Κεφάλαιο Μ7

Ενέργεια συστήματος

Εισαγωγή στην ενέργεια

Οι νόμοι του Νεύτωνα και οι αντίστοιχες αρχές μας επιτρέπουν να λύνουμε μια ποικιλία προβλημάτων.

Ωστόσο, μερικά προβλήματα που θεωρητικά μπορούν να λυθούν με τους νόμους του Νεύτωνα, στην πράξη λύνονται πολύ δύσκολα.

- Μπορούν όμως να λυθούν ευκολότερα με άλλες τεχνικές.

Η έννοια της ενέργειας είναι πολύ σημαντική στη μηχανική, αλλά και στην επιστήμη γενικότερα.

Κάθε φυσική διεργασία στο σύμπαν περιλαμβάνει ενέργεια και κάποια μεταφορά ή μετατροπή ενέργειας.

Η ενέργεια είναι μια έννοια που δεν ορίζεται εύκολα.

Μοντέλο ανάλυσης

Στη νέα μέθοδο, θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του συστήματος αντί για το μοντέλο του σωματιδίου.

Θα παρουσιάσουμε αυτά τα μοντέλα ανάλυσης στο επόμενο κεφάλαιο.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα περιγράψουμε τα συστήματα και τρεις τρόπους για την αποθήκευση ενέργειας σε αυτά.

Συστήματα

Το *σύστημα* είναι ένα μικρό κομμάτι του σύμπαντος.

- Θα αγνοήσουμε τις λεπτομέρειες για το υπόλοιπο σύμπαν.

Μια σημαντική δεξιότητα που πρέπει να αναπτύξετε είναι ο ορισμός του συστήματος.

- Αποτελεί το πρώτο βήμα για την επίλυση ενός προβλήματος.

Ένα έγκυρο σύστημα:

- μπορεί να είναι ένα μόνο σώμα ή σωματίδιο
- μπορεί να είναι ένα σύνολο σωμάτων ή σωματιδίων
- μπορεί να είναι μια περιοχή του χώρου
- μπορεί να μεταβάλλει το μέγεθος και το σχήμα του ως προς τον χρόνο

Σημειώσεις για τη μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων

Μπορείτε να χρησιμοποιείτε τη γενική μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων με μια προσθήκη στο βήμα της Κατηγοριοποίησης.

Βήμα Κατηγοριοποίησης της γενικής μεθοδολογίας

- Προσδιορίζουμε αν πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο που να βασίζεται στο μοντέλο του συστήματος.
- Ορίζουμε το συγκεκριμένο σύστημα.
- Επίσης, προσδιορίζουμε το όριο του συστήματος.
  - Μια φανταστική επιφάνεια, η οποία χωρίζει το σύμπαν στο σύστημα και το περιβάλλον.
    - Δεν συμπίπτει απαραίτητα με κάποια πραγματική επιφάνεια.
    - Το περιβάλλον περικλείει το σύστημα.

Παράδειγμα συστήματος

Σε ένα σώμα που βρίσκεται σε κενό χώρο ασκείται μια δύναμη.

- Το σύστημα είναι το σώμα.
- Η επιφάνεια του σώματος είναι το όριο του συστήματος.
- Η δύναμη είναι μια επίδραση που ασκεί το περιβάλλον στο σύστημα μέσω του ορίου του συστήματος.

Έργο

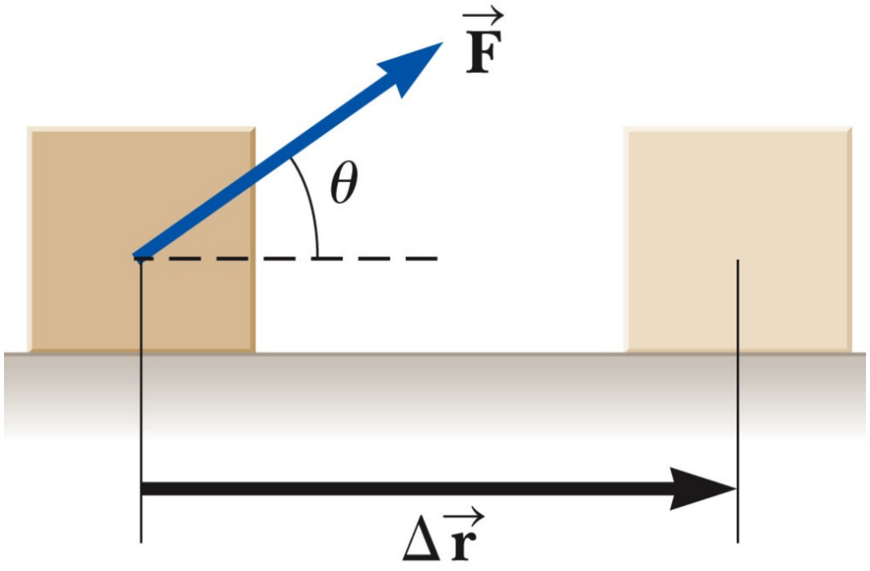
Το **έργο** *W* το οποίο παράγει σε ένα σύστημα ένας παράγοντας που ασκεί μια σταθερή δύναμη σε αυτό είναι το γινόμενο του μέτρου *F* της δύναμης, του μέτρου Δr της μετατόπισης του σημείου εφαρμογής της δύναμης, και της ποσότητας cos θ, όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων της δύναμης και της μετατόπισης.

- Ο όρος *έργο* έχει πολύ διαφορετικό νόημα στη φυσική από ό,τι στην καθημερινή ζωή.
- Το έργο παράγεται *από* κάποιο τμήμα του περιβάλλοντος που αλληλεπιδρά απευθείας με το σύστημα.
- Το έργο παράγεται *στο* σύστημα.

Έργο (*συνέχεια*)

$W = F\Delta r \cos \theta$

- Η μετατόπιση αναφέρεται στο σημείο εφαρμογής της δύναμης.
- Η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα δεν παράγει έργο αν το σώμα δεν υφίσταται μετατόπιση.
- Το έργο που παράγει μια δύναμη που ασκείται σε ένα κινούμενο σώμα είναι μηδενικό, όταν η δύναμη που εφαρμόζεται είναι κάθετη προς τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της.



Η μετατόπιση στην εξίσωση του έργου

Η μετατόπιση αναφέρεται στο σημείο εφαρμογής της δύναμης.

Αν η δύναμη ασκηθεί σε ένα άκαμπτο σώμα που μπορεί να μοντελοποιηθεί ως σωματίδιο, τότε η μετατόπιση είναι ίδια με αυτή του σωματιδίου.

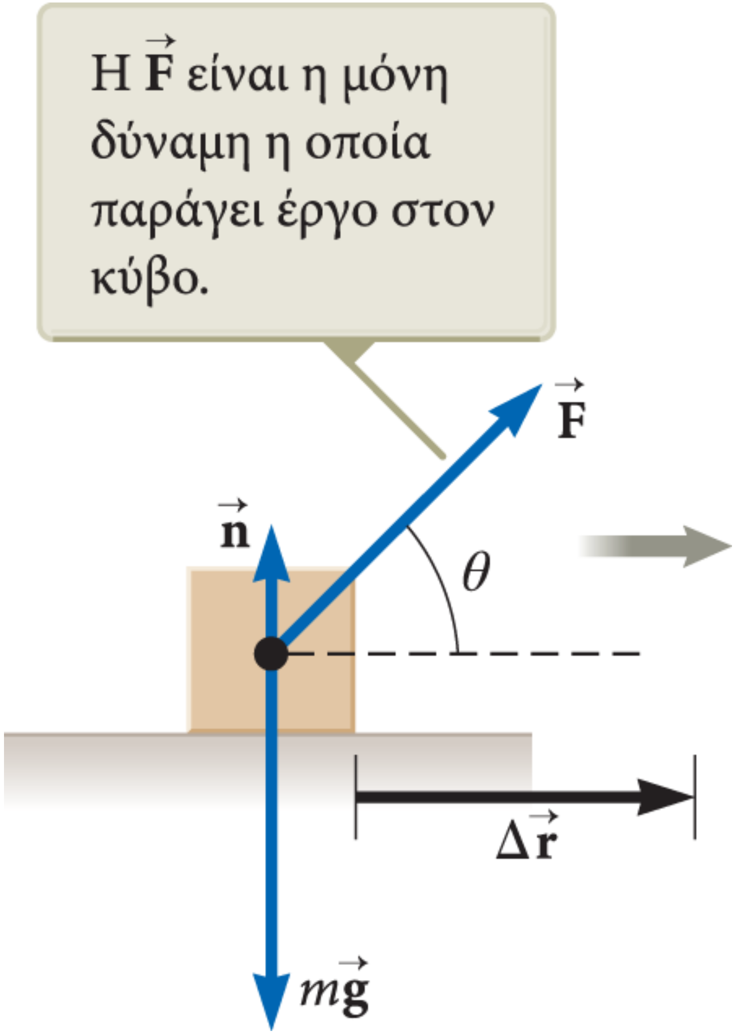
Σε ένα παραμορφώσιμο σύστημα, η μετατόπιση του σώματος δεν είναι γενικά ίδια με τη μετατόπιση που σχετίζεται με τις ασκούμενες δυνάμεις.

Παράδειγμα έργου

Η κάθετη δύναμη και η βαρυτική δύναμη δεν παράγουν έργο στο σώμα.

- $\cos\theta = \cos 90° = 0$

Η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ είναι η μοναδική δύναμη που παράγει έργο στο σώμα.



Περισσότερα για το έργο

Το πρόσημο του έργου εξαρτάται από την κατεύθυνση της δύναμης σε σχέση με τη μετατόπιση.

- Το έργο είναι θετικό όταν η προβολή της $\vec{F}$ στο $\Delta\vec{r}$ έχει ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση.
- Το έργο είναι αρνητικό όταν η προβολή έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της μετατόπισης.

Μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο που παράγει μια δύναμη, αλλά η δύναμη δεν προκαλεί υποχρεωτικά τη μετατόπιση του σώματος.

Το έργο είναι βαθμωτό μέγεθος.

Η μονάδα μέτρησης του έργου είναι το joule (J).

- 1 joule = 1 newton · 1 meter = kg · m^2 / s^2
- J = N · m

Το έργο είναι μεταφορά ενέργειας

Αυτή η παρατήρηση είναι σημαντική όσον αφορά τη μέθοδο επίλυσης προβλημάτων βάσει του μοντέλου του συστήματος.

Αν το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα είναι θετικό, η ενέργεια μεταφέρεται προς το σύστημα.

Αν το έργο που παράγεται στο σύστημα είναι αρνητικό, η ενέργεια μεταφέρεται από το σύστημα.

Αν ένα σύστημα αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του, η αλληλεπίδραση μπορεί να περιγραφεί ως μεταφορά ενέργειας μέσα από το όριο του συστήματος.

- Το αποτέλεσμα είναι η μεταβολή της ενέργειας που είναι αποθηκευμένη στο σύστημα.

Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

Γράφουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ως $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$.

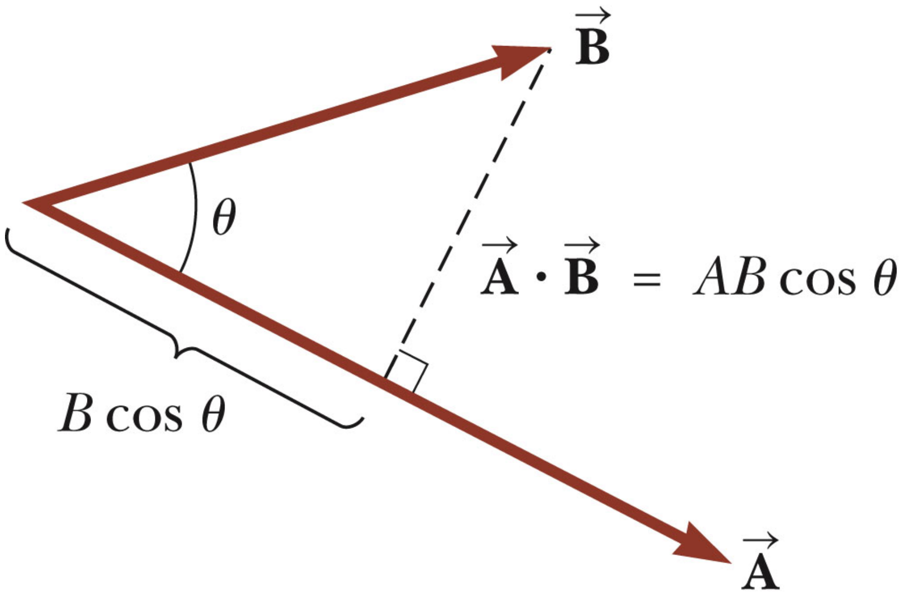
- Αποκαλείται συχνά και βαθμωτό γινόμενο.

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \equiv A\,B\cos\theta$$

- Το θ είναι η γωνία μεταξύ των *A* και *B*.

Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση του έργου, παίρνουμε

$$W = F\Delta r\cos\theta = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$$



CENGAGE Learning

Εσωτερικό γινόμενο (*συνέχεια*)

Στο εσωτερικό γινόμενο ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

- $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}$

Στο εσωτερικό γινόμενο ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.

- $\vec{\mathbf{A}} \cdot \left(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} \right) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$

Εσωτερικά γινόμενα μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

Σε μορφή συνιστωσών:

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Στην ειδική περίπτωση όπου ισχύει

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$$

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης

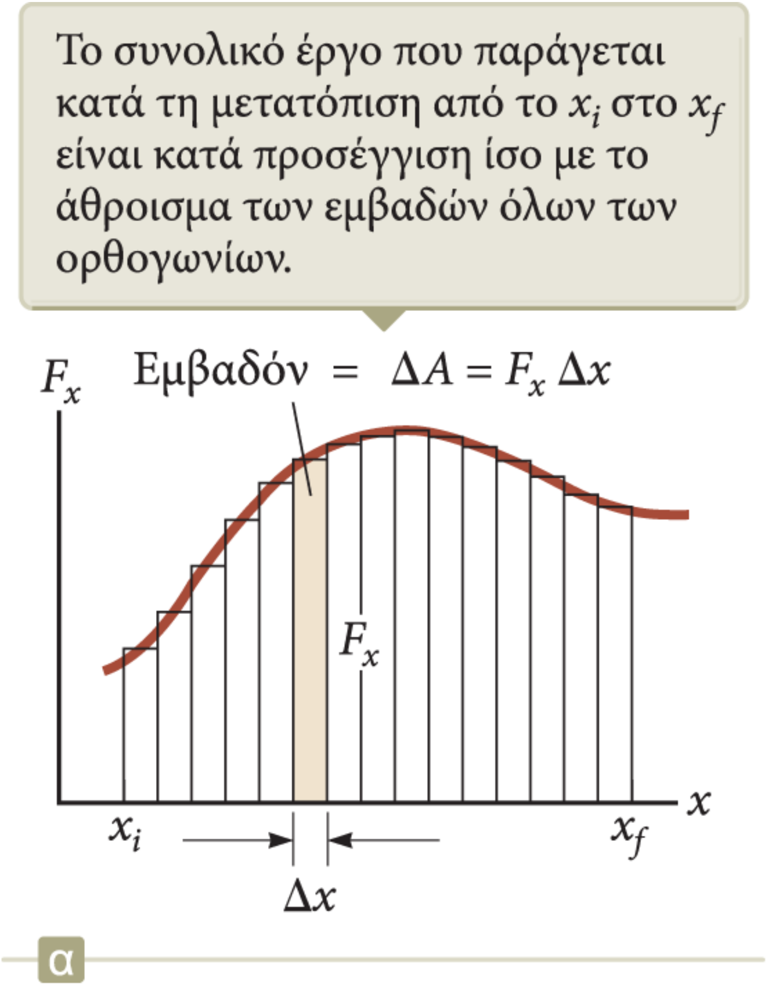
Για να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $W = F\Delta r \cos\,\theta$, η δύναμη πρέπει να είναι σταθερή, άρα δεν μπορούμε με αυτή την εξίσωση να υπολογίσουμε το έργο που παράγει μια μεταβαλλόμενη δύναμη.

Αν υποθέσουμε ότι το σωματίδιο υφίσταται πολύ μικρή μετατόπιση Δx, η δύναμη F είναι σταθερή γι' αυτό το μικρό διάστημα.

Για τέτοια μετατόπιση, ισχύει $W \sim F\Delta x$.

Για όλα τα διαστήματα,

$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$



Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης (*συνέχεια*)

Έστω ότι το μέγεθος των μικρών μετατοπίσεων τείνει στο μηδέν.

Επειδή ισχύει

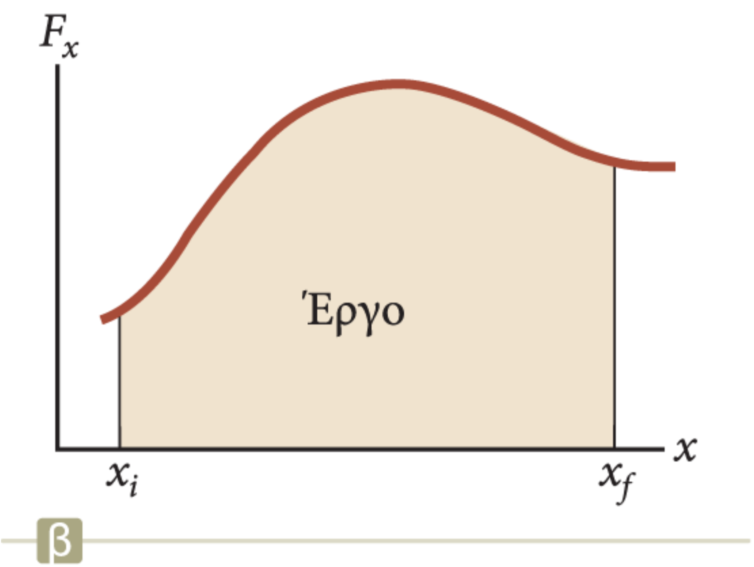
$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

προκύπτει ότι

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Το έργο που παράγεται είναι ίσο με το εμβαδόν της περιοχής κάτω από την καμπύλη, από το x_i μέχρι το x_f.

Το έργο που παράγει η συνιστώσα F_x της μεταβλητής δύναμης καθώς μετακινεί το σωματίδιο από το x_i στο x_f είναι *ακριβώς* ίσο με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη.



Έργο πολλών δυνάμεων

Αν σε ένα σύστημα δρουν περισσότερες από μία δυνάμεις *και το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως σωματίδιο*, το συνολικό έργο που παράγεται στο σύστημα είναι το έργο που παράγει η συνισταμένη δύναμη.

$$\sum W = W_{\text{εξωτ.}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F_x \right) dx$$

Στη γενική περίπτωση μιας συνισταμένης δύναμης με μεταβαλλόμενο μέτρο και κατεύθυνση,

$$\sum W = W_{\text{εξωτ.}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum \vec{\mathbf{F}} \right) d\vec{\mathbf{r}}$$

Ο δείκτης «εξωτ.» δείχνει ότι το έργο παράγεται στο σύστημα από κάποιον *εξωτερικό* παράγοντα.

Έργο πολλών δυνάμεων (*συνέχεια*)

Αν το σύστημα δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί ως σωματίδιο, τότε το συνολικό έργο είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα του έργου που παράγει κάθε δύναμη χωριστά.

$$\sum W = W_{\text{εξωτ.}} = \sum_{\text{δυνάμεις}} \left(\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \right)$$

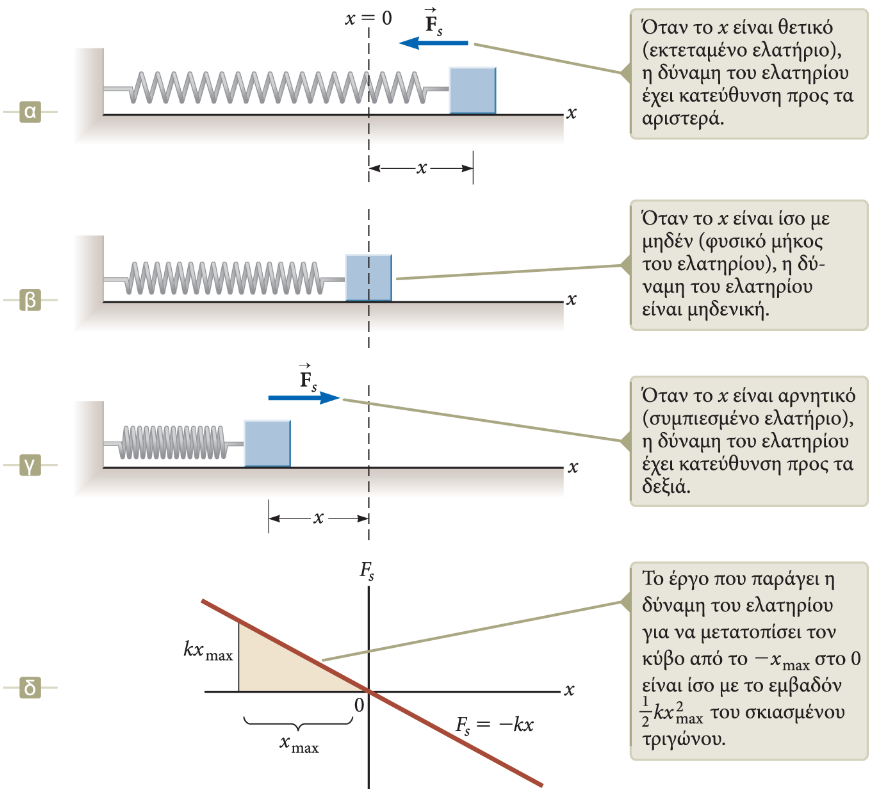
- Μην ξεχνάτε ότι το έργο είναι βαθμωτό μέγεθος, άρα το άθροισμα είναι αλγεβρικό.

Έργο που παράγεται από ελατήριο

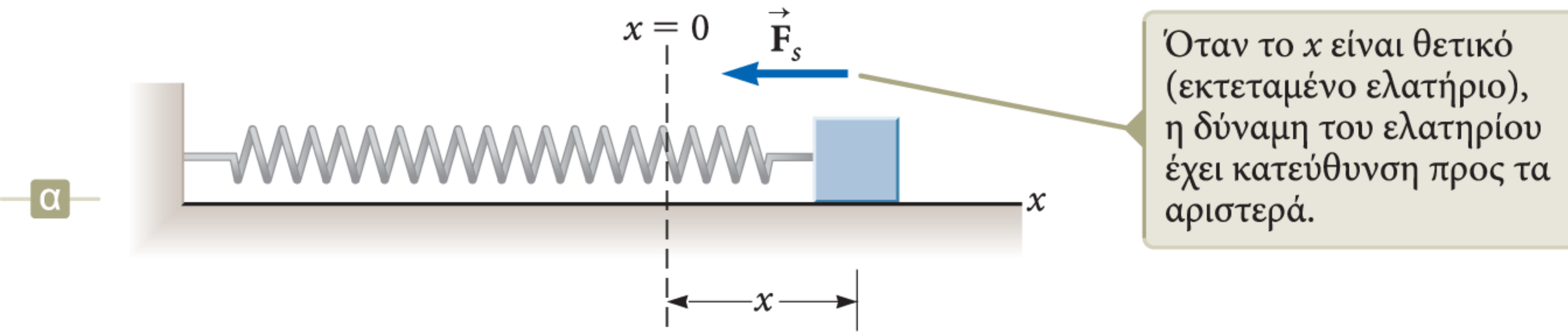
Πρόκειται για το μοντέλο ενός συνηθισμένου φυσικού συστήματος στο οποίο η δύναμη μεταβάλλεται ως προς τη θέση.

Ο κύβος βρίσκεται πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές.

Παρατηρήστε την κίνηση του κύβου για διάφορες τιμές της σταθεράς του ελατηρίου.



Δύναμη ελατηρίου (νόμος του Hooke)



Η δύναμη που ασκεί το ελατήριο είναι

$$F_s = -kx$$

- Το x είναι η θέση του κύβου σε σχέση με τη θέση ισορροπίας ($x = 0$).
- Το k ονομάζεται σταθερά του ελατηρίου.
  - Το k μετράει τη *σκληρότητα* του ελατηρίου.

Ο νόμος αυτός είναι γνωστός ως νόμος του Hooke.

Νόμος του Hooke (*συνέχεια*)

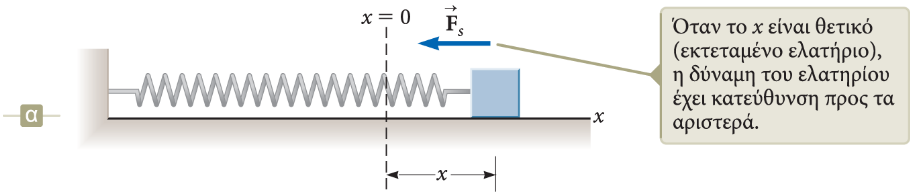
Η διανυσματική μορφή του νόμου του Hooke είναι

$$\vec{\mathbf{F}}_s = F_x\hat{\mathbf{i}} = -kx\hat{\mathbf{i}}$$

Όταν το x είναι θετικό (το ελατήριο έχει εκταθεί), η F είναι αρνητική.

Όταν το x είναι ίσο με 0 (στη θέση ισορροπίας), η F είναι ίση με 0.

Όταν το x είναι αρνητικό (το ελατήριο έχει συμπιεστεί), η F είναι θετική.



Νόμος του Hooke (*τελική διαφάνεια*)

Η δύναμη που ασκεί το ελατήριο έχει πάντα αντίθετη κατεύθυνση από τη μετατόπιση ως προς το σημείο ισορροπίας.

Η δύναμη του ελατηρίου αποκαλείται συχνά και *δύναμη επαναφοράς.*

Αν αφήσουμε τον κύβο ελεύθερο, θα ταλαντωθεί μπρος-πίσω μεταξύ των θέσεων $-x$ και x.

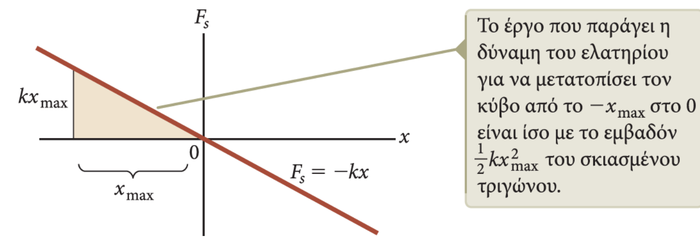
Έργο που παράγεται από ελατήριο

Ορίζουμε τον κύβο ως το σύστημα.

Υπολογίζουμε το έργο που παράγει η δύναμη για να μετατοπίσει τον κύβο από το σημείο $x_i = -x_{max}$ στο $x_f = 0$.

$$W_s = \int \vec{\mathbf{F}}_s \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(-kx\hat{\mathbf{i}}\right)\cdot\left(dx\hat{\mathbf{i}}\right)$$

$$= \int_{-x_{max}}^{0} \left(-kx\right)dx = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$



Το συνολικό έργο που παράγει η δύναμη για να μετατοπίσει τον κύβο από το σημείο $-x_{max}$ στο x_{max} είναι ίσο με μηδέν.

Έργο που παράγεται από ελατήριο (*συνέχεια*)

Ας υποθέσουμε ότι ο κύβος υφίσταται τυχαία μετατόπιση από το $x = x_i$ στο $x = x_f$.

Το έργο που παράγει η δύναμη του ελατηρίου για να μετατοπίσει τον κύβο είναι

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

- Αν η κίνηση τελειώνει στο σημείο από το οποίο άρχισε, τότε $W = 0$.

Ελατήριο με ασκούμενη δύναμη

Ας υποθέσουμε ότι ένας εξωτερικός παράγοντας $F_{ασκ.}$ τεντώνει το ελατήριο.

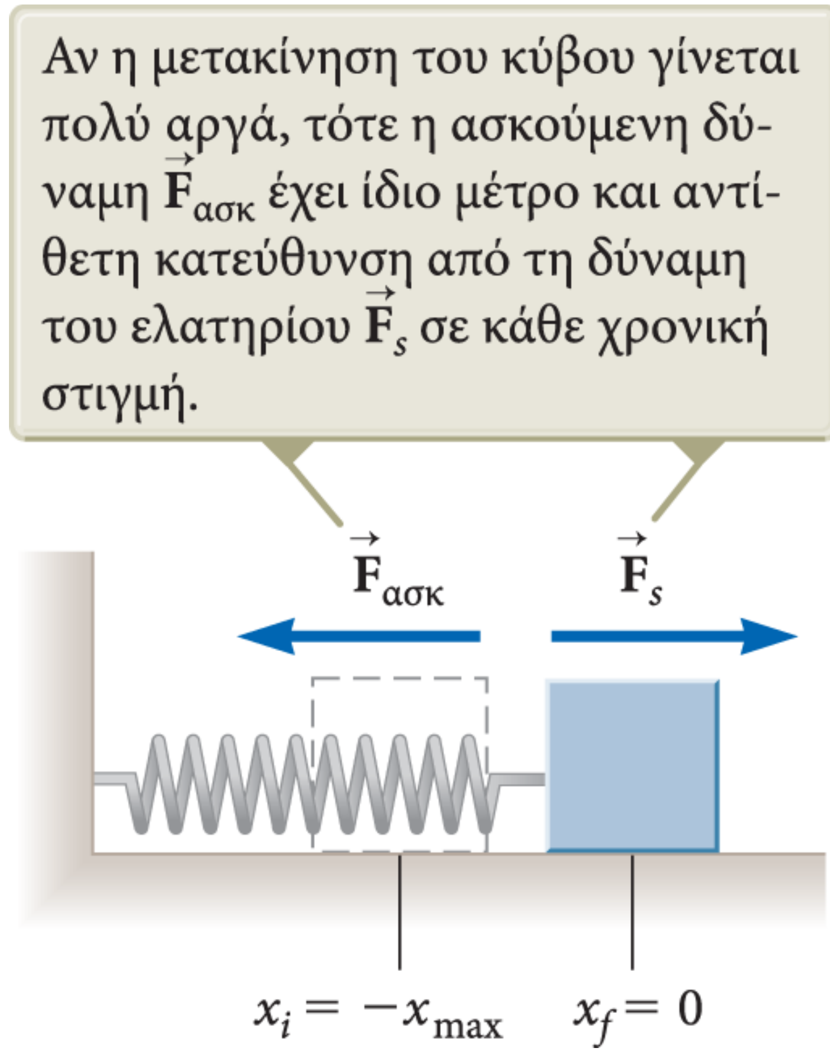
Η ασκούμενη δύναμη έχει ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση από τη δύναμη του ελατηρίου.

$$\vec{\mathbf{F}}_{ασκ.} = F_{ασκ.}\hat{\mathbf{i}} = -\vec{\mathbf{F}}_s = -\left(-kx\hat{\mathbf{i}}\right) = kx\hat{\mathbf{i}}$$

Το έργο που παράγει η $F_{ασκ.}$ για να μετατοπίσει τον κύβο από το σημείο $-x_{max}$ στο $x = 0$ ισούται με $-\frac{1}{2} kx^2_{max}$

Για οποιαδήποτε μετατόπιση, το έργο που παράγει η ασκούμενη δύναμη είναι

$$W_{ασκ.} = \int_{x_i}^{x_f} \left(kx\right) dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$



Κινητική ενέργεια

Μια πιθανή επίπτωση της παραγωγής έργου σε ένα σύστημα είναι η μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας του συστήματος.

Το σύστημα μπορεί να έχει *κινητική ενέργεια.*

Η κινητική ενέργεια είναι η ενέργεια που σχετίζεται με την κίνηση ενός σωματιδίου.

- $K = \frac{1}{2} mv^2$
  - Το K είναι η κινητική ενέργεια.
  - Το m είναι η μάζα του σωματιδίου.
  - Το v είναι το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου.

Μια πιθανή επίπτωση του έργου που παράγεται για να μεταφερθεί ενέργεια προς ένα σύστημα είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειάς του.

Κινητική ενέργεια (*συνέχεια*)

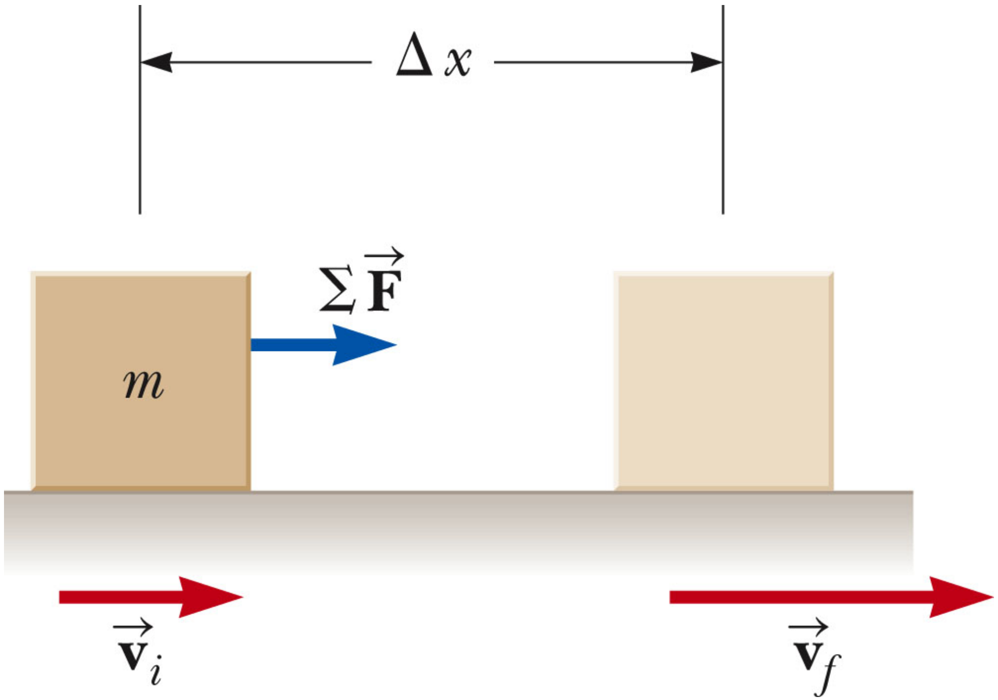
Υπολογισμός του έργου:

$$W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F\, dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\, dx$$

$$W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = \int_{v_i}^{v_f} mv\, dv$$

$$W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$W_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = K_f - K_i = \Delta K$$



Θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας, $W_{εξωτ.} = K_f - K_i = \Delta K$.

Όταν παράγεται έργο σε ένα σύστημα και η μόνη μεταβολή στο σύστημα σχετίζεται με το μέτρο της ταχύτητάς του, το συνολικό έργο που παράγεται στο σύστημα ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

- Το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος αυξάνεται αν το συνολικό έργο που παράγεται σε αυτό είναι θετικό.
- Το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος μειώνεται αν το συνολικό έργο είναι αρνητικό.
- Ισχύει επίσης όταν μεταβάλλεται η ταχύτητα περιστροφής.

Το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας δεν ισχύει όταν δεν μεταβάλλεται μόνο το μέτρο της ταχύτητας στο σύστημα ή όταν υπάρχουν άλλες αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον εκτός από το έργο.

Το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας αναφέρεται στο μέτρο της ταχύτητας (speed) του συστήματος και όχι στην ταχύτητά του (velocity).

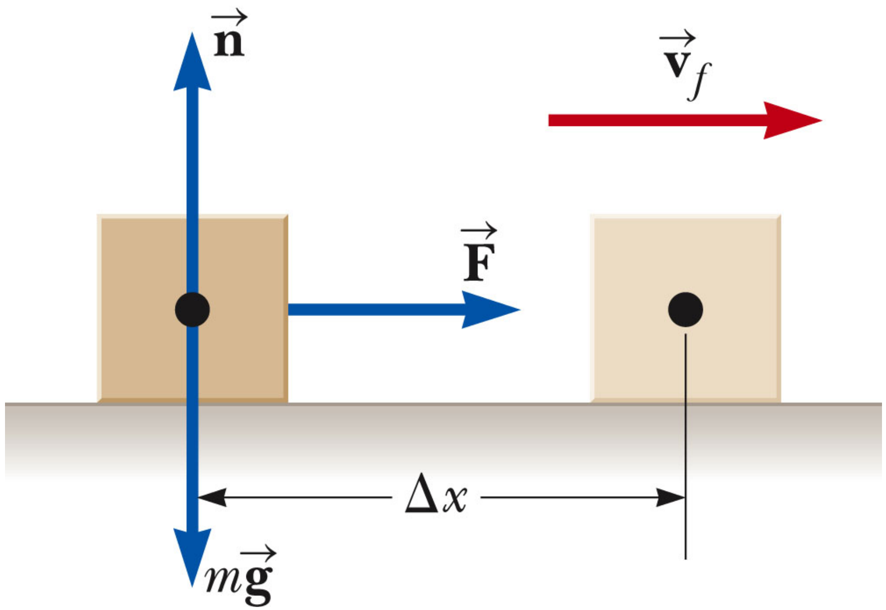
Θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας – Παράδειγμα

Το σύστημα είναι ο κύβος, στον οποίο ασκούνται τρεις εξωτερικές δυνάμεις.

Η κάθετη δύναμη και η βαρυτική δύναμη δεν παράγουν έργο επειδή έχουν κατεύθυνση κάθετη προς την κατεύθυνση της μετατόπισης.

$W_{\text{εξωτ.}} = \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0$

Μπορείτε να ελέγξετε την απάντηση μοντελοποιώντας τον κύβο ως σωματίδιο και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της κινηματικής.



CENGAGE Learning

Δυναμική ενέργεια

Η δυναμική ενέργεια είναι η ενέργεια που καθορίζεται από τη διάταξη ενός συστήματος στο οποίο τα στοιχεία του αλληλεπιδρούν μέσω δυνάμεων. Με τον όρο «διάταξη» εννοούμε τη σχετική θέση των στοιχείων που απαρτίζουν το σύστημα

- Οι δυνάμεις είναι εσωτερικές στο σύστημα.
- Η δυναμική ενέργεια σχετίζεται μόνο με ορισμένους τύπους δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται μεταξύ των στοιχείων ενός συστήματος.

Βαρυτική δυναμική ενέργεια

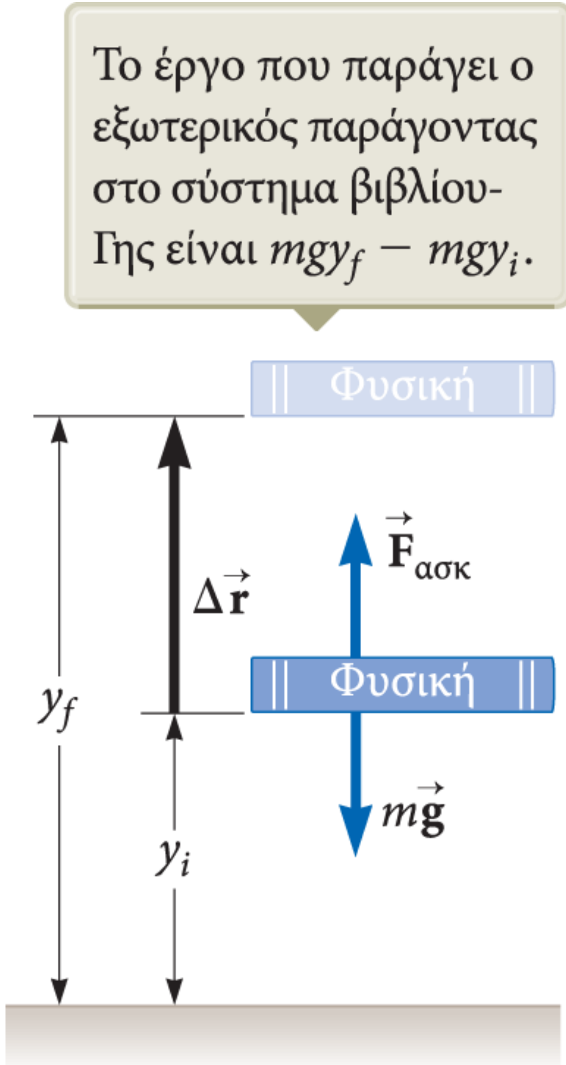
Το σύστημα είναι η Γη και το βιβλίο.

Παράγουμε έργο στο σύστημα ανυψώνοντας κατακόρυφα το βιβλίο.

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \left(y_f - y_i\right)\hat{\mathbf{j}}$$

Το έργο που παράγεται στο σύστημα εκδηλώνεται ως αύξηση της ενέργειας του συστήματος.

Ο μηχανισμός αποθήκευσης ενέργειας ονομάζεται *δυναμική ενέργεια.*



Βαρυτική δυναμική ενέργεια (*συνέχεια*)

Ας υποθέσουμε ότι αφήνουμε το βιβλίο της Εικόνας M7.15 να πέσει.

Δεν υπάρχει μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος επειδή το βιβλίο είναι ακίνητο πριν και μετά την παραγωγή του έργου.

Η ***βαρυτ κή δυναμ κή ενέργε α*** είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα σε μια δεδομένη θέση πάνω από την επιφάνεια της Γης.

$$W_{\text{εξωτ.}} = \left(\vec{\mathbf{F}}_{\text{ασκ.}}\right) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$$

$$W_{\text{εξωτ.}} = (mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot \left[\left(y_f - y_i\right)\hat{\mathbf{j}}\right]$$

$$W_{\text{εξωτ.}} = mgy_f - mgy_i$$

Βαρυτική δυναμική ενέργεια (*τελική διαφάνεια*)

Η ποσότητα *mgy* ορίζεται ως βαρυτική δυναμική ενέργεια U_g.

- $U_g = mgy$

Οι μονάδες μέτρησής της είναι τα joule (J).

Είναι βαθμωτό μέγεθος.

Το έργο που παράγεται μπορεί να μεταβάλλει τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος.

- $W_{\text{εξωτ.}} = \Delta u_{\text{g}}$

Η δυναμική ενέργεια σχετίζεται πάντα με ένα σύστημα δύο ή περισσοτέρων σωμάτων που αλληλεπιδρούν.

Βαρυτική δυναμική ενέργεια – Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια εξαρτάται μόνο από το κατακόρυφο ύψος του σώματος από την επιφάνεια της Γης.

Κατά την επίλυση προβλημάτων, επιλέγουμε μια διάταξη αναφοράς για την οποία η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι ίση με κάποια τιμή αναφοράς – που είναι κανονικά το μηδέν.

- Η επιλογή είναι τυχαία επειδή συνήθως χρειαζόμαστε τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας, η οποία είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της διάταξης αναφοράς.

Είναι συχνά βολικό να επιλέγουμε ως διάταξη αναφοράς για τη μηδενική βαρυτική δυναμική ενέργεια τη διάταξη στην οποία το σώμα βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης.

Η διατύπωση του προβλήματος ενδέχεται να υποδεικνύει την καταλληλότερη διάταξη.

Ελαστική δυναμική ενέργεια

Η ***ελαστ κή δυναμ κή ενέργε α*** σχετίζεται με τα ελατήρια.

Η δύναμη που ασκεί το ελατήριο (σε έναν κύβο, για παράδειγμα) είναι $F_s = -kx$.

Το έργο που παράγεται από μια εξωτερική ασκούμενη δύναμη σε ένα σύστημα ελατηρίου-κύβου είναι

- $W = \frac{1}{2} k x_f^2 - \frac{1}{2} k x_i^2$
- Το έργο είναι ίσο με τη διαφορά μεταξύ της αρχικής και της τελικής τιμής μιας παράστασης που σχετίζεται με τη διάταξη του συστήματος.

Ελαστική δυναμική ενέργεια (*συνέχεια*)

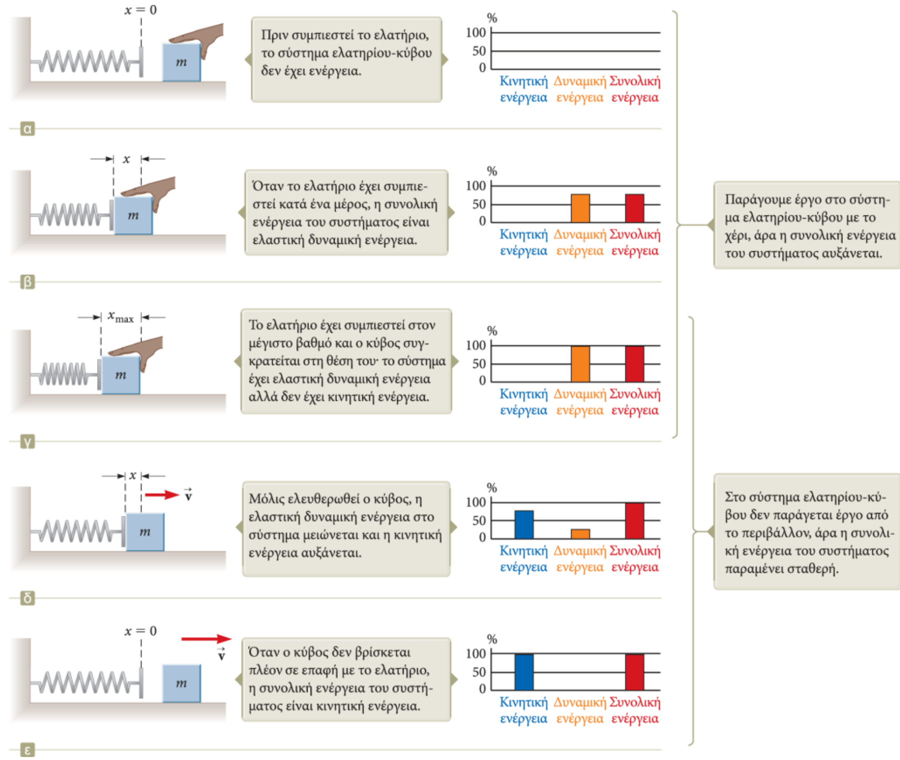
Η σχέση αυτή δίνει την ελαστική δυναμική ενέργεια:

$$U_s = ½ kx^2$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι η αποθηκευμένη ενέργεια στο παραμορφωμένο ελατήριο.

Η αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια μπορεί να μετατραπεί σε κινητική ενέργεια.

Παρατηρήστε τι συμβαίνει όταν το ελατήριο συμπιέζεται κατά διάφορες αποστάσεις.



Ελαστική δυναμική ενέργεια (*τελική διαφάνεια*)

Η ελαστική δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο είναι μηδενική όταν το ελατήριο δεν είναι παραμορφωμένο ($U = 0$ όταν $x = 0$).

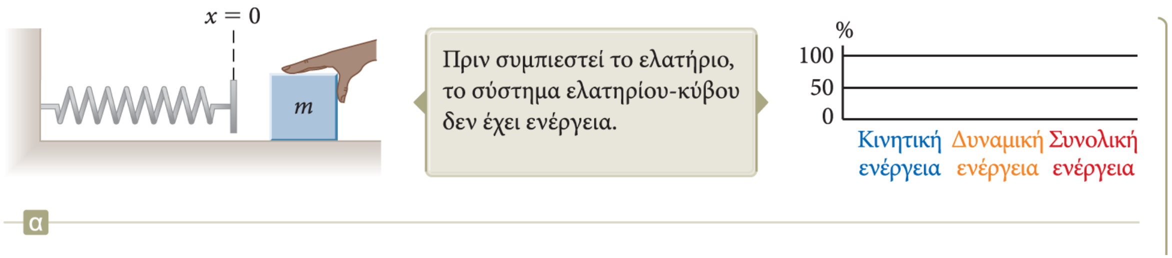
- Η ενέργεια αποθηκεύεται στο ελατήριο μόνο όταν το ελατήριο έχει εκταθεί ή έχει συμπιεστεί.

Η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη όταν το ελατήριο είναι τελείως εκτεταμένο ή τελείως συμπιεσμένο.

Η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι πάντα θετική.

- Το x^2 είναι πάντα θετικό.

Ιστόγραμμα ενέργειας – Παράδειγμα



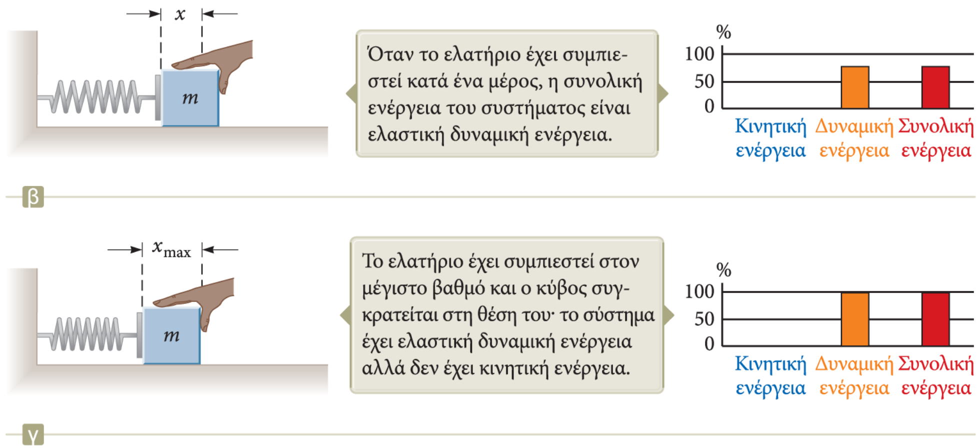
Το ιστόγραμμα ενέργειας είναι μια σημαντική γραφική αναπαράσταση των δεδομένων που σχετίζονται με την ενέργεια των συστημάτων.

- Ο κατακόρυφος άξονας αναπαριστά την ποσότητα της ενέργειας ενός συγκεκριμένου τύπου στο σύστημα.
- Ο οριζόντιος άξονας δείχνει τους τύπους της ενέργειας στο σύστημα.

Στο (α) η ενέργεια είναι μηδενική.

- Το ελατήριο βρίσκεται σε θέση ισορροπίας και ο κύβος δεν κινείται.

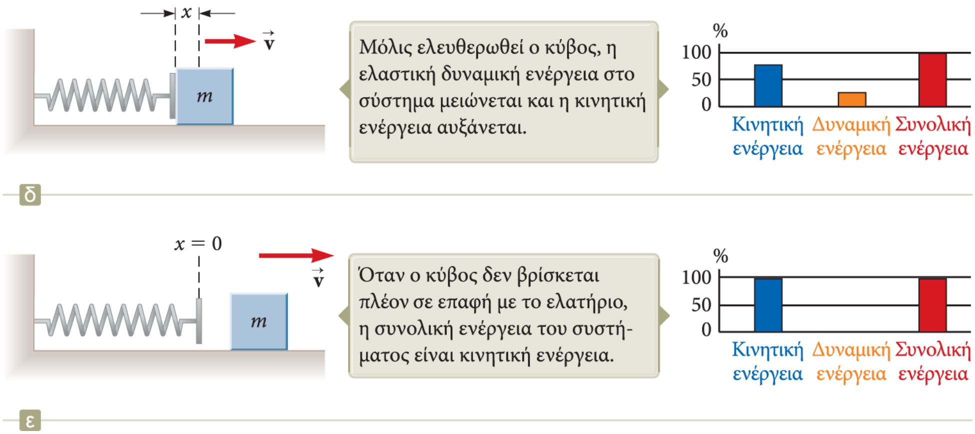
Ιστόγραμμα ενέργειας – Παράδειγμα (*συνέχεια*)



Μεταξύ των (β) και (γ), το χέρι παράγει έργο στο σύστημα.

- Το ελατήριο συμπιέζεται.
- Στο σύστημα αποθηκεύεται ελαστική δυναμική ενέργεια.
- Δεν υπάρχει κινητική ενέργεια επειδή ο κύβος παραμένει ακίνητος.

Ιστόγραμμα ενέργειας – Παράδειγμα (*τελική διαφάνεια*)



Στο (δ), ο κύβος έχει αφεθεί και κινείται προς τα δεξιά ενώ παραμένει σε επαφή με το ελατήριο.

- Η ελαστική δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται ενώ η κινητική ενέργεια αυξάνεται.

Στο (ε), το ελατήριο έχει επιστρέψει στο αρχικό μήκος του και το σύστημα περιέχει πλέον μόνο την κινητική ενέργεια του κινούμενου κύβου.

Εσωτερική ενέργεια

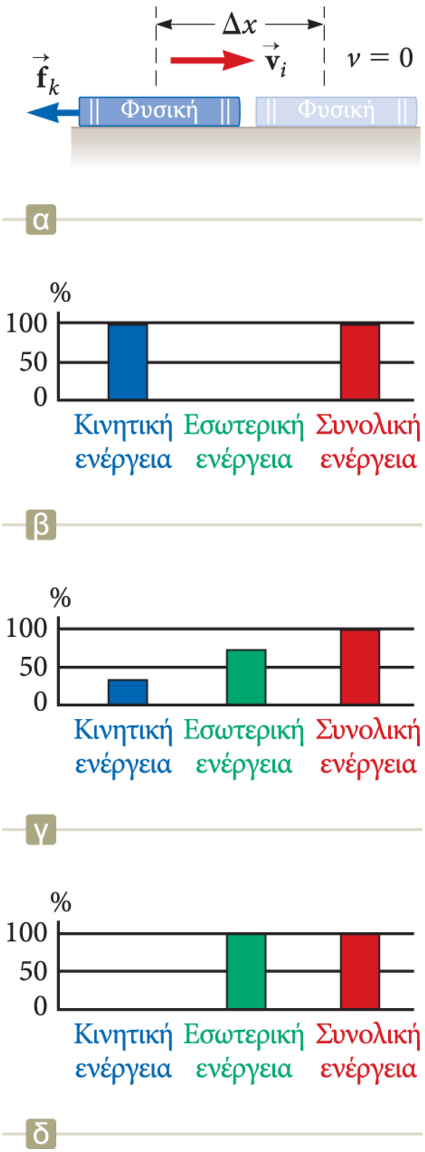
Η ενέργεια που σχετίζεται με τη θερμοκρασία ενός σώματος ονομάζεται *εσωτερική ενέργεια $E_{εσωτ}$*.

Σε αυτό το παράδειγμα, το σύστημα είναι η επιφάνεια.

Η τριβή παράγει έργο και αυξάνει την εσωτερική ενέργεια του συστήματος.

Όταν το βιβλίο σταματήσει, η κινητική ενέργειά του έχει μετατραπεί πλήρως σε εσωτερική ενέργεια.

Η συνολική ενέργεια δεν μεταβάλλεται.



Συντηρητικές δυνάμεις

Το έργο που παράγει μια συντηρητική δύναμη σε ένα σωματίδιο, το οποίο κινείται μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων, είναι ανεξάρτητο από την τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο.

Το έργο που παράγει μια συντηρητική δύναμη σε ένα σωματίδιο, το οποίο ακολουθεί οποιαδήποτε κλειστή τροχιά, είναι μηδενικό.

- Σε μια κλειστή τροχιά, το αρχικό και το τελικό σημείο συμπίπτουν.

Παραδείγματα συντηρητικών δυνάμεων:

- Βαρύτητα
- Δύναμη ελατηρίου

Συντηρητικές δυνάμεις (*συνέχεια*)

Μπορούμε να συσχετίσουμε τη δυναμική ενέργεια ενός συστήματος με οποιαδήποτε συντηρητική δύναμη που ασκείται μεταξύ των στοιχείων του συστήματος.

- Αυτό μπορεί να γίνει μόνο για τις συντηρητικές δυνάμεις
- Γενικά: $W_{\text{εσωτ.}} = -\Delta U$
  - Ο συμβολισμός $W_{\text{εσωτ.}}$ μας υπενθυμίζει ότι το έργο παράγεται από ένα στοιχείο του συστήματος σε κάποιο άλλο στοιχείο και, άρα, είναι εσωτερικό για το σύστημα.
- Το θετικό έργο που παράγει στο σύστημα ένας εξωτερικός παράγοντας αυξάνει τη δυναμική ενέργεια του συστήματος.
- Το έργο που παράγει σε ένα στοιχείο του συστήματος μια συντηρητική δύναμη, που είναι εσωτερική για το σύστημα, μειώνει τη δυναμική ενέργεια του συστήματος.

Μη συντηρητικές δυνάμεις

Οι μη συντηρητικές δυνάμεις δεν ικανοποιούν τις ιδιότητες των συντηρητικών δυνάμεων.

Οι μη συντηρητικές δυνάμεις που δρουν μέσα σε ένα σύστημα προκαλούν *μεταβολή* στη μηχανική ενέργεια του συστήματος.

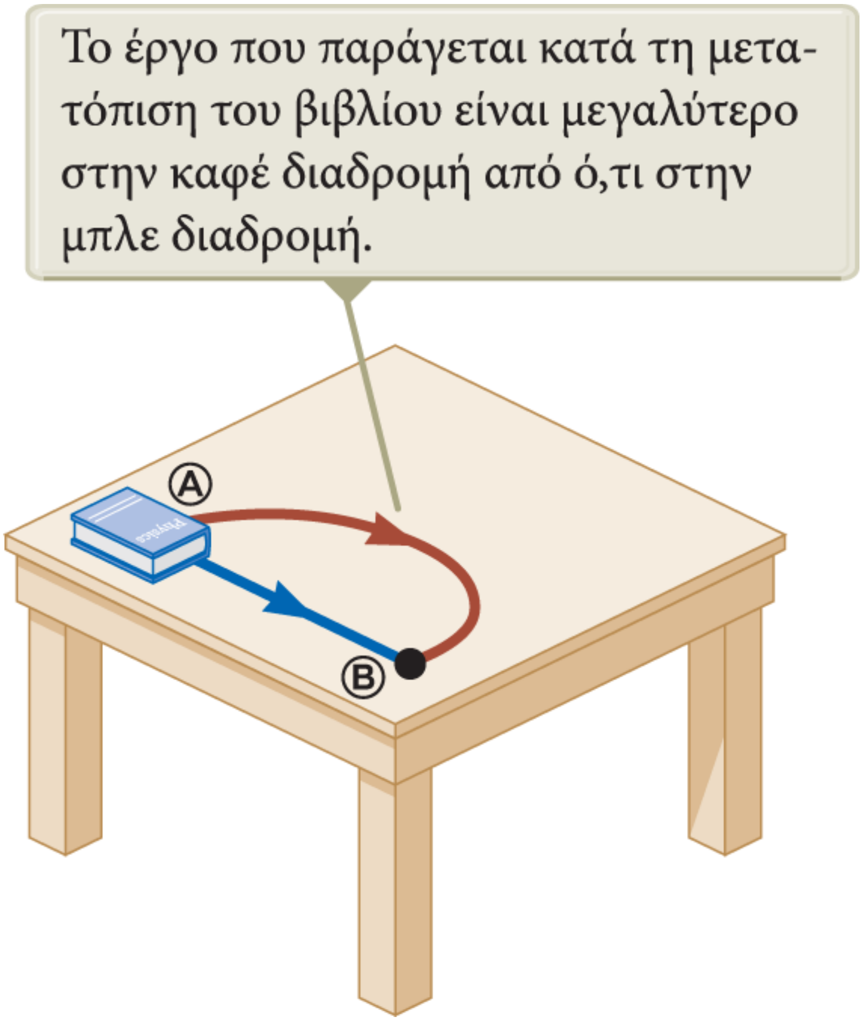
$E_{\text{μηχ.}} = K + U$

- Το K περιλαμβάνει την κινητική ενέργεια όλων των κινούμενων στοιχείων του συστήματος.
- Το U περιλαμβάνει όλους τους τύπους δυναμικής ενέργειας του συστήματος.

Μη συντηρητικές δυνάμεις (*συνέχεια*)

Παράγετε περισσότερο έργο για να αντισταθμίσετε την τριβή στην καφέ τροχιά από ό,τι στην μπλε τροχιά.

Επειδή το έργο που παράγεται στο βιβλίο εξαρτάται από τη διαδρομή, η τριβή είναι μια μη συντηρητική δύναμη.



Συντηρητικές δυνάμεις και δυναμική ενέργεια

Μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας *U* σύμφωνα με την οποία, το έργο που παράγεται από μια συντηρητική δύναμη ισούται με τη μείωση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος.

Το έργο που παράγει μια τέτοια δύναμη *F* είναι

$$W_{\text{εσωτ.}} = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx = -\Delta U$$

- Η μεταβολή ΔU είναι αρνητική όταν οι *F* και *dx* έχουν την ίδια κατεύθυνση.

Συντηρητικές δυνάμεις και δυναμική ενέργεια

Η συντηρητική δύναμη συνδέεται με τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας μέσω της σχέσης

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Η συνιστώσα *x* μιας συντηρητικής δύναμης που ασκείται σε ένα σώμα μέσα σε ένα σύστημα ισούται με την αρνητική παράγωγο της δυναμικής ενέργειας του συστήματος ως προς *x.*

- Μπορεί να επεκταθεί στις τρεις διαστάσεις.

Συντηρητικές δυνάμεις και δυναμική ενέργεια – Έλεγχος

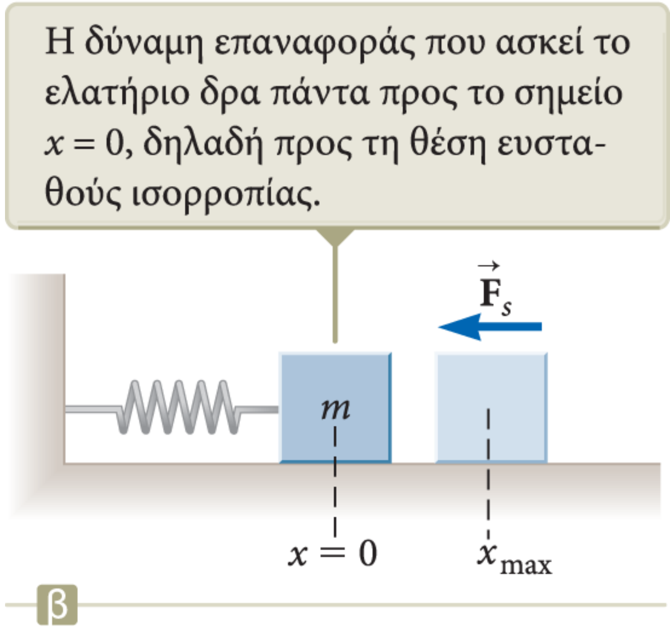
Ας εξετάσουμε την περίπτωση ενός παραμορφωμένου ελατηρίου:

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

- Αυτός είναι ο νόμος του Hooke και επιβεβαιώνει την εξίσωση για τη συνάρτηση *U.*

Η συνάρτηση *U* είναι σημαντική, επειδή μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε την τιμή μιας συντηρητικής δύναμης.

Διαγράμματα ενέργειας και ισορροπία



Μπορούμε να κατανοήσουμε την κίνηση ενός συστήματος από το γράφημα ενέργειας-θέσης.

Στο σύστημα κύβου-ελατηρίου, ο κύβος ταλαντώνεται μεταξύ των σημείων αλλαγής κατεύθυνσης, $x = \pm x_{max}$.

Ο κύβος θα επιταχύνει πάντα για να επιστρέψει στη θέση ισορροπίας $x = 0$.

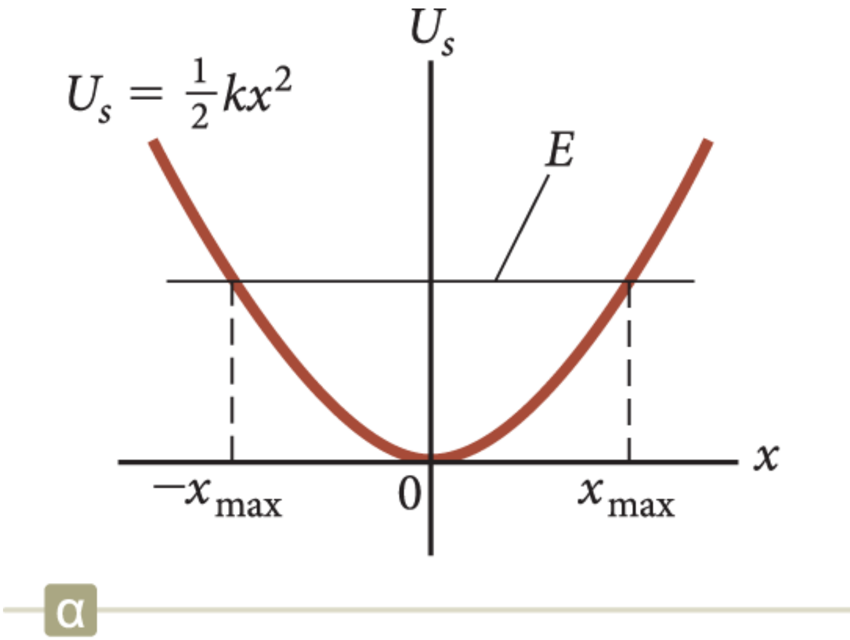
Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθής ισορροπία

Η θέση $x = 0$ είναι θέση ***ευσταθούς σορροπ ας***.

- Οποιαδήποτε μετατόπιση μακριά από τη συγκεκριμένη θέση προκαλεί μια δύναμη με κατεύθυνση προς τη θέση $x = 0$.

Οι διατάξεις ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν στις θέσεις εκείνες για τις οποίες η $U(x)$ έχει ελάχιστη τιμή.

Τα σημεία $x = x_{max}$ και $x = -x_{max}$ είναι τα σημεία αλλαγής κατεύθυνσης.



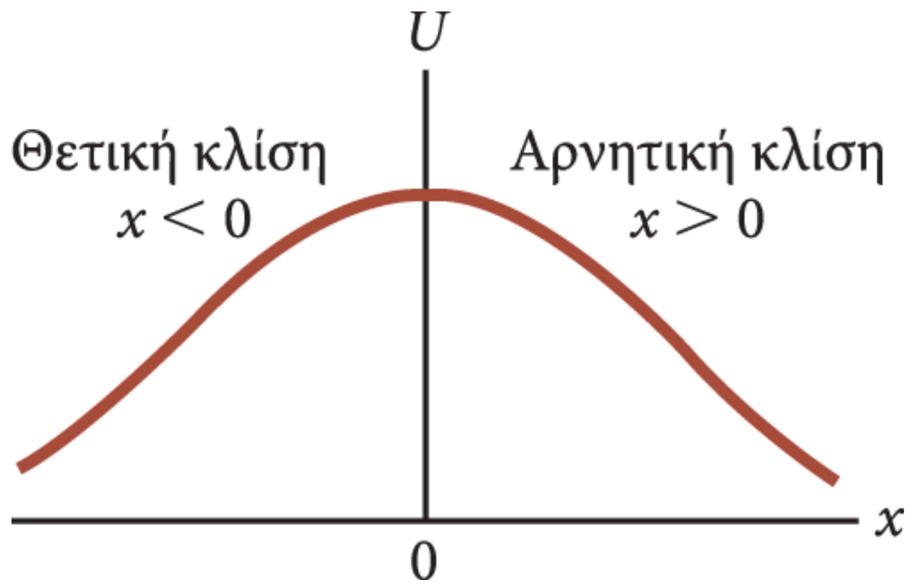
Διαγράμματα ενέργειας και ασταθής ισορροπία

Στη θέση $x = 0$, $F_x = 0$, άρα το σωματίδιο βρίσκεται σε ισορροπία.

Για οποιαδήποτε άλλη τιμή του x, το σωματίδιο απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας.

Αυτό είναι ένα παράδειγμα ***ασταθούς σορροπ ας***.

Οι διατάξεις ασταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν σε εκείνες τις θέσεις για τις οποίες η $U(x)$ έχει μέγιστη τιμή.



Ουδέτερη ισορροπία

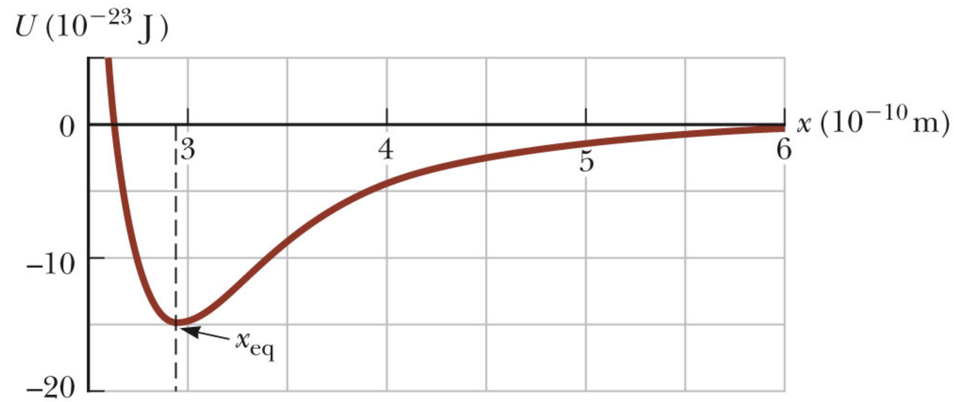
Όταν η δυναμική ενέργεια *U* είναι σταθερή σε κάποια περιοχή, προκύπτει μια διάταξη που ονομάζεται ***ουδέτερη σορροπ α***.

Οι μικρές μετατοπίσεις ενός σώματος από κάποια θέση στην περιοχή αυτή δεν παράγουν καθόλου δυνάμεις.

Δυναμική ενέργεια στα μόρια

Η δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με τη δύναμη μεταξύ δύο ουδέτερων ατόμων σε ένα μόριο μπορεί να μοντελοποιηθεί από τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας των Lennard-Jones.

$$U(x) = 4\in\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$



Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης (υπολογίζοντας την παράγωγο και εξισώνοντάς την με 0) για να βρείτε την απόσταση ευσταθούς ισορροπίας.

Στο γράφημα της συνάρτησης των Lennard-Jones φαίνεται η πιο πιθανή απόσταση μεταξύ των ατόμων στο μόριο (ελάχιστη ενέργεια).