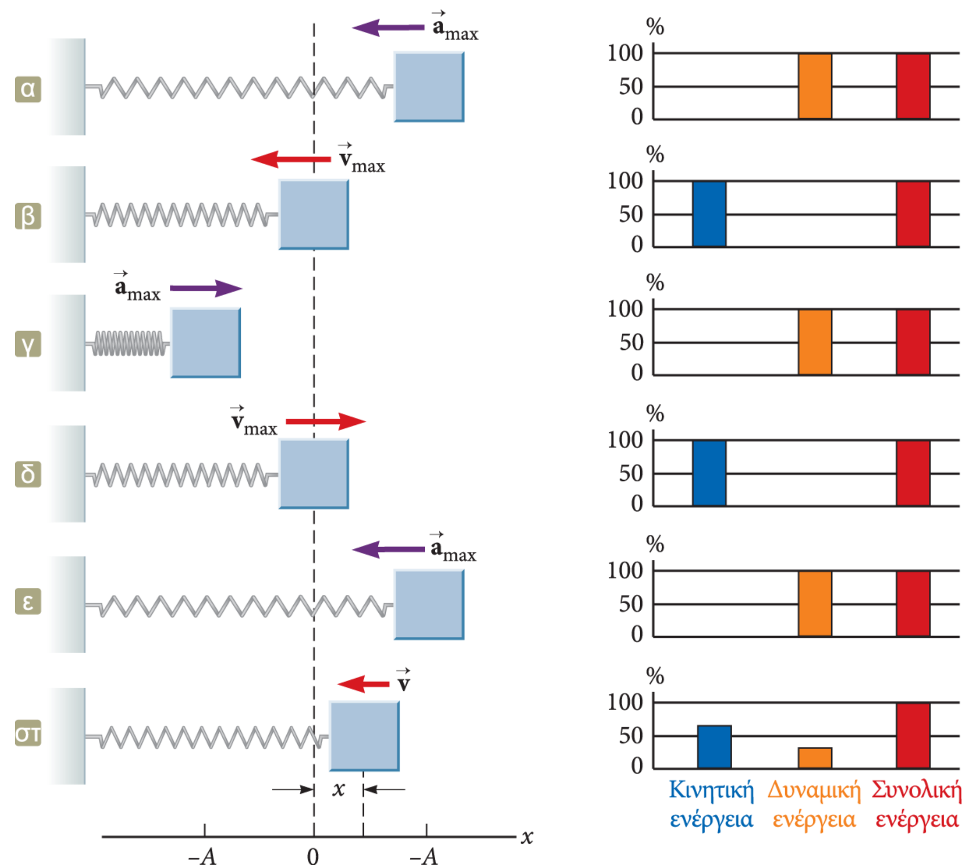
Επίσης, μπορούμε να παρατηρήσουμε τις μεταβολές των *K* και *U* ως προς τη θέση.

Η αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μετατρέπεται συνεχώς σε κινητική ενέργεια του σώματος και αντιστρόφως.

Η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή.



Ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή – Σύνοψη



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

Ταχύτητα σε μια συγκεκριμένη θέση

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ενέργεια για να βρούμε την ταχύτητα:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}$$

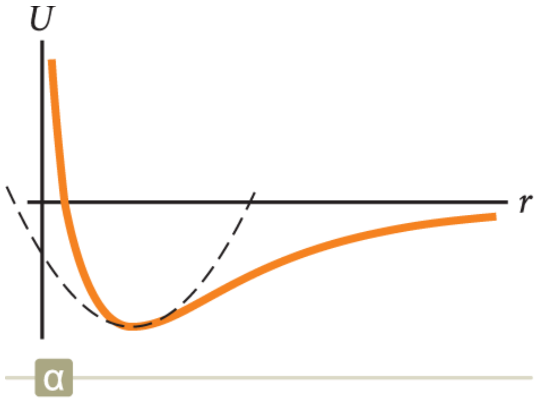
$$= \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

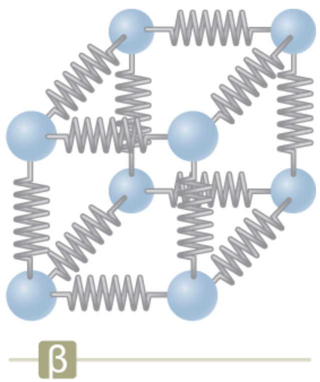
Σπουδαιότητα των απλών αρμονικών ταλαντωτών

Οι απλοί αρμονικοί ταλαντωτές αποτελούν καλά μοντέλα για διάφορα φυσικά φαινόμενα.

Το παράδειγμα των μορίων

- Αν τα άτομα μέσα στα μόρια δεν απομακρύνονται πολύ μεταξύ τους, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τις δυνάμεις συνοχής τους ως δυνάμεις που προκαλούνται από μικροσκοπικά ελατήρια.
- Η δυναμική ενέργεια συμπεριφέρεται όπως στην περίπτωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή.



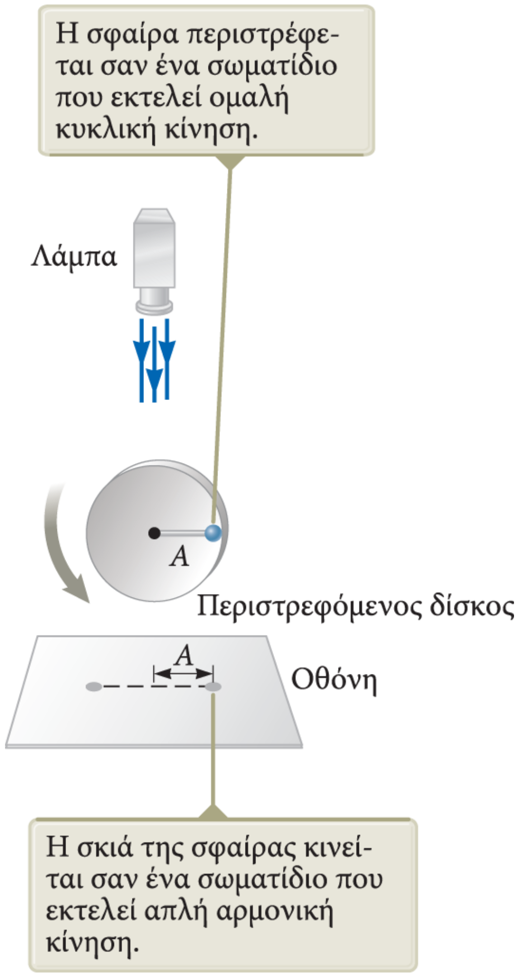


CENGAGE Learning

Απλή αρμονική κίνηση και κυκλική κίνηση

Στην εικόνα φαίνεται μια πειραματική διάταξη που δείχνει τη σχέση μεταξύ της απλής αρμονικής κίνησης και της κυκλικής κίνησης.

Καθώς ο δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα σταθερού μέτρου, η σκιά της σφαίρας κινείται μπρος-πίσω εκτελώντας απλή αρμονική κίνηση.



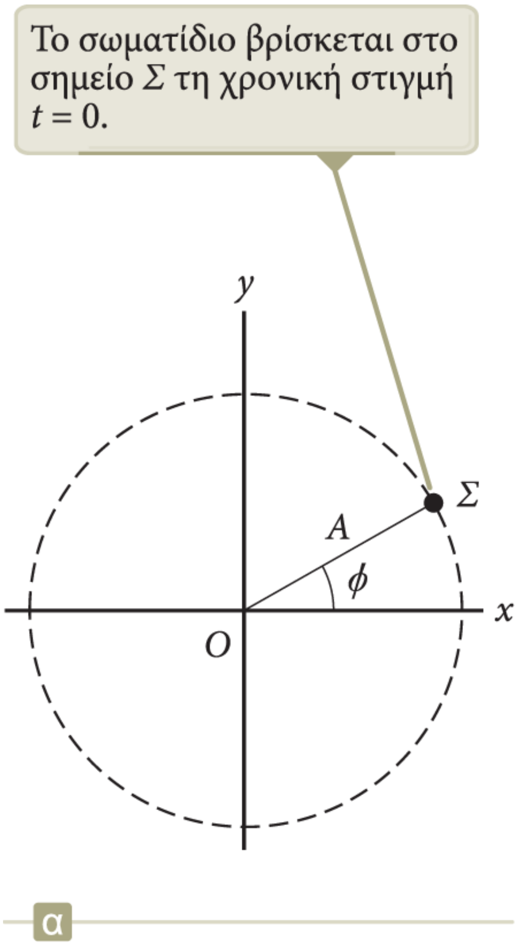
Απλή αρμονική κίνηση και κυκλική κίνηση (2)

Ο κύκλος που διαγράφει το σωματίδιο ονομάζεται ***κύκλος αναφοράς***.

- Θα τον χρησιμοποιήσουμε για να συγκρίνουμε την απλή αρμονική κίνηση με την ομαλή κυκλική κίνηση.

Επιλέγουμε ως θέση αναφοράς τη θέση του σημείου *Σ* τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το ευθύγραμμο τμήμα *ΟΣ* σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα *x*.



Απλή αρμονική κίνηση και κυκλική κίνηση (*3*)

Το σωματίδιο κινείται επάνω στον κύκλο με γωνιακή ταχύτητα σταθερού μέτρου ω.

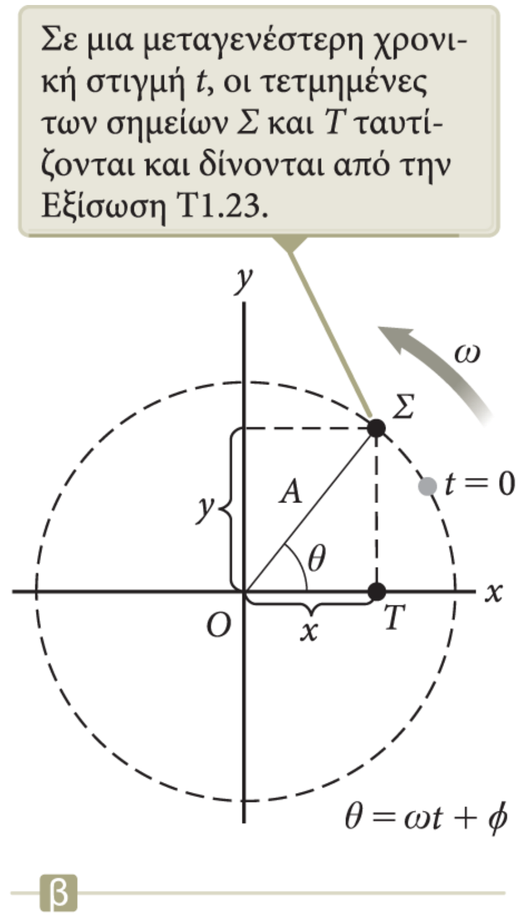
Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΣ σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα *x*.

Σε κάποια χρονική στιγμή, η γωνία μεταξύ του *ΟΣ* και του άξονα *x* θα είναι $\theta = \omega t + \phi$.

Τα σημεία *Σ* και *Τ* έχουν πάντα την ίδια τετμημένη *x*.

$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

Αυτό δείχνει ότι το σημείο *Τ* εκτελεί απλή αρμονική κίνηση κατά μήκος του άξονα *x*.



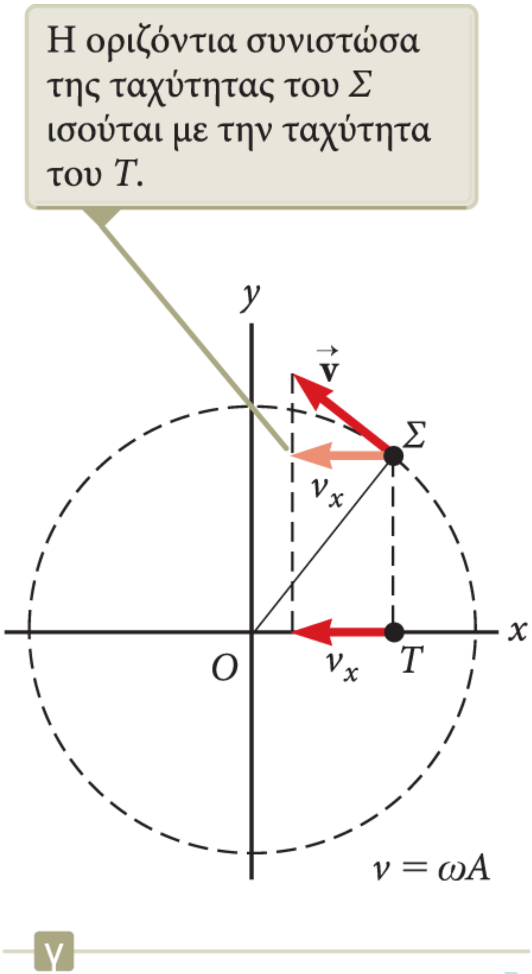
Απλή αρμονική κίνηση και κυκλική κίνηση (4)

Η γωνιακή ταχύτητα του σημείου *Σ* έχει ίδια τιμή με την κυκλική συχνότητα της απλής αρμονικής κίνησης στον άξονα *x*.

Η ταχύτητα του σημείου *T* έχει ίδια τιμή με τη συνιστώσα *x* της ταχύτητας του σημείου *Σ*.

Η συνιστώσα *x* της ταχύτητας είναι

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$



Απλή αρμονική κίνηση και κυκλική κίνηση (5)

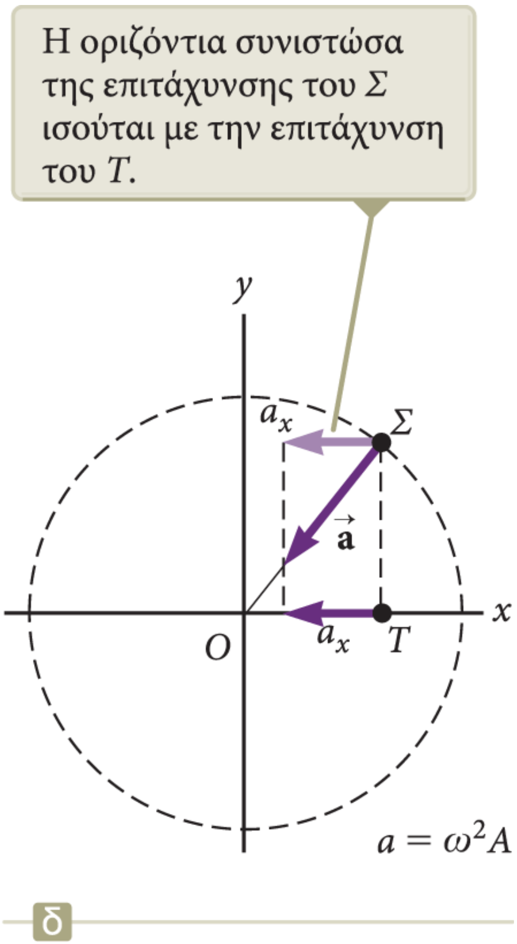
Η επιτάχυνση του σημείου Σ επάνω στον κύκλο αναφοράς κατευθύνεται ακτινικά προς το O.

Έχει μέτρο $a = \omega^2 A$.

Η συνιστώσα x της επιτάχυνσης είναι

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

Αυτή είναι επίσης η επιτάχυνση του σημείου T στον άξονα x.



CENGAGE Learning™

Απλό εκκρεμές

Το απλό εκκρεμές εκτελεί επίσης περιοδική κίνηση.

Αποτελείται από ένα σφαιρίδιο μάζας *m*, το οποίο είναι αναρτημένο από ένα αβαρές νήμα μήκους *L*.

Η κίνηση πραγματοποιείται στο κατακόρυφο επίπεδο και προκαλείται από τη βαρυτική δύναμη.

Η κίνηση μοιάζει πολύ με την κίνηση ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή.

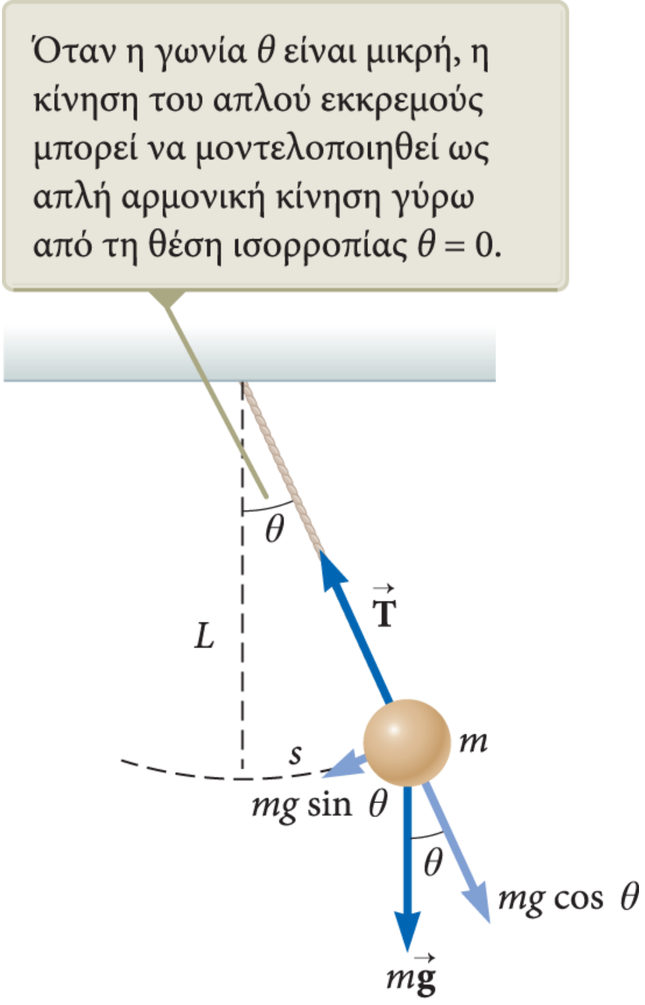
- Για γωνίες < 10^o

Απλό εκκρεμές (2)

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σφαιρίδιο είναι η τάση και το βάρος.

- $\vec{\mathbf{T}}$ είναι η δύναμη που ασκεί το νήμα στο σφαιρίδιο.
- $m\vec{\mathbf{g}}$ είναι η βαρυτική δύναμη.

Η εφαπτομενική συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης είναι μια δύναμη επαναφοράς.



Απλό εκκρεμές (3)

Στην εφαπτομενική διεύθυνση,

$$F_t = ma_t \rightarrow -mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

Το μήκος L του εκκρεμούς είναι σταθερό, και για μικρές τιμές της γωνίας θ ισχύει

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta = -\frac{g}{L}\theta$$

Αυτό επιβεβαιώνει ότι η κίνηση του εκκρεμούς έχει την ίδια μαθηματική μορφή με την απλή αρμονική κίνηση.

Απλό εκκρεμές (4)

Η συνάρτηση θ μπορεί να γραφτεί ως $\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \phi)$.

Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Η περίοδος είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Απλό εκκρεμές – Σύνοψη

Η περίοδος και η συχνότητα του απλού εκκρεμούς εξαρτώνται μόνο από το μήκος του νήματος και την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Η περίοδος είναι ανεξάρτητη της μάζας.

Όλα τα απλά εκκρεμή που έχουν ίσο μήκος νήματος και βρίσκονται στην ίδια γεωγραφική τοποθεσία έχουν την ίδια περίοδο ταλάντωσης.

Φυσικό εκκρεμές (*1*)

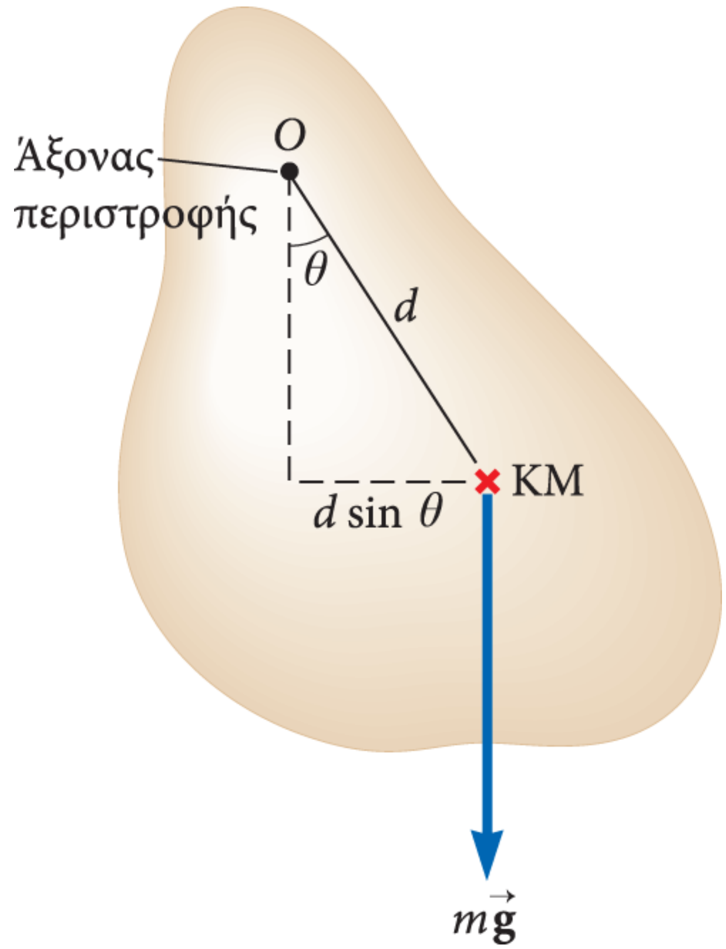
Φυσ κό εκκρεμές ονομάζεται ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από ένα αναρτημένο σώμα, που δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί ως σημειακή μάζα, και το οποίο ταλαντώνεται γύρω από έναν σταθερό άξονα που δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

- Δεν είναι απλό εκκρεμές.

Η βαρυτική δύναμη προκαλεί ροπή ως προς έναν άξονα που διέρχεται από το σημείο *O*.

Το μέτρο της ροπής είναι

$$mgd \sin \theta$$



Φυσικό εκκρεμές (2)

Το *I* είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο *O.*

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα,

$$-mgd\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Η βαρυτική δύναμη προκαλεί μια ροπή επαναφοράς.

Αν υποθέσουμε ότι η γωνία θ είναι μικρή, η εξίσωση γίνεται

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta$$

Φυσικό εκκρεμές (3)

Η παραπάνω εξίσωση έχει την ίδια μαθηματική μορφή με την εξίσωση που περιγράφει ένα σώμα το οποίο εκτελεί απλή αρμονική κίνηση.

Η λύση της είναι η λύση του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Η περίοδος είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Φυσικό εκκρεμές (4)

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το φυσικό εκκρεμές για να μετρήσουμε τη ροπή αδράνειας ενός επίπεδου, άκαμπτου σώματος.

- Αν γνωρίζουμε την απόσταση d, μπορούμε να βρούμε τη ροπή αδράνειας I μετρώντας την περίοδο.

Αν $I = md^2$, τότε το φυσικό εκκρεμές ισοδυναμεί με το απλό εκκρεμές.

- Όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας.

Στροφικό εκκρεμές

Ας υποθέσουμε ότι ένα άκαμπτο σώμα είναι αναρτημένο από ένα σύρμα, το οποίο είναι στερεωμένο σε ένα σταθερό σημείο.

Αν στρέψουμε το σώμα κατά μια γωνία θ, το συστραμμένο σύρμα θα ασκήσει μια ροπή επαναφοράς στο σώμα η οποία είναι ανάλογη της γωνιακής θέσης του.

Στροφικό εκκρεμές

Έστω ότι ένα άκαμπτο σώμα είναι αναρτημένο από ένα σύρμα η πάνω άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ένα σταθερό στήριγμα.

Το συστραμμένο σύρμα ασκεί μια ροπή επαναφοράς στο σώμα, η οποία είναι ανάλογη της γωνιακής θέσης του.

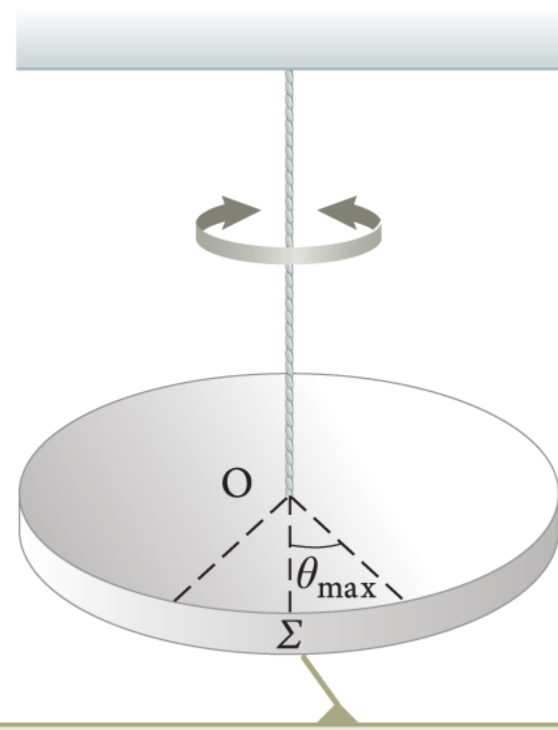
Η ροπή επαναφοράς είναι $\tau = -\kappa\theta$.

- Το κ είναι η *σταθερά στρέψης* του σύρματος.

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$\tau = I\alpha \rightarrow -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$



Το σώμα ταλαντώνεται γύρω από το ευθύγραμμο τμήμα $O\Sigma$ με πλάτος θ_{max}.

Περίοδος στροφικού εκκρεμούς (*συνέχεια*)

Από την εξίσωση της ροπής προκύπτει η εξίσωση της κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

Η περίοδος είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

- Δεν υπάρχει ο περιορισμός της μικρής γωνίας.
- Υποθέτουμε ότι δεν υπερβαίνουμε το όριο ελαστικότητας του σύρματος.

Φθίνουσες ταλαντώσεις

Σε πολλά πραγματικά συστήματα, δρουν μη συντηρητικές δυνάμεις.

- Αυτά τα συστήματα δεν είναι ιδανικά (όπως τα συστήματα που μελετήσαμε μέχρι τώρα).
- Η τριβή και η αντίσταση του αέρα είναι μη συντηρητικές δυνάμεις.

Σε αυτή την περίπτωση, η μηχανική ενέργεια του συστήματος μειώνεται συναρτήσει του χρόνου και η κίνηση είναι ***φθ νουσα***.

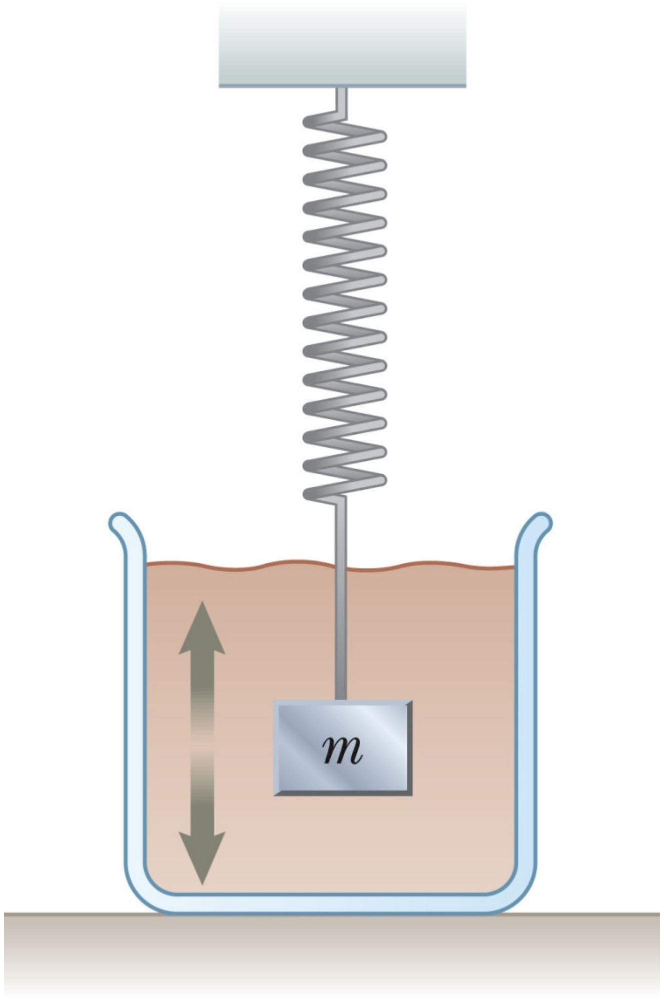
Φθίνουσες ταλαντώσεις – Παράδειγμα

Ένα παράδειγμα φθίνουσας κίνησης είναι η κίνηση ενός σώματος το οποίο είναι προσαρτημένο σε ένα ελατήριο και βυθισμένο σε ένα παχύρρευστο υγρό.

Η δύναμη επιβράδυνσης εκφράζεται ως

$$\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$$

- Η σταθερά *b* ονομάζεται ***συντελεστής απόσβεσης***.



CENGAGE Learning

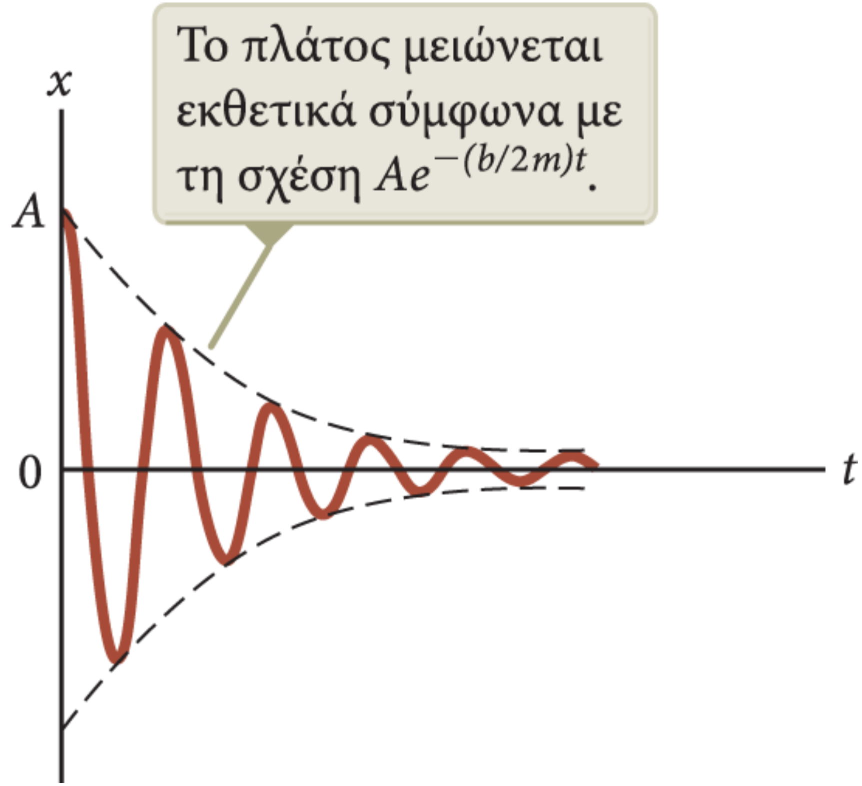
Φθίνουσες ταλαντώσεις – Γράφημα

Το γράφημα μιας φθίνουσας ταλάντωσης.

Το πλάτος μειώνεται ως προς τον χρόνο.

Οι διακεκομμένες γραμμές ορίζουν την ***περ βάλλουσα*** της καμπύλης της κίνησης.

Η δύναμη επαναφοράς ισούται με *–kx.*



Φθίνουσες ταλαντώσεις – Εξισώσεις

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε

$$\Sigma F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

Όταν η δύναμη τριβής είναι μικρή συγκριτικά με τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς, μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση που δίνει το *x*.

- Αυτό συμβαίνει όταν ο συντελεστής *b* είναι μικρός.

Η θέση περιγράφεται από τη σχέση

$$x = Ae^{-\left(b/2m\right)t}\cos(\omega t + \phi)$$

Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Φθίνουσες ταλαντώσεις – Ιδιοσυχνότητα

Όταν η δύναμη τριβής είναι μικρή, η κίνηση εξακολουθεί να είναι ταλάντωση, αλλά το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο.

Τελικά η κίνηση σταματά.

Η κυκλική συχνότητα μπορεί να εκφραστεί και στη μορφή:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

- Όπου ω_0 είναι η κυκλική συχνότητα όταν δεν υπάρχει δύναμη τριβής, η οποία ονομάζεται **ιδιοσυχνότητα** (ή **φυσική συχνότητα**) του συστήματος.

$$\omega_o = {}^{k}\!/_{m}$$

Είδη απόσβεσης

Όταν η δύναμη επαναφοράς είναι τέτοια ώστε $b/2m < \omega_0$, τότε λέμε ότι το σύστημα παρουσιάζει ***υποαπόσβεση***.

Όταν ο συντελεστής b πάρει μια οριακή τιμή b_c τέτοια ώστε $b_c/2m = \omega_0$, το σύστημα δεν ταλαντώνεται.

- Τότε λέμε ότι έχουμε ***κρ σ μη απόσβεση***.

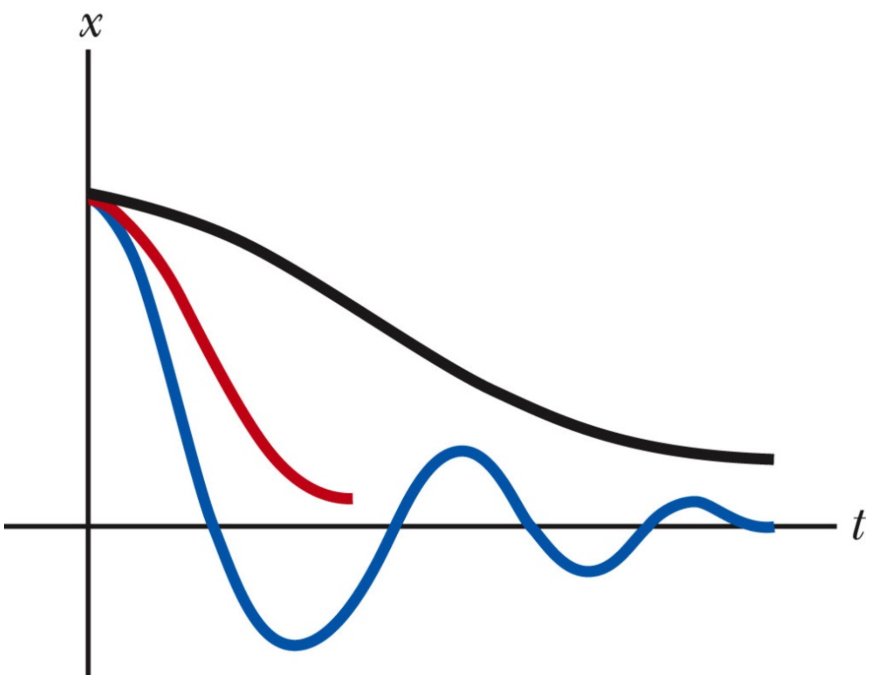
Αν η δύναμη επαναφοράς είναι τέτοια ώστε $b/2m > \omega_0$, τότε λέμε ότι το σύστημα παρουσιάζει ***υπεραπόσβεση***.

Είδη απόσβεσης (*συνέχεια*)

Γραφήματα θέσης-χρόνου για

- έναν ταλαντωτή με υποαπόσβεση (μπλε καμπύλη)
- έναν ταλαντωτή με κρίσιμη απόσβεση (κόκκινη καμπύλη)
- έναν ταλαντωτή με υπεραπόσβεση (μαύρη καμπύλη)

Τα συστήματα στα οποία έχουμε κρίσιμη απόσβεση και υπεραπόσβεση, δεν έχουν κυκλική συχνότητα.



Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

Μπορούμε να αντισταθμίσουμε την απώλεια ενέργειας σε μια φθίνουσα ταλάντωση ασκώντας μια περιοδική εξωτερική δύναμη.

Το πλάτος της κίνησης διατηρείται σταθερό αν η ενέργεια που παρέχεται σε κάθε κύκλο ταλάντωσης ισούται με τη μείωση της μηχανικής ενέργειας που προκαλούν οι δυνάμεις αντίστασης σε κάθε κύκλο.

Όταν σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα αρχίσει να ασκείται μια δύναμη διέγερσης, το σώμα θα αρχίσει να ταλαντώνεται με ολοένα μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης.

Έπειτα από αρκετό χρονικό διάστημα,
Ενέργεια δύναμης διέγερσης = Ενέργεια που μετατρέπεται σε εσωτερική

- Το σύστημα φτάνει σε μια σταθερή κατάσταση.
- Οι ταλαντώσεις συνεχίζονται με σταθερό πλάτος.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (*συνέχεια*)

Το πλάτος μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

- Το ω_0 είναι η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή χωρίς απόσβεση.

Συντονισμός

Όταν η συχνότητα της δύναμης διέγερσης πλησιάζει την ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης ($\omega \approx \omega_0$), παρατηρείται αύξηση του πλάτους.

Αυτή η θεαματική αύξηση του πλάτους ονομάζεται ***συντον σμός***.

Η ιδιοσυχνότητα ω_0 είναι γνωστή και ως συχνότητα συντονισμού του συστήματος.

Κατά τον συντονισμό, η δύναμη διέγερσης βρίσκεται σε φάση με την ταχύτητα και η ισχύς που μεταφέρεται στον ταλαντωτή παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

- Η δύναμη διέγερσης και η ταχύτητα *v* είναι και οι δύο ανάλογες προς το sin ($\omega t + \phi$).
- Η ισχύς που αποδίδεται είναι $\vec{F}\cdot\vec{v}$
  - Είναι μέγιστη όταν η δύναμη και η ταχύτητα βρίσκονται σε φάση.
  - Η ισχύς που μεταφέρεται στον ταλαντωτή παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Συντονισμός (*συνέχεια*)

Συντονισμός παρατηρείται (κορυφή του γραφήματος *A*-*ω*) όταν η συχνότητα της δύναμης διέγερσης είναι ίδια με την ιδιοσυχνότητα.

Όταν η απόσβεση μειώνεται, το πλάτος *A* της ταλάντωσης αυξάνεται.

Όταν η απόσβεση αυξάνεται, το πλάτος της καμπύλης αυξάνεται.

Το σχήμα της καμπύλης συντονισμού εξαρτάται από τον συντελεστή *b.*