Κεφάλαιο Μ9

Ορμή και κρούση

CENGAGE Learning™

Μοντέλα ανάλυσης με βάση την ορμή

Η δύναμη και η επιτάχυνση συνδέονται μέσω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα.

Όταν η δύναμη και η επιτάχυνση μεταβάλλονται ως προς τον χρόνο, η κατάσταση μπορεί να γίνει πολύ πολύπλοκη.

Οι τεχνικές που θα παρουσιάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο θα σας δώσουν τη δυνατότητα να κατανοείτε και να αναλύετε τέτοιες καταστάσεις με απλό τρόπο.

Θα ορίσουμε μοντέλα ανάλυσης με βάση την ορμή για απομονωμένα και μη απομονωμένα συστήματα.

Αυτά τα μοντέλα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για την επίλυση προβλημάτων που περιλαμβάνουν κρούσεις, καθώς και για την ανάλυση της προώθησης των πυραύλων.

Νοητό πείραμα

Ένας τοξότης στέκεται ακίνητος επάνω σε πάγο χωρίς τριβές και εκτοξεύει ένα βέλος. Με ποια ταχύτητα θα κινηθεί ο τοξότης αφού εκτοξεύσει το βέλος;

- Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μοντέλα κίνησης όπως το σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση.
  - Δεν έχουμε πληροφορίες για την επιτάχυνση του τοξότη.
- Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του σωματιδίου υπό την επίδραση σταθερής δύναμης.
  - Δεν ξέρουμε τίποτα για τις δυνάμεις σε αυτό το πρόβλημα.
- Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μοντέλα με βάση την ενέργεια.
  - Δεν έχουμε πληροφορίες για το έργο ή την ενέργεια σε αυτό το πρόβλημα.

Χρειαζόμαστε ένα νέο μέγεθος – την ορμή.

Ορμή

Η **ορμή** ενός σωματιδίου ή ενός σώματος, το οποίο μπορεί να μοντελοποιηθεί ως σωματίδιο μάζας *m* που κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$, ορίζεται ως το γινόμενο της μάζας και της ταχύτητας:

- $\vec{\mathbf{p}} \equiv m\vec{\mathbf{v}}$

Η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος.

- Έχει κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση της ταχύτητας.

Οι διαστάσεις της ορμής είναι ML/T.

Η μονάδα SI της ορμής είναι το kg·m/s.

Η ορμή μπορεί να εκφραστεί σε μορφή συνιστωσών:

- $p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \; p_z = mv_z$

Ορμή και κινητική ενέργεια

Η ορμή και η κινητική ενέργεια είναι μεγέθη που εξαρτώνται από τη μάζα και την ταχύτητα.

Τα μεγέθη αυτά έχουν ορισμένες βασικές διαφορές:

- Η κινητική ενέργεια είναι βαθμωτό μέγεθος, ενώ η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος.
- Η κινητική ενέργεια μπορεί να μετατραπεί σε άλλους τύπους ενέργειας.
  - Υπάρχει μόνο ένας τύπος ορμής, οπότε δεν μπορούν να γίνουν παρόμοιες μετατροπές.

Τα μοντέλα ανάλυσης που βασίζονται στην ορμή είναι διαφορετικά από εκείνα που βασίζονται στην ενέργεια.

Αυτή η διαφορά μάς παρέχει ένα εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων.

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα και η ορμή

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μας επιτρέπει να συσχετίσουμε την ορμή ενός σωματιδίου με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό.

$$\Sigma \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{\mathbf{v}}\right)}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

όπου η μάζα θεωρείται σταθερή.

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σωματιδίου ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο.

- Ο Νεύτωνας παρουσίασε τον δεύτερο νόμο στην παραπάνω μορφή.
- Η μορφή αυτή είναι πιο γενική από αυτή που έχουμε χρησιμοποιήσει μέχρι τώρα.
- Αυτή η μορφή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε περιπτώσεις όπου η μάζα μεταβάλλεται.

Διατήρηση της ορμής

Όταν δύο η περισσότερα σωματίδια σε ένα απομονωμένο σύστημα αλληλεπιδρούν, η συνολική ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

- Η ορμή του συστήματος διατηρείται, αλλά όχι απαραίτητα και η ορμή ενός μεμονωμένου σωματιδίου.
  - Να αποφεύγετε να εφαρμόζετε τη διατήρηση της ορμής σε ένα μόνο σωματίδιο.
- Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, η συνολική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος ισούται με την αρχική ορμή του.

Διατήρηση της ορμής (2)

Η διατήρηση της ορμής μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά με διάφορους τρόπους:

- $\vec{p}_{\text{συνολική}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{ σταθερή}$
- $\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$
- Αυτή είναι η μαθηματική διατύπωση για ένα νέο μοντέλο ανάλυσης, το μοντέλο του απομονωμένου συστήματος ως προς την ορμή.

Η συνολική ορμή διατηρείται ανεξάρτητα σε κάθε κατεύθυνση. Έτσι, σε μορφή συνιστωσών έχουμε:

- $p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx} \quad p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy} \quad p_{1iz} + p_{2iz} = p_{1fz} + p_{2fz}$

Η αρχή διατήρησης της ορμής μπορεί να εφαρμοστεί σε συστήματα με οποιοδήποτε πλήθος σωματιδίων.

Σύμφωνα με το μοντέλο του απομονωμένου ως προς την ορμή συστήματος, *όταν δύο η περισσότερα σωματίδια σε ένα απομονωμένο σύστημα αλληλεπιδρούν, η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή*.

Δυνάμεις και διατήρηση της ορμής

Η αρχή διατήρησης της ορμής δεν διαχωρίζει τις δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια του συστήματος ανάλογα με τα είδη τους.

Δεν αναφέρει αν οι δυνάμεις πρέπει να είναι συντηρητικές ή μη συντηρητικές.

Δεν αναφέρει αν οι δυνάμεις πρέπει να είναι σταθερές ή μεταβαλλόμενες.

Η μόνη προϋπόθεση είναι ότι οι δυνάμεις πρέπει να είναι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος.

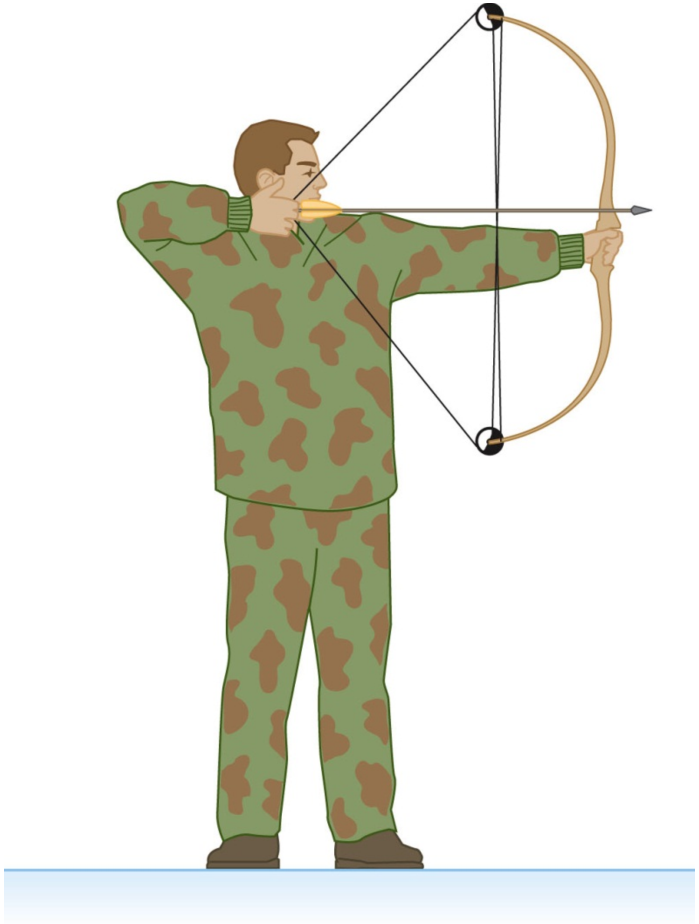
- Αυτό το γεγονός μάς δίνει μία ιδέα για την ευρύτητα του πεδίου του νέου αυτού μοντέλου.

Διατήρηση της ορμής – Το παράδειγμα του τοξότη

Ο τοξότης στέκεται επάνω σε μια επιφάνεια χωρίς τριβές (πάγος).

Προσεγγίσεις επίλυσης:

- Κίνηση – όχι
  - Δεν έχουμε πληροφορίες για τις ταχύτητες, κ.λπ.
- Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα – όχι
  - Δεν έχουμε πληροφορίες για τη δύναμη *F* ή την επιτάχυνση *a.*
- Ενέργεια – όχι
  - Δεν έχουμε πληροφορίες για το έργο ή την ενέργεια.
- Ορμή – ναι



Το παράδειγμα του τοξότη (2)

Μοντελοποίηση

- Το βέλος εκτοξεύεται προς τη μία κατεύθυνση και ο τοξότης ανακρούει (τινάζεται) προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Κατηγοριοποίηση

- Ορμή
    - Έστω ότι το σύστημα αποτελείται από τον τοξότη με το τόξο (σωματίδιο 1) και το βέλος (σωματίδιο 2).
    - Το σύστημα δεν είναι απομονωμένο στη διεύθυνση του άξονα *y* επειδή σε αυτό δρουν η βαρυτική δύναμη και η κάθετη δύναμη.
    - Εφόσον δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στη διεύθυνση του άξονα *x*, το σύστημα είναι απομονωμένο ως προς την ορμή στη συγκεκριμένη διεύθυνση.
        - Μπορούμε να εφαρμόσουμε το μοντέλο του απομονωμένου ως προς την ορμή συστήματος στη διεύθυνση του άξονα *x*.

Το παράδειγμα του τοξότη (3)

Ανάλυση

- Η συνολική ορμή πριν εκτοξευτεί το βέλος είναι ίση με 0.
- Η συνολική ορμή αφού εκτοξευτεί το βέλος είναι

$$\vec{\mathbf{p}}_{1f} + \vec{\mathbf{p}}_{2f} = 0 \rightarrow m_1\vec{\mathbf{v}}_{1f} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2f}$$

Ολοκλήρωση

- Η τελική ταχύτητα του τοξότη έχει αρνητικό πρόσημο.
  - Αυτό δείχνει ότι η κατεύθυνση της κίνησης του τοξότη είναι αντίθετη από αυτή της κίνησης του βέλους.
  - Ο τοξότης έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από το βέλος, άρα η ταχύτητά του είναι πολύ πιο μικρή.

Σημειώσεις

- Το πρόβλημα φαίνεται πολύ απλό, αλλά δεν μπορεί να λυθεί με τα προηγούμενα μοντέλα ανάλυσης.
- Το νέο μοντέλο που βασίζεται στην ορμή απλοποιεί τη λύση του.

Ώθηση και ορμή

Αν σε ένα σύστημα ασκείται μια συνισταμένη δύναμη από το περιβάλλον, τότε η ορμή του συστήματος μεταβάλλεται.

Αν σε ένα σύστημα ασκείται μια συνισταμένη δύναμη για κάποιο χρονικό διάστημα, τότε το σύστημα δεν είναι απομονωμένο ως προς την ορμή.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, $\vec{\mathbf{F}} = \dfrac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$

Λύνοντας ως προς $d\vec{\mathbf{p}}$ παίρνουμε $d\vec{\mathbf{p}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη μεταβολή της ορμής για το χρονικό διάστημα:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\mathbf{F}}\, dt = \vec{\mathbf{I}}$$

Το ολοκλήρωμα είναι η *ώθηση* $\vec{\mathbf{I}}$ της δύναμης που ασκείται στο σώμα κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος Δt.

Το θεώρημα ώθησης-ορμής

Η εξίσωση αυτή εκφράζει το **θεώρημα ώθησης-ορμής**: Η μεταβολή της ορμής ενός σωματιδίου ισούται με την ώθηση που προσδίδει στο σωματίδιο η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό.

- $\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{I}}$
- Η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.
- Έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας.
- Αποτελεί την πιο γενική μορφή της αρχής διατήρησης της ορμής και ονομάζεται εξίσωση διατήρησης της ορμής.
  - Αυτή η εξίσωση ισχύει για μη απομονωμένα συστήματα.
- Είναι η μαθηματική διατύπωση του **μοντέλου του μη απομονωμένου ως προς την ορμή συστήματος**.

Περισσότερα για την ώθηση

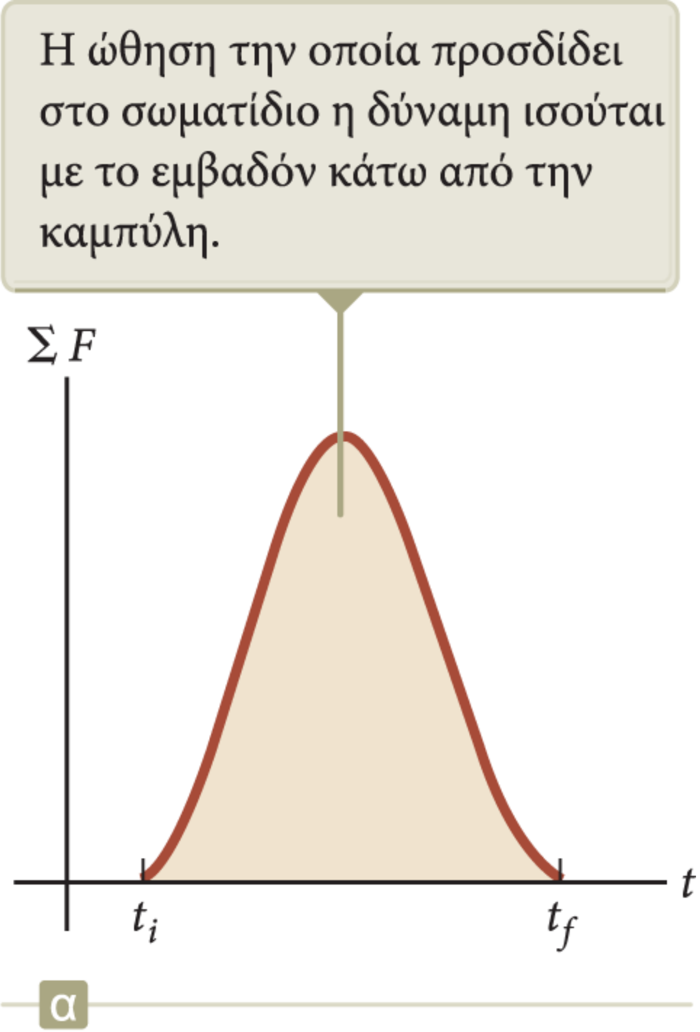
Η ώθηση είναι διανυσματικό μέγεθος.

Το μέτρο της ώθησης ισούται με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη δύναμης-χρόνου.

- Η δύναμη μπορεί να μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο.

Οι διαστάσεις της ώθησης είναι ML/T.

Η ώθηση δεν είναι ιδιότητα ενός σωματιδίου, αλλά ένα μέτρο της μεταβολής της ορμής του σωματιδίου.

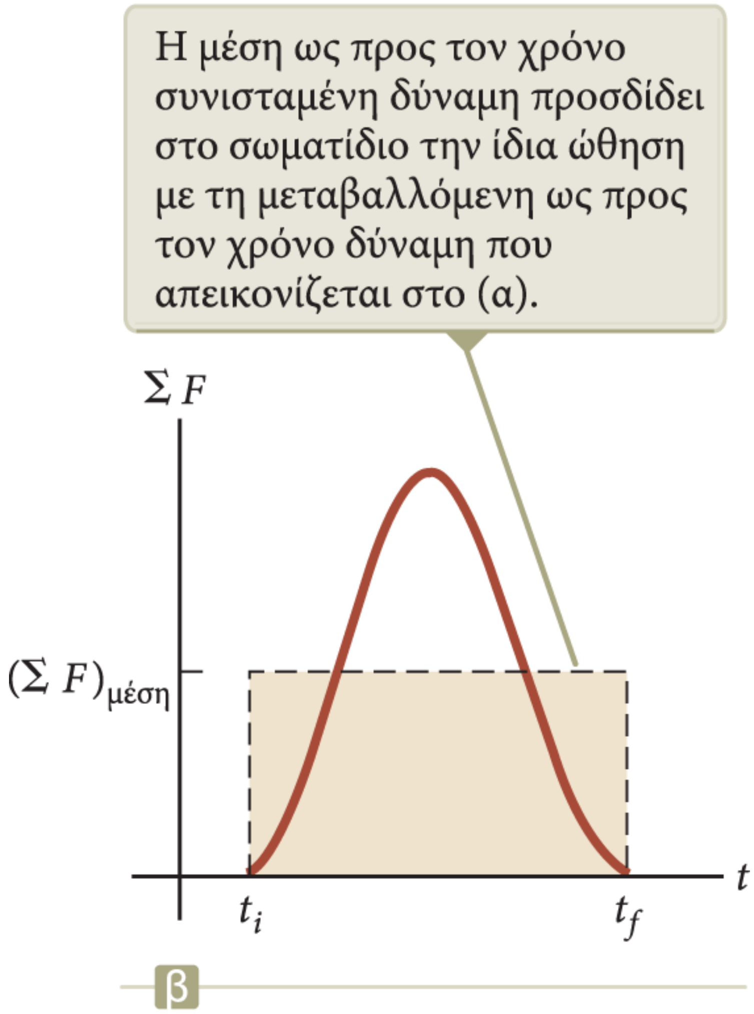


Ώθηση (*τελική διαφάνεια*)

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την ώθηση χρησιμοποιώντας τη μεσοσταθμισμένη ως προς τον χρόνο δύναμη.

$$\vec{\mathbf{I}} = \sum \vec{\mathbf{F}} \Delta t$$

Η σχέση αυτή δίνει την ίδια τιμή για την ώθηση που δίνει και ο υπολογισμός που βασίζεται στη χρονικά μεταβαλλόμενη δύναμη.



Η προσέγγιση της ώθησης

Σε πολλές περιπτώσεις, σε ένα σωματίδιο ασκείται μια δύναμη για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, η οποία είναι πολύ μεγαλύτερη από τις υπόλοιπες δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό.

Όταν χρησιμοποιούμε την προσέγγιση της ώθησης, κάνουμε την παραπάνω παραδοχή.

- Η προσέγγιση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην ανάλυση κρούσεων.

Αναφερόμαστε σε αυτή τη δύναμη ως *δύναμη ώθησης.*

Θεωρούμε ότι το σωματίδιο κινείται ελάχιστα κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Τα $\vec{\mathbf{p}}_i$ **και** $\vec{\mathbf{p}}_f$ συμβολίζουν την ορμή *αμέσως* πριν και *αμέσως* μετά την κρούση αντίστοιχα.

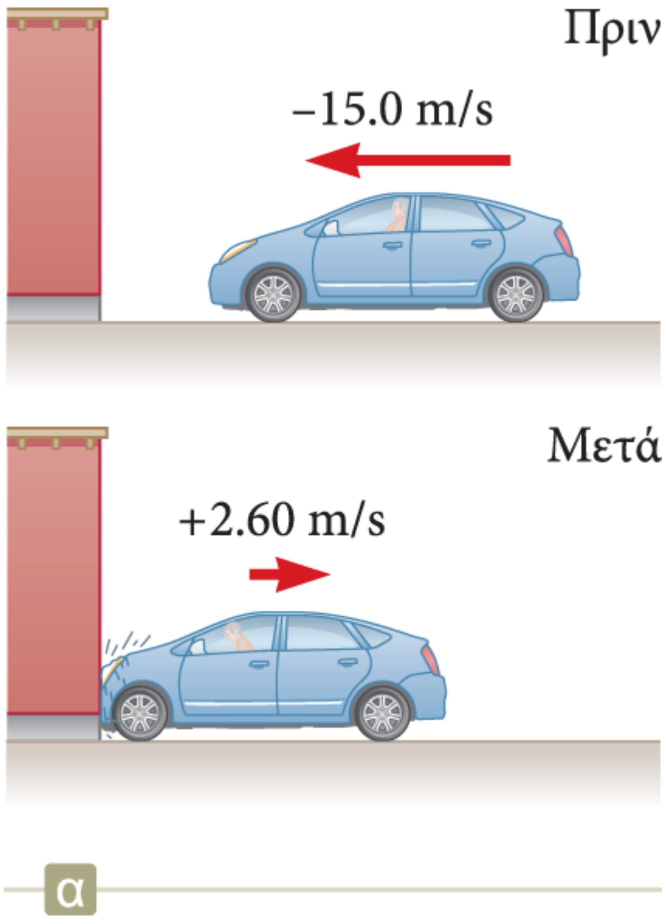
Ώθηση-ορμή: Το παράδειγμα της δοκιμής σύγκρουσης

Μοντελοποίηση

- Ο χρόνος σύγκρουσης είναι μικρός.
- Μπορούμε να φανταστούμε το αυτοκίνητο να σταματάει ακαριαία και μετά να κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση με μειωμένη ταχύτητα.

Κατηγοριοποίηση

- Υποθέτουμε ότι η συνισταμένη της δύναμης που ασκεί ο τοίχος και της τριβής που ασκεί το έδαφος στο αυτοκίνητο είναι μεγάλη σε σύγκριση με τις υπόλοιπες δυνάμεις.
- Η βαρυτική δύναμη και η κάθετη δύναμη είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν επηρεάζουν την οριζόντια ορμή.



Το παράδειγμα της δοκιμής σύγκρουσης (2)

Κατηγοριοποίηση (*συνέχεια*)

- Μπορούμε να εφαρμόσουμε την προσέγγιση της ώθησης.
- Η ορμή του αυτοκινήτου μεταβάλλεται λόγω ώθησης από το περιβάλλον.
- Άρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε το μοντέλο του μη απομονωμένου ως προς την ορμή συστήματος.

Ανάλυση

- Μπορούμε να προσδιορίσουμε την ορμή πριν και μετά τη σύγκρουση του αυτοκινήτου με τον τοίχο.
- Βρείτε
  - την αρχική ορμή
  - την τελική ορμή
  - την ώθηση
  - τη μέση δύναμη

Το παράδειγμα της δοκιμής σύγκρουσης (3)

Ολοκλήρωση

- Η συνισταμένη δύναμη αποτελεί συνδυασμό της κάθετης δύναμης που ασκεί στο αυτοκίνητο ο τοίχος και της δύναμης τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ των ελαστικών και του εδάφους καθώς παραμορφώνεται το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου.
- Ελέγξτε τα πρόσημα των ταχυτήτων για να βεβαιωθείτε ότι υποδεικνύουν σωστά τη φορά της κίνησης πριν και μετά τη σύγκρουση.

Κρούσεις – Χαρακτηριστικά

Ο όρος **κρούση** περιγράφει ένα γεγονός κατά τη διάρκεια του οποίου δύο σωματίδια πλησιάζουν μεταξύ τους και αλληλεπιδρούν μέσω δυνάμεων.

- Μπορεί να υπάρχει φυσική επαφή μεταξύ των σωματιδίων, αλλά η έννοια περιλαμβάνει και περιπτώσεις κατά τις οποίες έχουμε αλληλεπίδραση χωρίς φυσική επαφή.

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης θεωρούνται πολύ μεγαλύτερες από τις υπόλοιπες εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται.

- Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση της ώθησης.

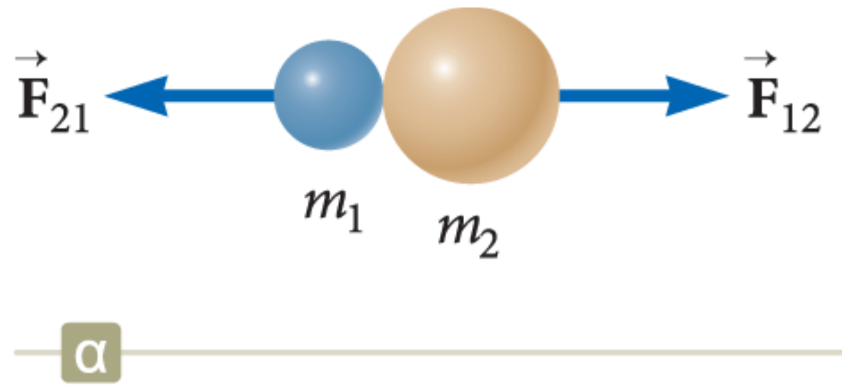
Κρούσεις – Παράδειγμα 1

Μια κρούση μπορεί να είναι αποτέλεσμα άμεσης επαφής.

Η δύναμη ώθησης μπορεί να μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο με πολύπλοκο τρόπο.

- Είναι εσωτερική δύναμη του συστήματος.

Η ορμή διατηρείται.

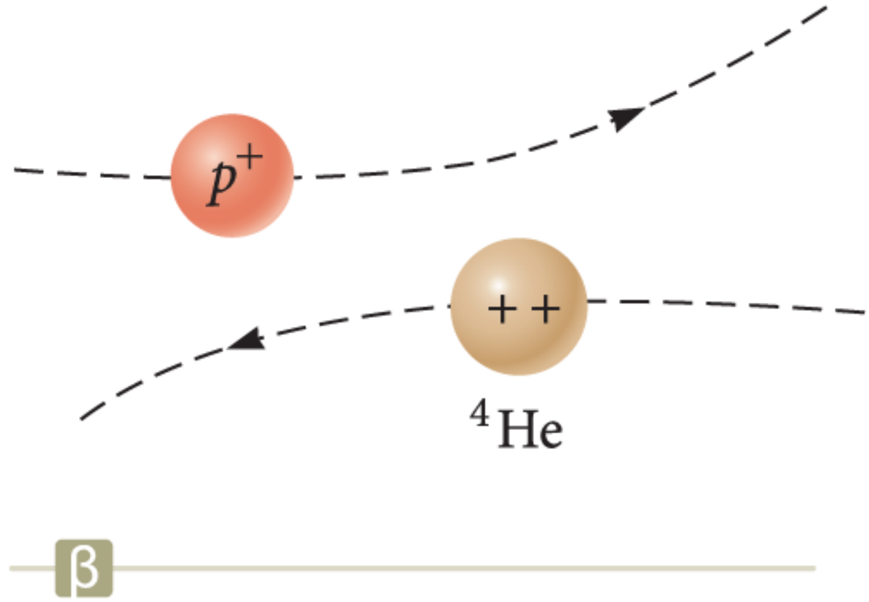


Κρούσεις – Παράδειγμα 2

Μια κρούση δεν είναι απαραίτητο να περιλαμβάνει φυσική επαφή μεταξύ των σωματιδίων.

Και σε αυτές τις περιπτώσεις, ασκούνται δυνάμεις μεταξύ των σωματιδίων.

Αυτό το είδος κρούσης μπορεί να αναλυθεί με τον ίδιο τρόπο όπως οι κρούσεις κατά τις οποίες υπάρχει φυσική επαφή.



Είδη κρούσεων

Στις ***ελαστικές*** κρούσεις, η ορμή και η κινητική ενέργεια διατηρούνται.

- Τέλειες ελαστικές κρούσεις συμβαίνουν μόνο σε μικροσκοπικό επίπεδο.
- Στον μακρόκοσμο, οι κρούσεις είναι μόνο κατά προσέγγιση ελαστικές.
  - Υπάρχει απώλεια ενέργειας λόγω παραμόρφωσης, ήχου, κ.λπ.
- Αυτές οι κρούσεις περιγράφονται από το μοντέλο του απομονωμένου ως προς την ενέργεια και την ορμή συστήματος.
  - Η κινητική ενέργεια δεν πρέπει να μετατρέπεται σε άλλα είδη ενέργειας μέσα στο σύστημα.

Στις ***ανελαστικές*** κρούσεις, η ορμή διατηρείται, αλλά όχι και η κινητική ενέργεια.

- Όταν τα σώματα δημιουργούν συσσωμάτωμα μετά την κρούση, η κρούση ονομάζεται ***απολύτως ανελαστική*** ή ***πλαστική***.

Κρούσεις (*συνέχεια*)

Στις ανελαστικές κρούσεις, υπάρχει απώλεια κινητικής ενέργειας, αλλά τα σώματα δεν δημιουργούν συσσωμάτωμα.

Οι ελαστικές και οι πλαστικές κρούσεις είναι ακραίες περιπτώσεις. Στην πραγματικότητα, οι περισσότερες κρούσεις αποτελούν ενδιάμεσες καταστάσεις.

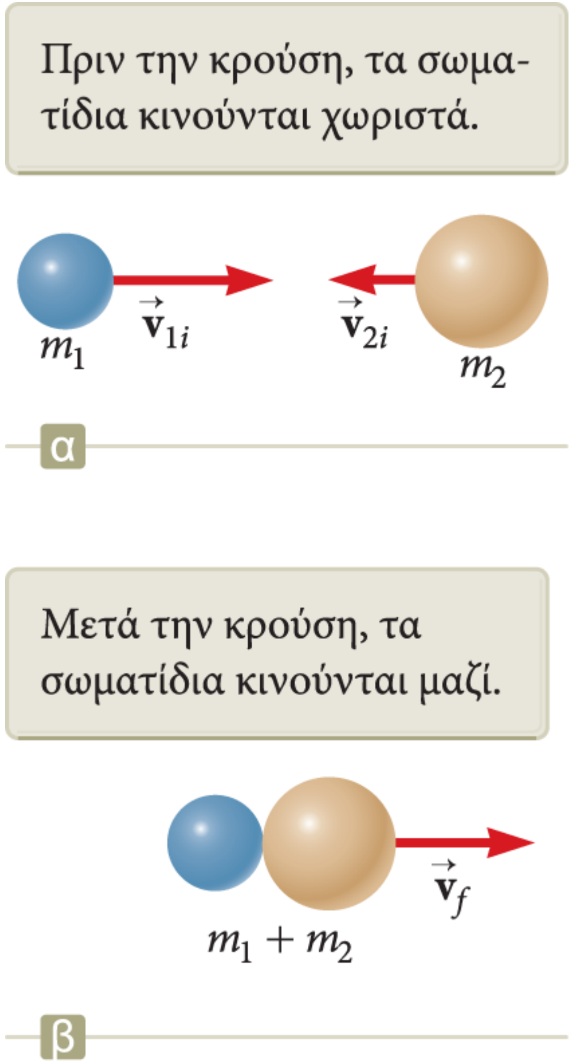
Η ορμή διατηρείται σε όλες τις κρούσεις.

Πλαστικές κρούσεις

Η ορμή ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται σε κάθε κρούση, οπότε η συνολική ορμή πριν την κρούση ισούται με τη συνολική ορμή του συσσωματώματος μετά την κρούση.

Επειδή τα σώματα δημιουργούν συσσωμάτωμα, κινούνται με την ίδια ταχύτητα μετά την κρούση.

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i} = \left(m_1 + m_2\right)\vec{\mathbf{v}}_f$$



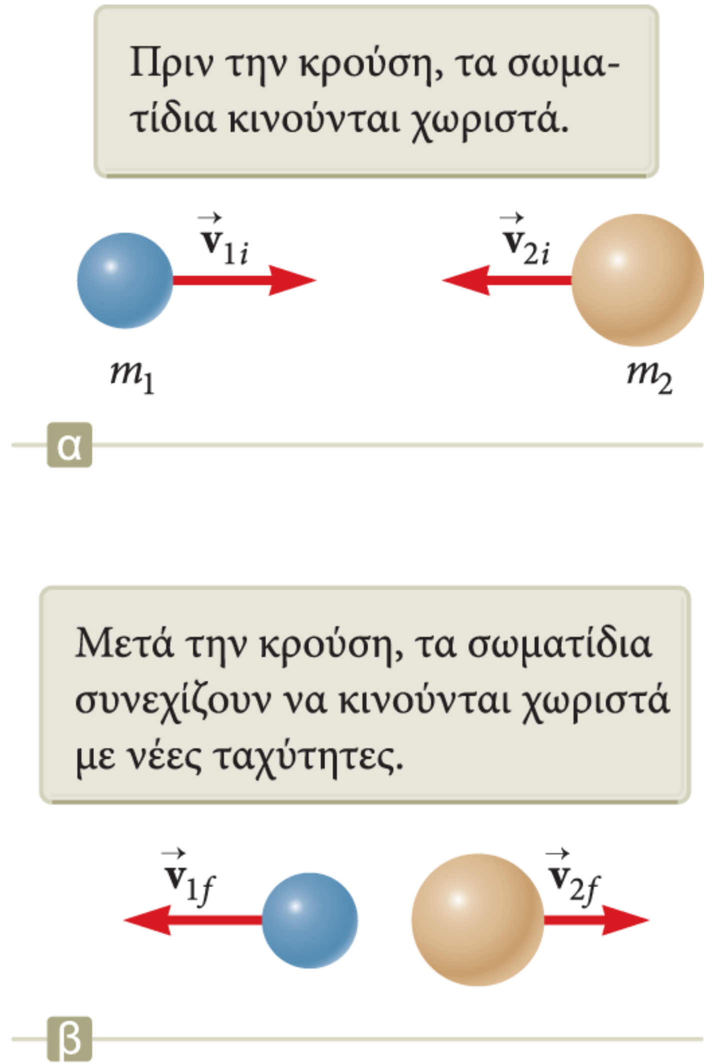
Ελαστικές κρούσεις

Η ορμή και η κινητική ενέργεια διατηρούνται.

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i} = m_1\vec{\mathbf{v}}_{1f} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2f}$$

$$\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_{2f}^2$$

Συνήθως υπάρχουν δύο άγνωστες μεταβλητές, οπότε χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις.



Ελαστικές κρούσεις (*συνέχεια*)

Μερικές φορές είναι δύσκολο να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση της κινητικής ενέργειας.

Μερικές αλγεβρικές πράξεις μας οδηγούν σε μια διαφορετική εξίσωση.

$$v_{1i} - v_{2i} = v_{1f} + v_{2f}$$

Λύνοντας το σύστημα που αποτελείται από την παραπάνω εξίσωση και την εξίσωση διατήρησης της ορμής μπορούμε να προσδιορίσουμε τις δύο άγνωστες μεταβλητές.

- Η εξίσωση αυτή ισχύει μόνο για ελαστικές κρούσεις μεταξύ δύο σωμάτων σε μία διάσταση.
- Με τη συγκεκριμένη εξίσωση αποφεύγουμε τη χρήση εξισώσεων με δευτεροβάθμιους όρους (όπως την εξίσωση της κινητικής ενέργειας).

Υπενθυμίζουμε ότι πρέπει να χρησιμοποιούνται τα κατάλληλα πρόσημα σε όλες τις ταχύτητες.

Ελαστικές κρούσεις (*τελική διαφάνεια*)

Παραδείγματα μερικών ειδικών περιπτώσεων:

- $m_1 = m_2$ – τα σωματίδια ανταλλάσσουν ταχύτητες
- Όταν ένα πολύ βαρύ σωματίδιο συγκρούεται μετωπικά με ένα πολύ ελαφρό σωματίδιο που είναι αρχικά ακίνητο, το βαρύ σωματίδιο συνεχίζει την κίνησή του χωρίς μεταβολές, ενώ το ελαφρό σωματίδιο αναπηδάει με ταχύτητα περίπου διπλάσια από την αρχική ταχύτητα που είχε το βαρύ σωματίδιο.
- Όταν ένα πολύ ελαφρύ σωματίδιο συγκρούεται μετωπικά με ένα πολύ βαρύ σωματίδιο που είναι αρχικά ακίνητο, το ελαφρύ σωματίδιο αντιστρέφει την κατεύθυνση της ταχύτητάς του, ενώ το βαρύ παραμένει σχεδόν ακίνητο.

Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων: Κρούσεις σε μία διάσταση

Μοντελοποίηση

- Σχηματίστε στο μυαλό σας την εικόνα της κρούσης.
- Σχεδιάστε απλά διαγράμματα των σωματιδίων πριν και μετά την κρούση.
- Συμπεριλάβετε τα κατάλληλα διανύσματα ταχύτητας.

Κατηγοριοποίηση

- Είναι το σύστημα σωματιδίων απομονωμένο;
- Είναι η κρούση ελαστική, ανελαστική, ή πλαστική;

Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων: Κρούσεις σε μία διάσταση

Ανάλυση

- Ορίστε την κατάλληλη μαθηματική αναπαράσταση για το πρόβλημα.
- Λύστε ως προς τις άγνωστες μεταβλητές (μία ή περισσότερες).

Ολοκλήρωση

- Ελέγξτε αν η απάντησή σας συμφωνεί με τη νοητική και την εικονογραφική αναπαράσταση.
- Ελέγξτε αν τα αποτελέσματά σας είναι ρεαλιστικά.

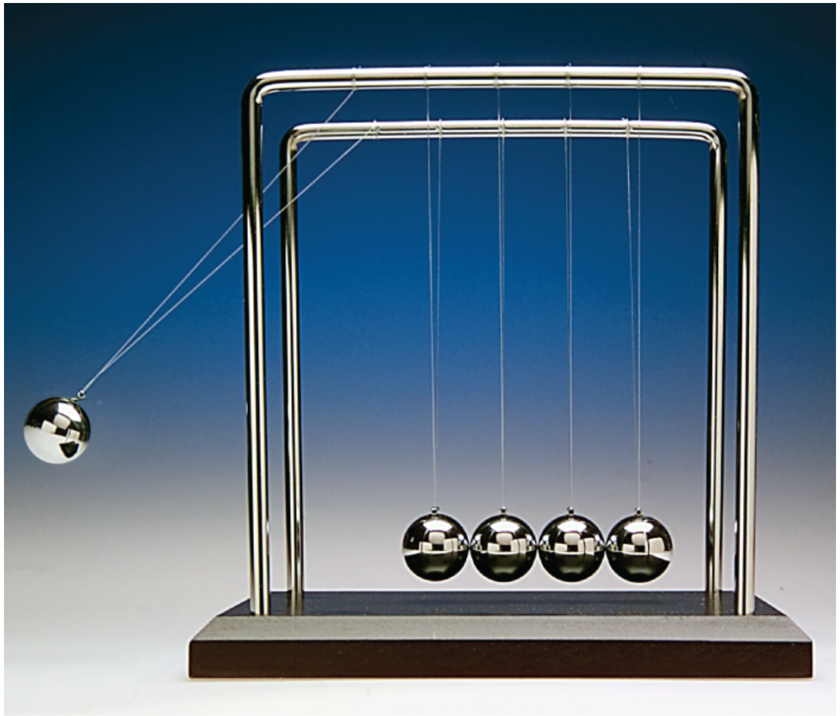
Παράδειγμα: Ανακούφιση από το άγχος

Μοντελοποίηση

- Φανταστείτε την πρώτη σφαίρα να προσκρούει στη συστοιχία από τα αριστερά θέτοντας σε κίνηση τις δύο τελευταίες σφαίρες προς τα δεξιά.
- Μπορεί να συμβεί αυτό;

Κατηγοριοποίηση

- Η κρούση διαρκεί ελάχιστα, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση της ώθησης.
- Κατηγοριοποιούμε το σύστημα ως απομονωμένο τόσο ως προς την ορμή όσο και ως προς την ενέργεια.
- Ελαστικές κρούσεις



α

Παράδειγμα: Ανακούφιση από το άγχος (*συνέχεια*)

Ανάλυση

- Ελέγξτε αν η ορμή διατηρείται.
  - Ναι
- Ελέγξτε αν η κινητική ενέργεια διατηρείται.
  - Όχι
  - Επομένως, η κρούση δεν μπορεί να είναι ελαστική.

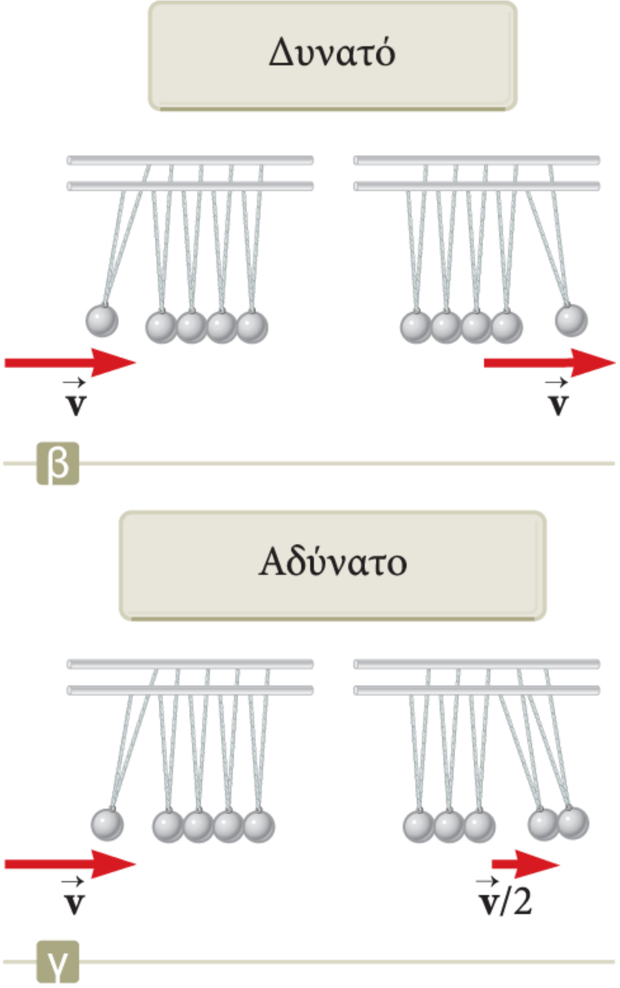
Ολοκλήρωση

- Δεν είναι δυνατόν οι δύο τελευταίες σφαίρες της συστοιχίας να κινηθούν προς τα δεξιά όταν προσκρούει στην αρχή της συστοιχίας μία μόνο σφαίρα.

Παράδειγμα: Ανακούφιση από το άγχος (*τελική διαφάνεια*)

Κατά τη διάρκεια μιας ελαστικής κρούσης, η ορμή και η ενέργεια του συστήματος διατηρούνται σταθερές. Στην προκειμένη περίπτωση αυτό συμβαίνει όταν:

- ο αριθμός των σφαιρών που προσκρούουν στη συστοιχία από αριστερά είναι ίδιος με τον αριθμό των σφαιρών που τίθενται σε κίνηση στο δεξιό άκρο της συστοιχίας
- οι δύο τελευταίες σφαίρες της συστοιχίας είναι κολλημένες μεταξύ τους έτσι ώστε να κινούνται ως ένα σώμα



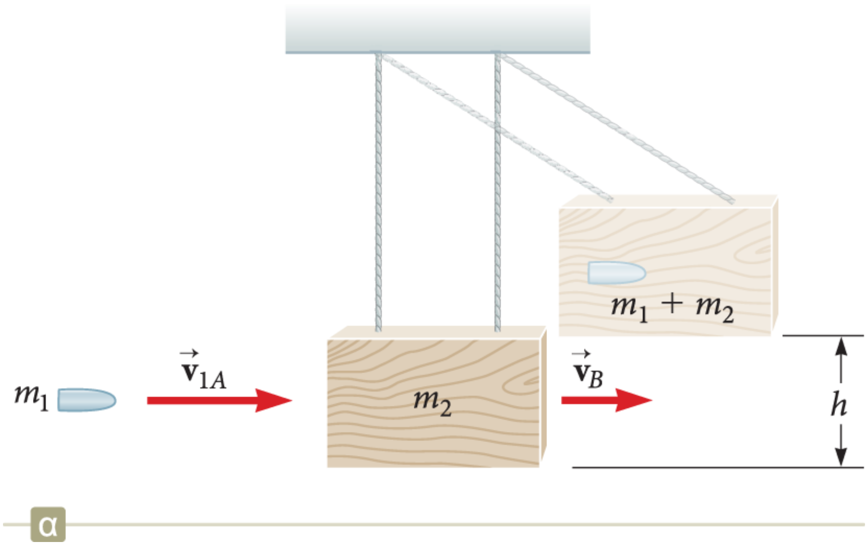
Παράδειγμα κρούσης – Το βαλλιστικό εκκρεμές

Μοντελοποίηση

- Παρατηρήστε το σχήμα.
- Το βλήμα εισέρχεται στο εκκρεμές, το οποίο αιωρείται μέχρι κάποιο ύψος όπου σταματάει στιγμιαία.

Κατηγοριοποίηση

- Το βλήμα και το ξύλινο σώμα αποτελούν ένα απομονωμένο ως προς την ορμή σύστημα.
- Πλαστική κρούση – το βλήμα σφηνώνεται στο ξύλινο σώμα.
- Η εξίσωση της ορμής έχει δύο άγνωστες μεταβλητές.
- Χρησιμοποιήστε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το εκκρεμές για να βρείτε την ταχύτητα αμέσως μετά την κρούση.
- Στη συνέχεια, μπορείτε να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας.



Το βαλλιστικό εκκρεμές (*συνέχεια*)

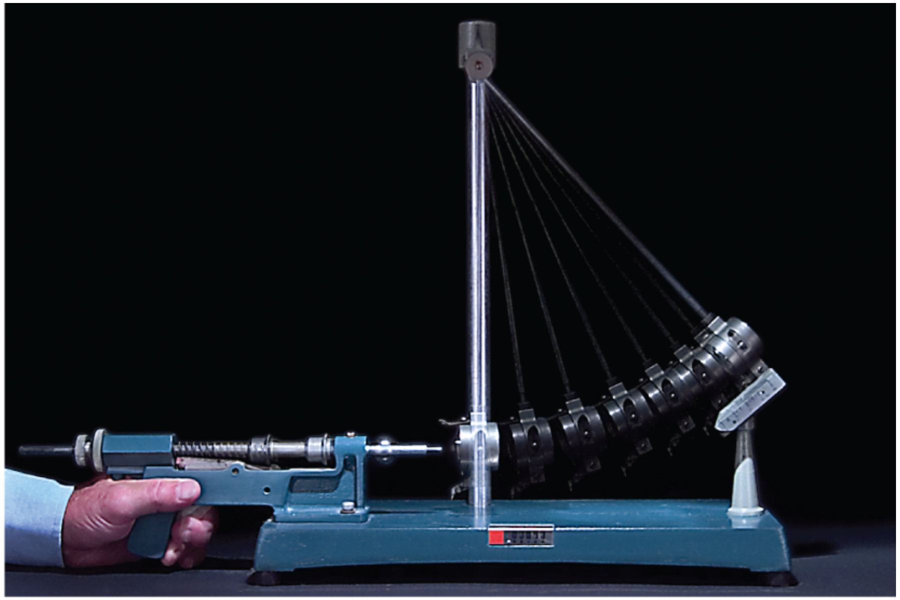
Στροβοσκοπική φωτογραφία βαλλιστικού εκκρεμούς.

Ανάλυση

- Εφαρμόστε τις εξισώσεις για την ορμή και τη διατήρηση της ενέργειας (κινητική και βαρυτική δυναμική ενέργεια).
- Λύστε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει.

Ολοκλήρωση

- Σημειώστε ότι το πρόβλημα περιλαμβάνει διαφορετικά συστήματα και διαφορετικά μοντέλα ανάλυσης.
- Κατά τη διάρκεια της πλαστικής κρούσης συμβαίνει μεταφορά ενέργειας.



β

Κρούσεις σε δύο διαστάσεις

Η ορμή διατηρείται σε όλες τις διευθύνσεις.

Χρησιμοποιήστε δείκτες για τον προσδιορισμό

- του σώματος
- της αρχικής και της τελικής τιμής
- των συνιστωσών της ταχύτητας

Αν η κρούση είναι ελαστική, ως δεύτερη εξίσωση χρησιμοποιήστε την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας.

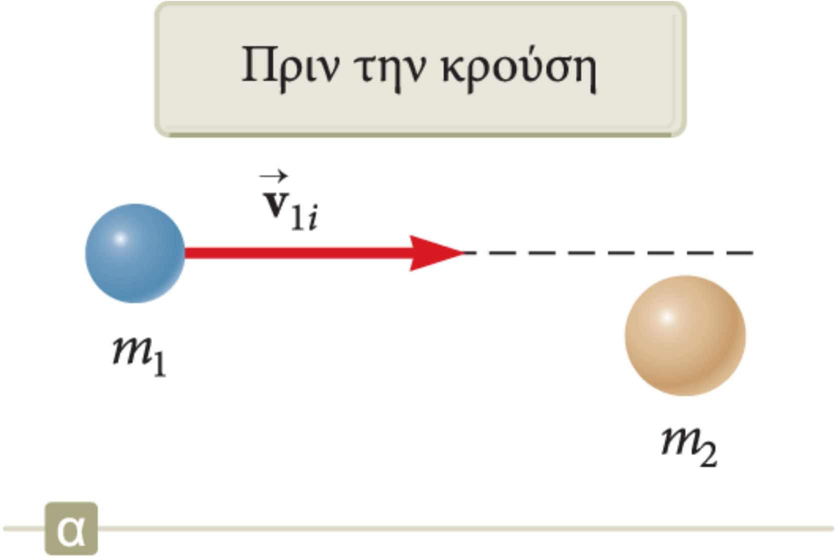
- Υπενθυμίζουμε ότι η απλούστερη εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για κρούσεις σε μία διάσταση.

Κρούσεις σε δύο διαστάσεις – Παράδειγμα

Το σωματίδιο 1 κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_{1i}$ ενώ το σωματίδιο 2 είναι αρχικά ακίνητο.

Στη διεύθυνση του άξονα *x*, η αρχική ορμή είναι $m_1 v_{1i}$.

Στη διεύθυνση του άξονα *y*, η αρχική ορμή είναι 0.



Κρούσεις σε δύο διαστάσεις – Παράδειγμα (*συνέχεια*)

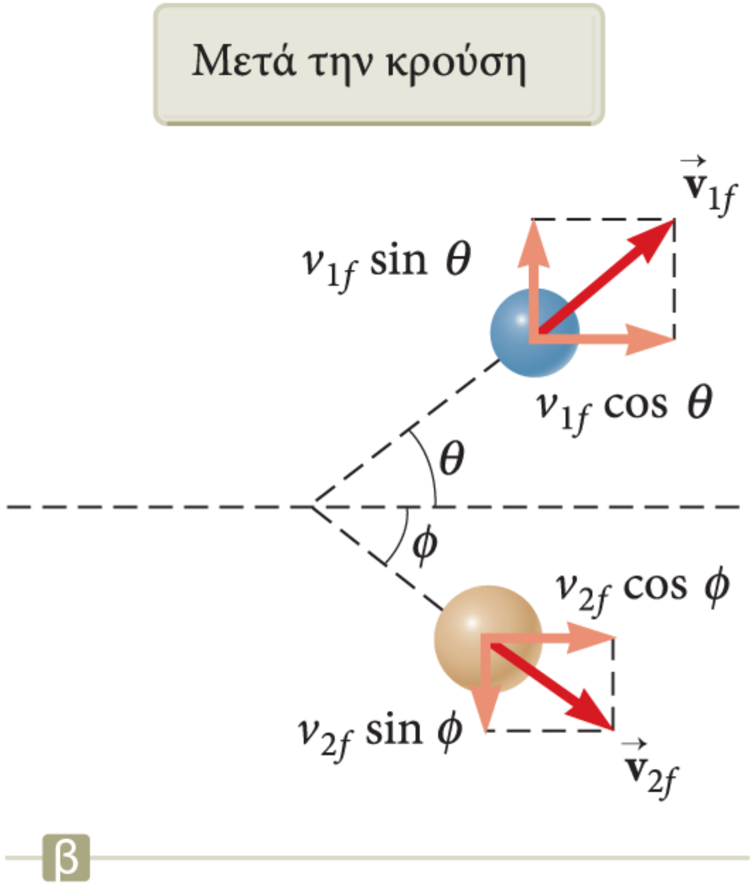
Μετά την κρούση, η ορμή στη διεύθυνση του άξονα *x* είναι $m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi$.

Μετά την κρούση, η ορμή στην διεύθυνση του άξονα *y* είναι $m_1 v_{1f} \sin\theta - m_2 v_{2f} \sin\phi$.

- Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι η συνιστώσα της ταχύτητας έχει φορά προς τα κάτω

Αν η κρούση είναι ελαστική, χρησιμοποιήστε την εξίσωση της κινητικής ενέργειας.

Αυτό είναι ένα παράδειγμα *πλάγιας κρούσης*.



Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων – Κρούσεις σε δύο διαστάσεις

Μοντελοποίηση

- Φανταστείτε την κρούση.
- Προβλέψτε κατά προσέγγιση τις κατευθύνσεις προς τις οποίες θα κινηθούν τα σωματίδια μετά την κρούση.
- Ορίστε ένα σύστημα συντεταγμένων και τις ταχύτητες ως προς αυτό.
  - Διευκολύνει να επιλέξετε τον άξονα *x* έτσι ώστε να συμπίπτει με μία από τις αρχικές ταχύτητες.
- Σχεδιάστε το σύστημα συντεταγμένων, τα διανύσματα ταχύτητας και τα σύμβολά τους, και συμπεριλάβετε όλα τα δεδομένα.

Κατηγοριοποίηση

- Είναι το σύστημα απομονωμένο;
- Αν ναι, κατηγοριοποιήστε την κρούση ως ελαστική, ανελαστική, ή πλαστική.

Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων – Κρούσεις σε δύο διαστάσεις (2)

Ανάλυση

- Γράψτε σχέσεις για τις συνιστώσες *x* και *y* της ορμής κάθε σώματος πριν και μετά την κρούση.
  - Χρησιμοποιήστε τα κατάλληλα πρόσημα για τις συνιστώσες των διανυσμάτων της ταχύτητας.
- Γράψτε σχέσεις για τη συνολική ορμή του συστήματος στη διεύθυνση του άξονα *x* πριν και μετά την κρούση και εξισώστε τις. Επαναλάβετε τη διαδικασία για τη συνολική ορμή στη διεύθυνση του άξονα *y*.
- Αν η κρούση είναι ανελαστική, η κινητική ενέργεια του συστήματος δεν διατηρείται, οπότε μπορεί να χρειαστείτε πρόσθετα δεδομένα.
- Αν η κρούση είναι πλαστική, οι τελικές ταχύτητες των δύο σωμάτων είναι ίσες. Λύστε τις εξισώσεις της ορμής ως προς τις άγνωστες μεταβλητές.

Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων – Κρούσεις σε δύο διαστάσεις (3)

Ανάλυση (*συνέχεια*)

- Αν η κρούση είναι ελαστική, η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.
  - Εξισώστε τη συνολική κινητική ενέργεια πριν την κρούση με τη συνολική κινητική ενέργεια μετά την κρούση για να βρείτε μία επιπλέον σχέση μεταξύ των ταχυτήτων.

Ολοκλήρωση

- Ελέγξτε αν οι απαντήσεις σας συμφωνούν με τη νοητική και την εικονογραφική αναπαράσταση.
- Ελέγξτε αν τα αποτελέσματά σας είναι ρεαλιστικά.

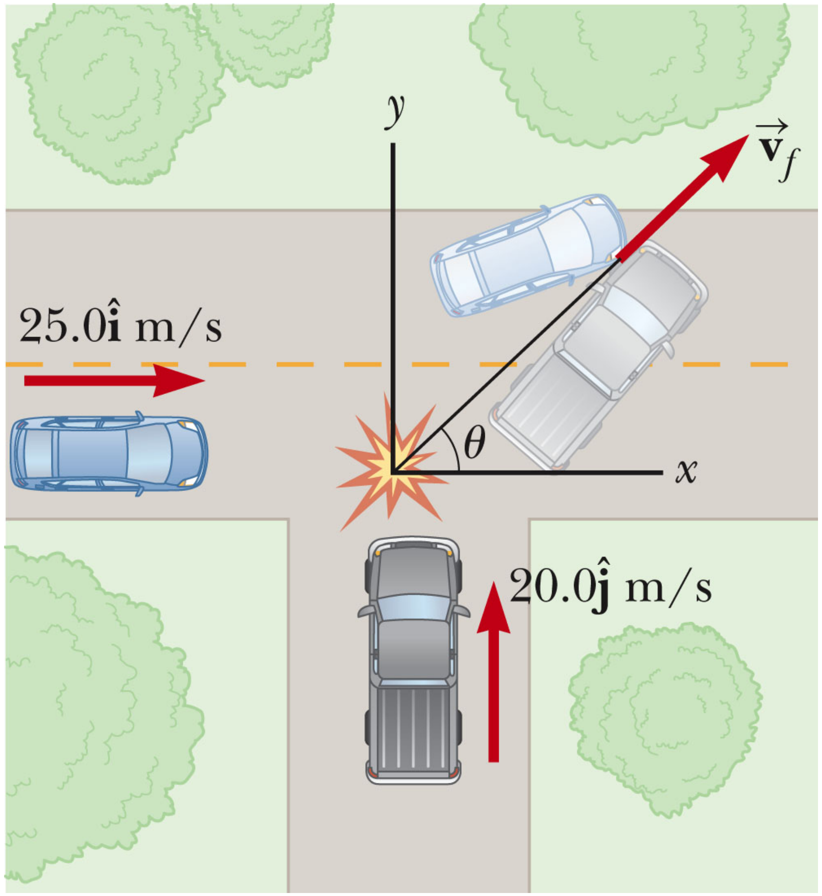
Παράδειγμα κρούσης σε δύο διαστάσεις

Μοντελοποίηση

- Δείτε την εικόνα.
- Ορίστε την ανατολική κατεύθυνση ως τη θετική κατεύθυνση του άξονα *x* και τη βόρεια κατεύθυνση ως τη θετική κατεύθυνση του άξονα *y*.

Κατηγοριοποίηση

- Αγνοήστε την τριβή.
- Μοντελοποιήστε τα οχήματα ως σωματίδια.
- Μοντελοποιήστε το σύστημα ως απομονωμένο ως προς την ορμή.
- Η κρούση είναι πλαστική.
  - Τα οχήματα δημιουργούν συσσωμάτωμα.



Παράδειγμα κρούσης σε δύο διαστάσεις (*συνέχεια*)

Ανάλυση

- Πριν την κρούση, η συνολική ορμή του επιβατηγού αυτοκινήτου είναι στη διεύθυνση του άξονα *x*, ενώ η συνολική ορμή του φορτηγού αυτοκινήτου είναι στη διεύθυνση του άξονα *y*.
- Μετά την κρούση, και τα δύο οχήματα έχουν συνιστώσες ορμής στις διευθύνσεις *x* και *y*.
- Γράψτε τις σχέσεις για την αρχική και την τελική ορμή και στις δύο διευθύνσεις.
  - Υπολογίστε τις εξισώσεις που δεν έχουν αγνώστους.
- Λύστε ως προς τις άγνωστες μεταβλητές.

Ολοκλήρωση

- Ελέγξτε αν τα αποτελέσματά σας είναι ρεαλιστικά.

Κέντρο μάζας

Κάθε σύστημα ή σώμα έχει ένα ειδικό σημείο, που ονομάζεται ***κέντρο μάζας***, το οποίο κινείται όπως θα κινούνταν αν όλη η μάζα του συστήματος ήταν συγκεντρωμένη σε αυτό.

Υπό την επίδραση μιας εξωτερικής συνισταμένης δύναμης, το σύστημα θα κινηθεί όπως θα κινούνταν αν η δύναμη δρούσε σε ένα μόνο σωματίδιο μάζας M στο κέντρο μάζας του συστήματος.

- Το M είναι η συνολική μάζα του συστήματος.

Η συμπεριφορά αυτή είναι ανεξάρτητη από άλλες κινήσεις, όπως την περιστροφή, την ταλάντωση, ή την παραμόρφωση του συστήματος.

- Αυτό είναι το μοντέλο του σωματιδίου.

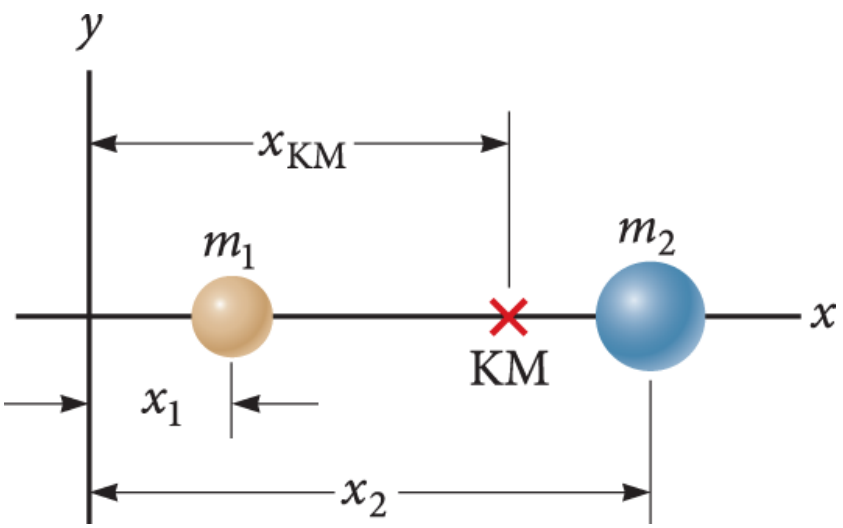
Κέντρο μάζας, συντεταγμένες

Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας είναι

$$x_{\text{KM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \qquad y_{\text{KM}} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}$$

$$z_{\text{KM}} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

- Το *M* είναι η συνολική μάζα του συστήματος.

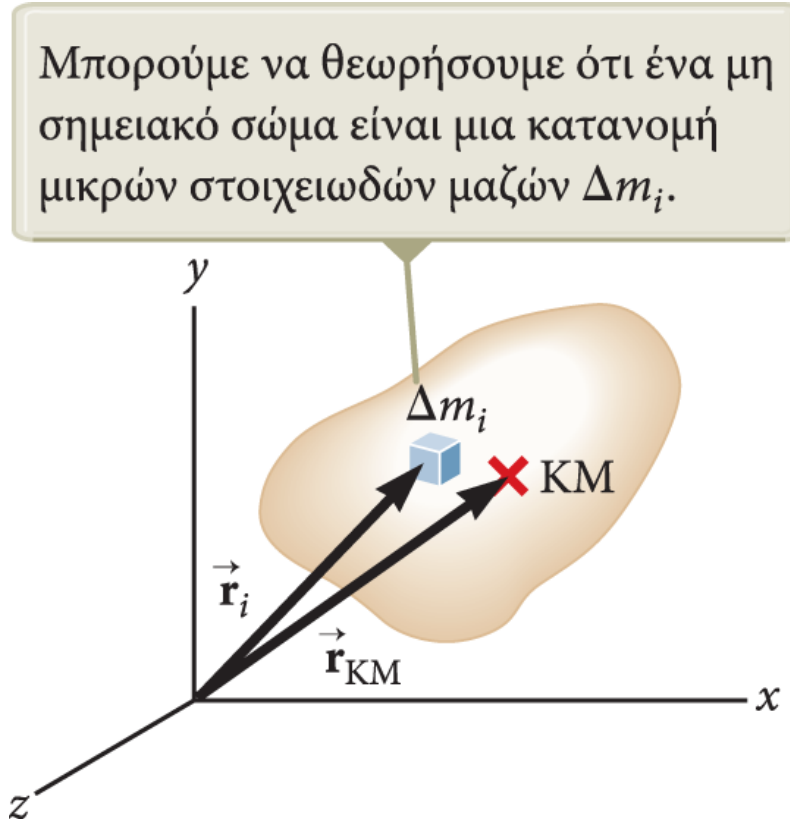


Κέντρο μάζας, μη σημειακό σώμα

Η ανάλυση είναι παρόμοια στην περίπτωση ενός μη σημειακού σώματος.

Θεωρήστε το μη σημειακό σώμα ως ένα σύστημα που περιέχει ένα μεγάλο πλήθος από στοιχεία μικρής μάζας.

Επειδή η απόσταση μεταξύ των στοιχείων είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σώμα έχει συνεχή κατανομή μάζας.



Κέντρο μάζας, θέση

Σε τρεις διαστάσεις, εντοπίζουμε το κέντρο μάζας με το διάνυσμα θέσης του, $\vec{\mathbf{r}}_{\text{KM}}$.

- Για ένα σύστημα σωματιδίων,

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{KM}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$$

  - Το $\vec{\mathbf{r}}_i$ είναι η θέση του *i*-οστού σωματιδίου, που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r}_i = x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$$

- Για ένα μη σημειακό σώμα,

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{KM}} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\, dm$$

Κέντρο μάζας, συμμετρικό σώμα

Το κέντρο μάζας οποιουδήποτε ομογενούς και συμμετρικού σώματος βρίσκεται επάνω σε έναν άξονα συμμετρίας και σε οποιοδήποτε επίπεδο συμμετρίας.

Κέντρο βάρους

Η βαρυτική δύναμη δρα σε κάθε μικρό στοιχείο μάζας ενός μη σημειακού αντικειμένου.

Η συνολική επίδραση όλων αυτών των δυνάμεων είναι ισοδύναμη με την επίδραση μίας δύναμης $M\vec{\mathbf{g}}$ που δρα πάνω σε ένα ειδικό σημείο, το οποίο ονομάζεται **κέντρο βάρους**.

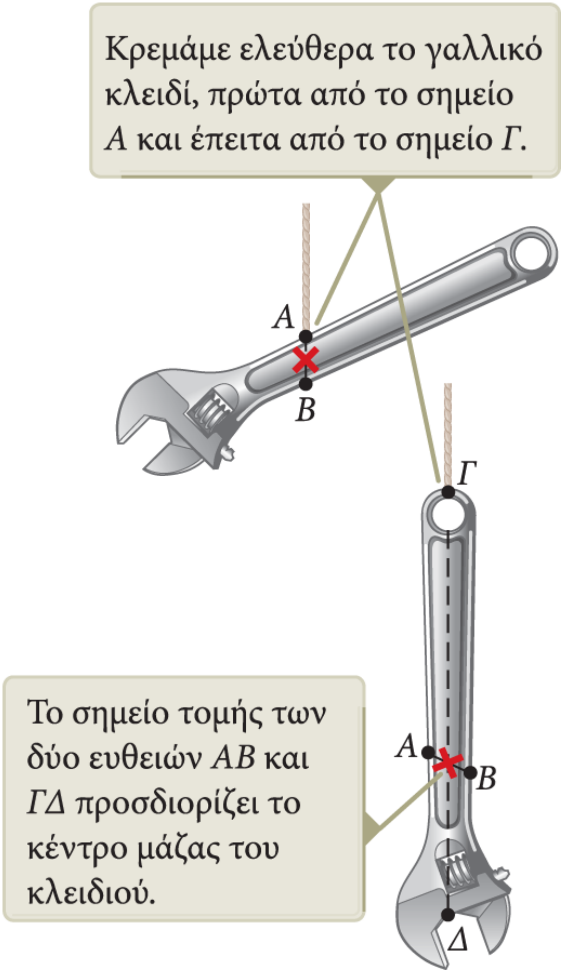
- Αν η επιτάχυνση $\vec{\mathbf{g}}$ είναι σταθερή σε όλη την κατανομή μάζας, το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο μάζας.

Εύρεση του κέντρου βάρους, σώμα με ακανόνιστο σχήμα

Κρεμάμε το σώμα από ένα σημείο.

Στη συνέχεια, το κρεμάμε από ένα άλλο σημείο.

Το κέντρο βάρους βρίσκεται στο σημείο τομής των δύο ευθειών *ΑΒ* και *ΓΔ* που προκύπτουν, στο μέσον της εγκάρσιας διάστασης του κλειδιού.



Κέντρο μάζας, ράβδος

Μοντελοποίηση

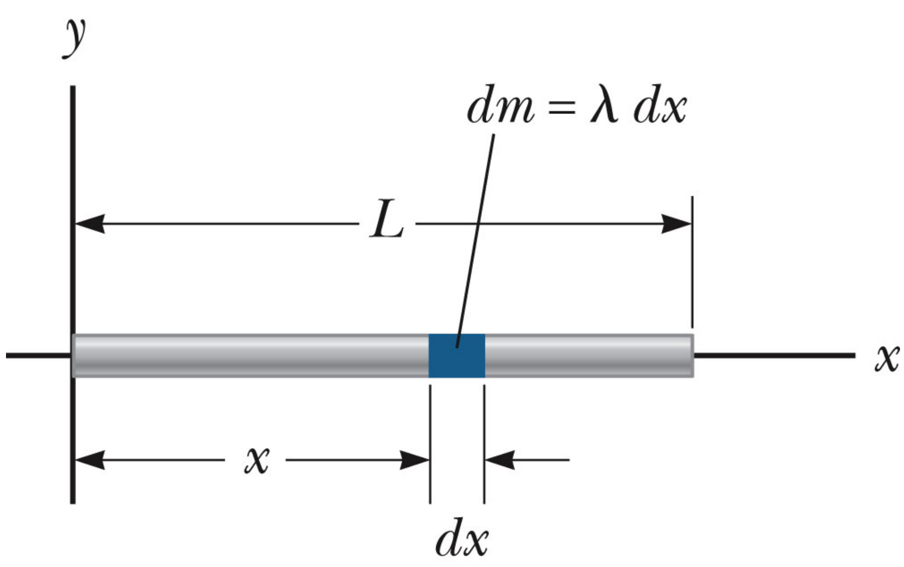
- Βρείτε το κέντρο μάζας μιας ράβδου με μάζα *M* και μήκος *L*.
- Το κέντρο μάζας βρίσκεται στον άξονα *x* (ή $y_{KM} = z_{KM} = 0$).

Κατηγοριοποίηση

- Πρόβλημα ανάλυσης

Ανάλυση

- Χρησιμοποιήστε την εξίσωση για το x_{KM}.
- $x_{KM} = L/2$



Κίνηση συστήματος σωματιδίων

Ας υποθέσουμε ότι η συνολική μάζα *M* του συστήματος παραμένει σταθερή.

Μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση του συστήματος συναρτήσει της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του.

Μπορούμε επίσης να περιγράψουμε την ορμή του συστήματος εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα.

Ταχύτητα και ορμή ενός συστήματος σωματιδίων

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας ενός συστήματος σωματιδίων είναι

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{KM}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{\text{KM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

Η ορμή μπορεί να εκφραστεί ως

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\text{KM}} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_{\text{συν.}}$$

Η συνολική ορμή του συστήματος ισούται με το γινόμενο της συνολικής μάζας επί την ταχύτητα του κέντρου μάζας.

Επιτάχυνση και δύναμη σε ένα σύστημα σωματιδίων

Μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας παραγωγίζοντας την ταχύτητα ως προς τον χρόνο.

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{KM}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{KM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{a}}_i$$

Η επιτάχυνση και η δύναμη συνδέονται μέσω της σχέσης

$$M\vec{\mathbf{a}}_{\text{KM}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i$$

Αν αθροίσουμε όλα τα διανύσματα εσωτερικών δυνάμεων, αυτά απαλείφονται κατά ζεύγη και βρίσκουμε ότι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σύστημα προκαλείται μόνο από εξωτερικές δυνάμεις.

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για ένα σύστημα σωματιδίων

Επειδή ασκούνται μόνο εξωτερικές δυνάμεις, η συνισταμένη εξωτερική δύναμη ισούται με τη συνολική μάζα του συστήματος επί την επιτάχυνση του κέντρου μάζας:

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{εξωτ.}} = M\vec{\mathbf{a}}_{\text{ΚΜ}}$$

Το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωματιδίων που έχει συνολική μάζα *M* κινείται όπως θα κινηθεί ένα ισοδύναμο σωματίδιο μάζας *M*, υπό την επίδραση της συνισταμένης εξωτερικής δύναμης που ασκείται στο σύστημα.

Ώθηση και ορμή ενός συστήματος σωματιδίων

Η ώθηση που προσδίδουν στο σύστημα οι εξωτερικές δυνάμεις είναι

$$\int \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{εξωτ.}} dt = M \int d\vec{\mathbf{v}}_{\text{KM}} \rightarrow \Delta \vec{\mathbf{p}}_{\text{συν.}} = \vec{\mathbf{I}}$$

Η συνολική ορμή ενός συστήματος σωματιδίων διατηρείται αν στο σύστημα δεν ασκείται συνισταμένη εξωτερική δύναμη.

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\text{KM}} = \vec{\mathbf{p}}_{\text{συν.}} = \text{σταθερή όταν } \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{εξωτ.}} = 0$$

Σε ένα απομονωμένο σύστημα σωματιδίων, τόσο η συνολική ορμή όσο και η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι σταθερές ως προς τον χρόνο.

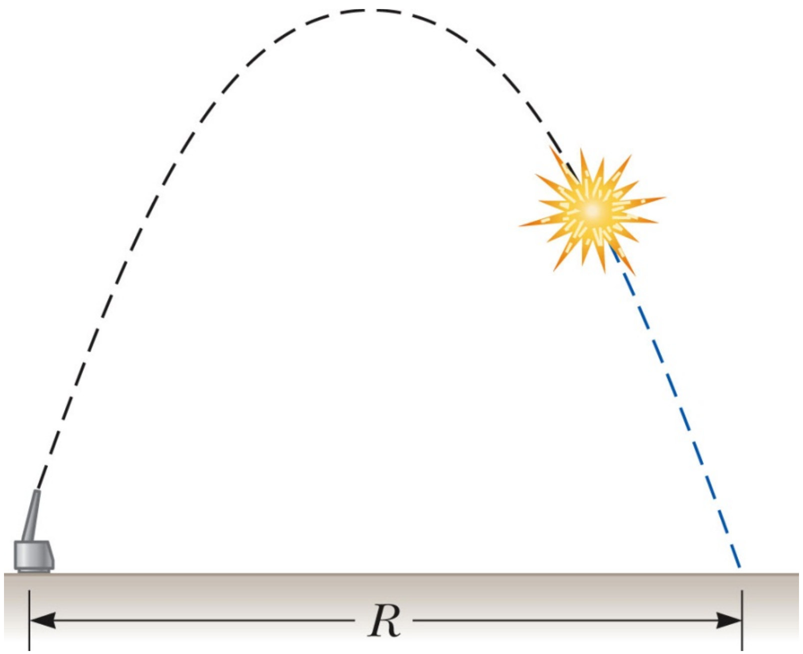
- Αυτή η σχέση αποτελεί γενίκευση του μοντέλου του απομονωμένου ως προς την ορμή συστήματος για ένα σύστημα πολλών σωματιδίων.

Κίνηση του κέντρου μάζας – Παράδειγμα

Ένα βλήμα εκτοξεύεται και ξαφνικά εκρήγνυται εν πτήσει.

Αν το βλήμα δεν είχε εκραγεί, θα ακολουθούσε την τροχιά που δείχνει η διακεκομμένη γραμμή.

Μετά την έκρηξη, το κέντρο μάζας των θραυσμάτων ακολουθεί τη διακεκομμένη γραμμή, δηλαδή την ίδια παραβολική τροχιά που θα ακολουθούσε το βλήμα αν δεν είχε εκραγεί.



Παραμορφώσιμα συστήματα

Για να αναλύσουμε την κίνηση ενός παραμορφώσιμου συστήματος, χρησιμοποιούμε την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας και το θεώρημα ώθησης-ορμής.

$$\Delta E_{\text{συστ.}} = \sum T \rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

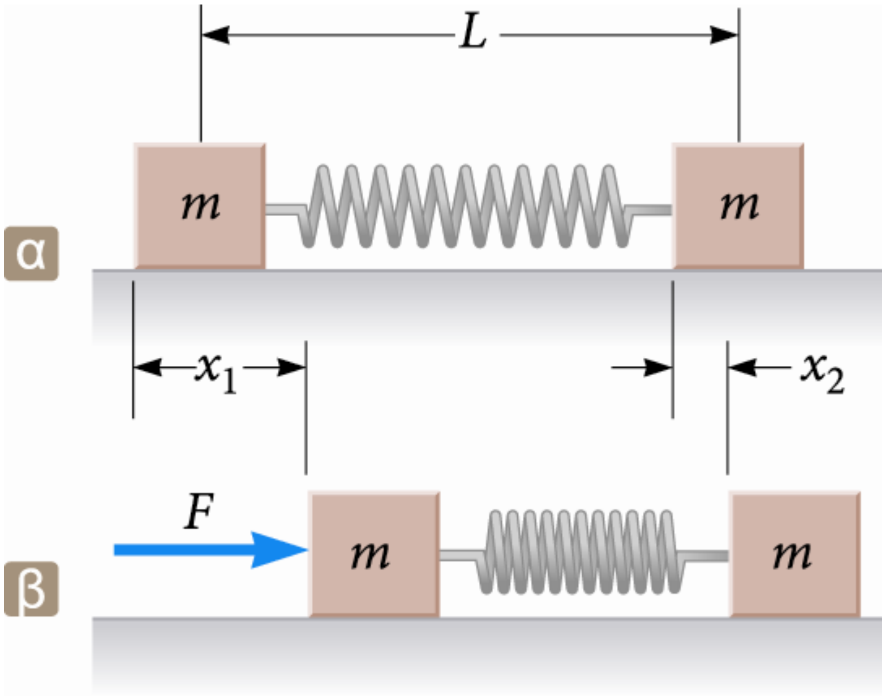
$$\Delta \vec{\mathbf{p}}_{\text{συν.}} = \vec{\mathbf{I}} \rightarrow m\Delta\vec{\mathbf{v}} = \int \vec{\mathbf{F}}_{\text{εξωτ.}} dt$$

- Αν η δύναμη είναι σταθερή, το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί εύκολα.

Παραμορφώσιμο σύστημα (ελατήριο) – Παράδειγμα

Μοντελοποίηση

- Δείτε την εικόνα.
- Αν σπρώξουμε τον αριστερό κύβο, αυτός θα κινηθεί προς τα δεξιά, και το ελατήριο θα συμπιεστεί.
- Σε κάθε χρονική στιγμή, οι κύβοι κινούνται γενικά με διαφορετικές ταχύτητες.
- Όταν σταματήσουμε να ασκούμε δύναμη, οι κύβοι ταλαντώνονται μπρος-πίσω ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος.



Ελατήριο – Παράδειγμα (*συνέχεια*)

Κατηγοριοποίηση

- Το σύστημα είναι μη απομονωμένο ως προς την ορμή και την ενέργεια.
  - Στο σύστημα παράγει έργο η ασκούμενη δύναμη.
- Το σύστημα είναι παραμορφώσιμο.
- Η ασκούμενη δύναμη είναι σταθερή, άρα η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του είναι σταθερή.
- Μοντελοποιούμε το σύστημα ως σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση.

Ανάλυση

- Εφαρμόστε το θεώρημα ώθησης-ορμής.
- Λύστε ως προς v_{KM}.

Ελατήριο – Παράδειγμα (*τελική διαφάνεια*)

Ανάλυση (*συνέχεια*)

- Βρείτε τις ενέργειες.

Ολοκλήρωση

- Οι απαντήσεις δεν εξαρτώνται από το μήκος του ελατηρίου, τη σταθερά του ελατηρίου, ή το χρονικό διάστημα.

Προώθηση πυραύλων

Στην κίνηση συνηθισμένων οχημάτων όπως τα αυτοκίνητα, η κίνηση προκαλείται από τη δύναμη της τριβής.

- Το αυτοκίνητο μοντελοποιείται ως μη απομονωμένο σύστημα ως προς την ορμή.
- Το αυτοκίνητο δέχεται ώθηση από τον δρόμο, η οποία μεταβάλλει την ορμή του.

Η λειτουργία ενός πυραύλου εξαρτάται από τον νόμο διατήρησης της ορμής όπως αυτός εφαρμόζεται σε απομονωμένα συστήματα, όπου το σύστημα είναι ο πύραυλος μαζί με τα καύσιμα που αποβάλλονται με τη μορφή καυσαερίων στο διάστημα.

Όταν ο πύραυλος κινείται στο διάστημα, η ορμή του μεταβάλλεται καθώς ένα μέρος της μάζας του αποβάλλεται με τη μορφή καυσαερίων.

- Τα καυσαέρια έχουν ορμή όταν αποβάλλονται από τον κινητήρα, οπότε ο πύραυλος δέχεται μια αντισταθμιστική ορμή προς την αντίθετη κατεύθυνση.
- Στο διάστημα, το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται ομαλά.

Προώθηση πυραύλων (2)

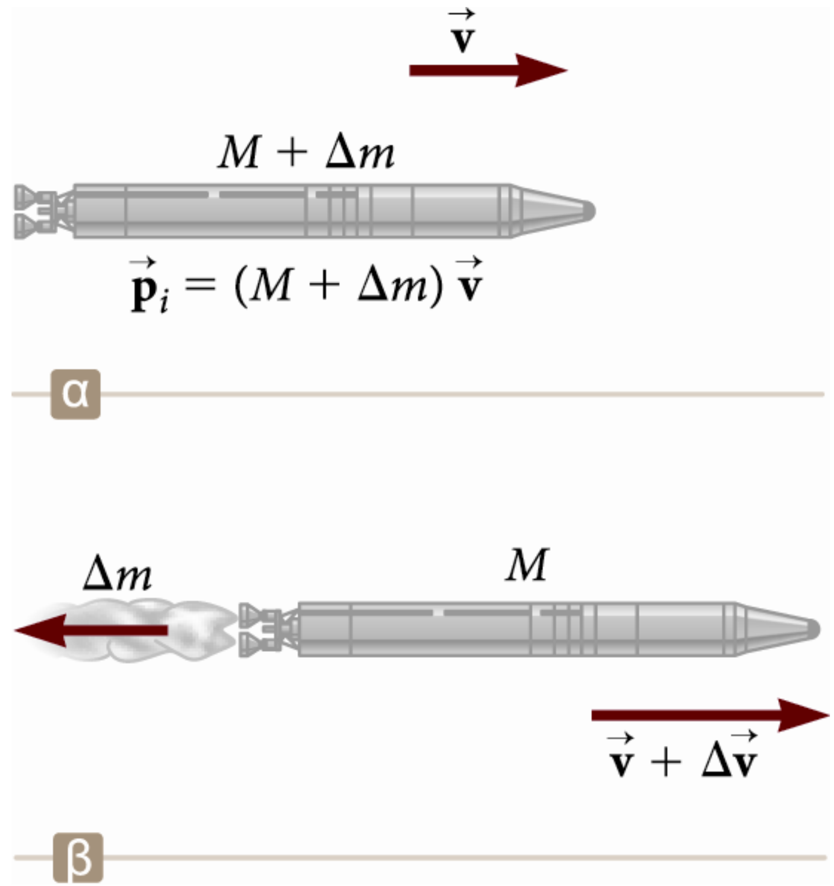
Τη χρονική στιγμή t_i, η αρχική μάζα του πυραύλου μαζί με τα καύσιμά του είναι $M + \Delta m$ και το μέτρο της ταχύτητάς του είναι v.

Η αρχική ορμή του συστήματος είναι

$$\vec{\mathbf{p}}_i = (M + \Delta m)\vec{\mathbf{v}}$$

Τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$, η μάζα του πυραύλου έχει μειωθεί σε M και μια ποσότητα Δm των καυσίμων του έχει εκτοξευτεί στο διάστημα.

Το μέτρο της ταχύτητας του πυραύλου έχει αυξηθεί κατά Δv.



Προώθηση πυραύλων (3)

Η βασική εξίσωση για την προώθηση πυραύλων είναι

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

Η αύξηση του μέτρου της ταχύτητας του πυραύλου είναι ανάλογη προς το μέτρο της ταχύτητας v_e των καυσαερίων του.

- Άρα, η ταχύτητα των καυσαερίων θα πρέπει να έχει πολύ μεγάλη τιμή.

Η αύξηση του μέτρου της ταχύτητας του πυραύλου είναι ανάλογη προς τον φυσικό λογάριθμο του λόγου M_i/M_f.

- Συνεπώς, ο λόγος αυτός θα πρέπει να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη τιμή. Δηλαδή, η μάζα του πυραύλου χωρίς τα καύσιμα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη και ο πύραυλος πρέπει να μεταφέρει όσο το δυνατόν περισσότερα καύσιμα.

Ώση

Η ώση, ή προωστική δύναμη, που δέχεται ο πύραυλος είναι η δύναμη που ασκούν σε αυτόν τα καυσαέρια.

$$\text{Ώση} = M\frac{dv}{dt} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$$

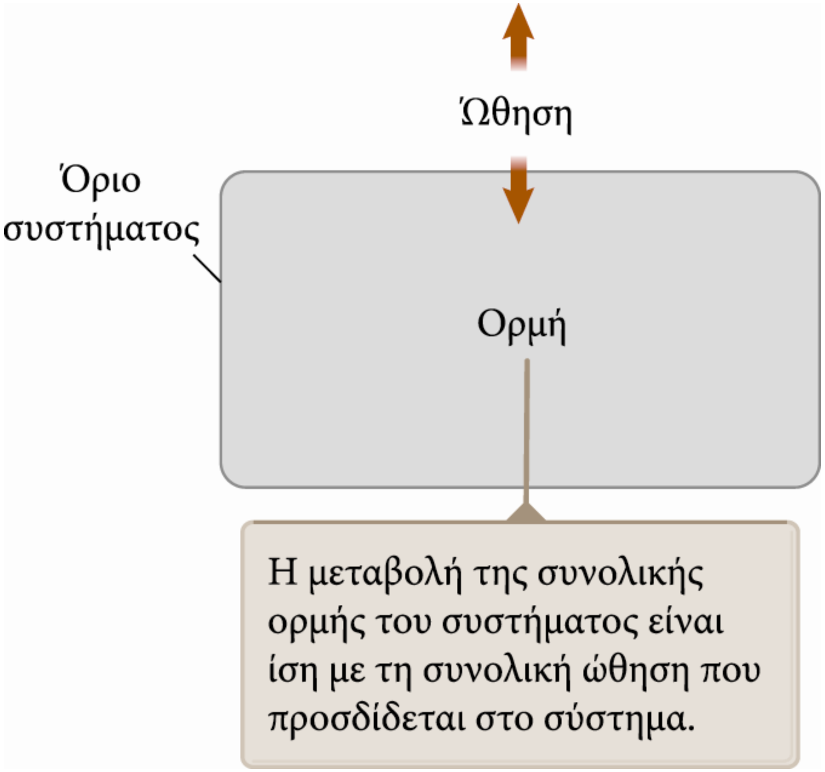
Η ώση αυξάνεται όσο αυξάνεται η ταχύτητα των καυσαερίων.

Η ώση αυξάνεται όσο αυξάνεται ο ρυθμός μεταβολής της μάζας.

- Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας ονομάζεται **ρυθμός καύσης**.

Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων (*σύνοψη*) – Μη απομονωμένο σύστημα

Αν ένα σύστημα αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του, δηλαδή ασκείται μια εξωτερική δύναμη σε αυτό, χρησιμοποιήστε το θεώρημα ώθησης-ορμής.



Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων (*σύνοψη*) – Απομονωμένο σύστημα

Αν σε ένα απομονωμένο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, τότε σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής, η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται, ανεξάρτητα από τη φύση των δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των στοιχείων του συστήματος.

Το σύστημα μπορεί να είναι απομονωμένο ως προς την ορμή αλλά μη απομονωμένο ως προς την ενέργεια.