Κεφάλαιο Μ6

Κυκλική κίνηση και

άλλες εφαρμογές των νόμων του Νεύτωνα

CENGAGE Learning™

Κυκλική κίνηση

Αναπτύξαμε δύο μοντέλα ανάλυσης στα οποία χρησιμοποιούνται οι νόμοι της κίνησης του Νεύτωνα.

Εφαρμόσαμε τα μοντέλα αυτά στη μεταφορική κίνηση.

Οι νόμοι του Νεύτωνα μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλες περιπτώσεις:

- σε σώματα τα οποία ακολουθούν κυκλικές τροχιές
- στην κίνηση την οποία παρατηρούμε από ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς
- στην κίνηση ενός σώματος μέσα σε ένα ιξώδες μέσο

Θα παρουσιάσουμε πολλά παραδείγματα για να δείξουμε την εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα σε μια ποικιλία νέων περιπτώσεων.

Ομαλή κυκλική κίνηση – Επιτάχυνση

Ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου σε κυκλική τροχιά ακτίνας r και επιταχύνει.

Το μέτρο της επιτάχυνσης δίνεται από τη σχέση

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

- Η κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}_c$ έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι πάντα κάθετη προς την ταχύτητα.

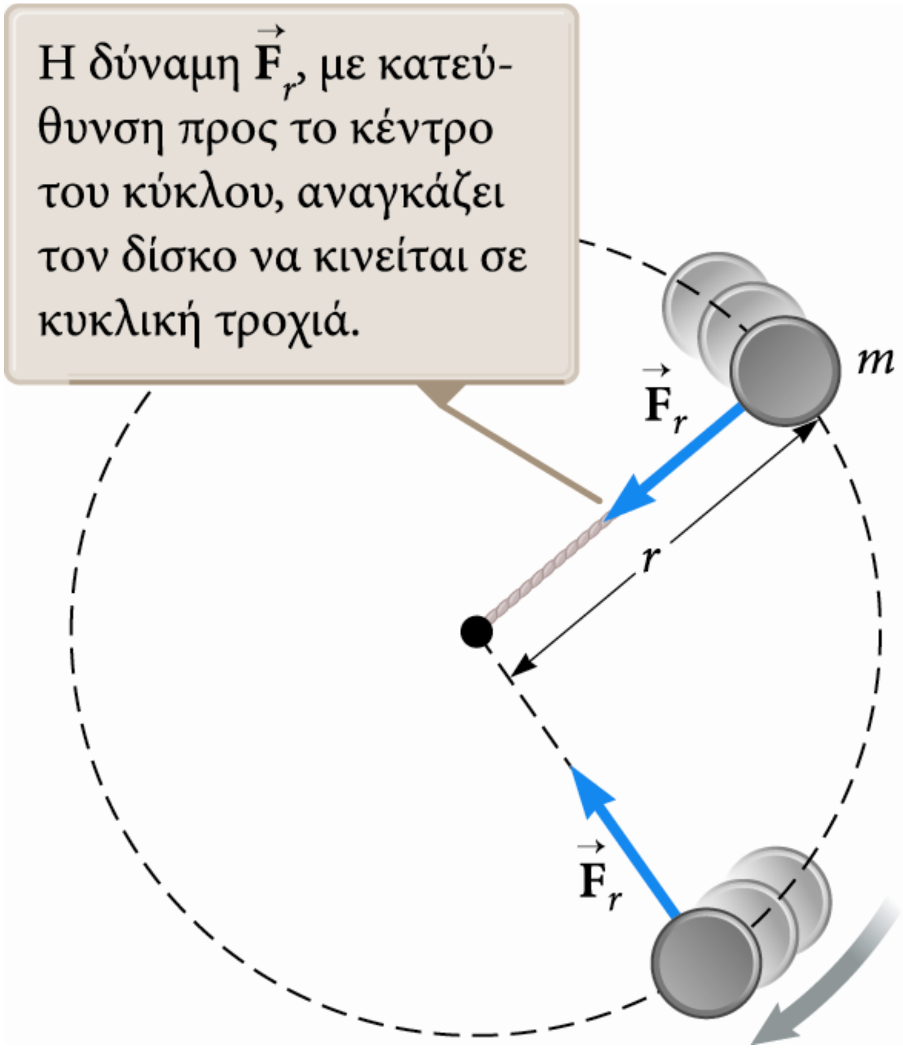
Ομαλή κυκλική κίνηση – Δύναμη

Η κεντρομόλος επιτάχυνση συνδέεται με μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_r$.

Η δύναμη αυτή έχει επίσης ακτινική διεύθυνση με φορά προς το κέντρο του κύκλου.

Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα στην ακτινική διεύθυνση δίνει

$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r}$$



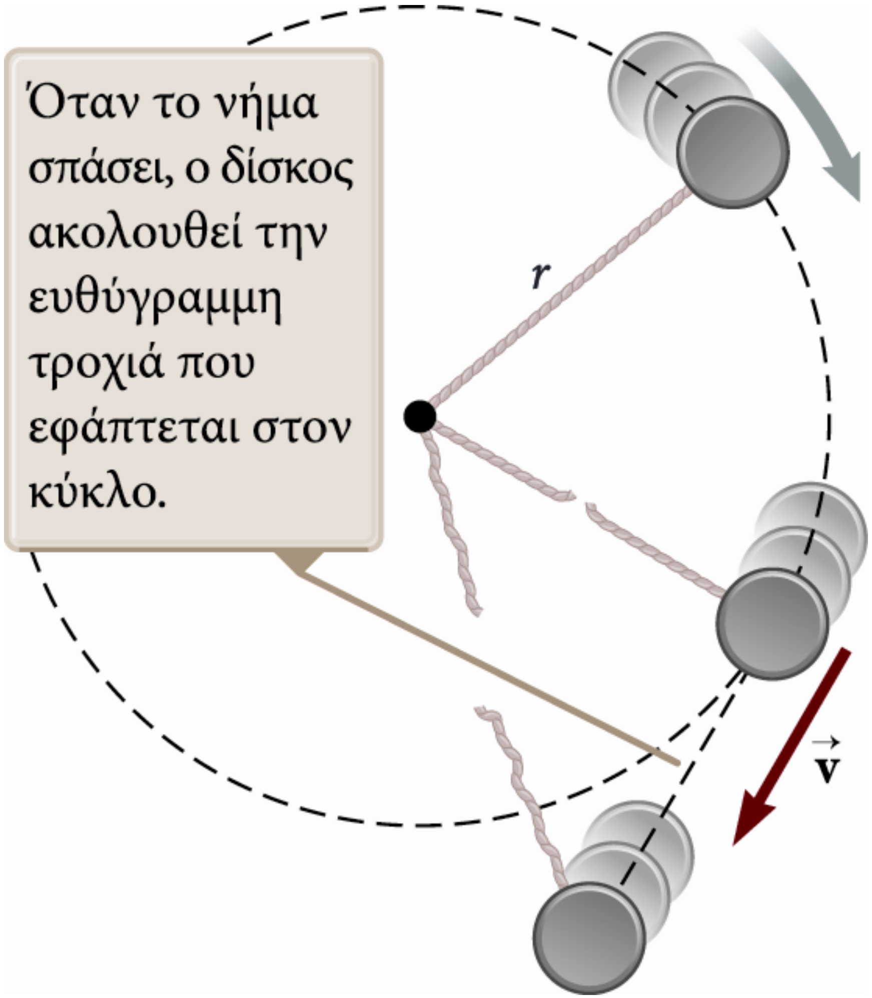
Ομαλή κυκλική κίνηση (*συνέχεια*)

Η δύναμη η οποία προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση ασκείται ακτινικά προς το κέντρο του κύκλου.

Μεταβάλλει την κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας.

Αν η δύναμη αυτή εξαφανιστεί, το σώμα θα αρχίσει να κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος της ***εφαπτομένης*** στον κύκλο.

- Δείτε τα διάφορα σημεία στα οποία μπορεί να συμβεί αυτό στη Δυναμική Εικόνα.



Κωνικό εκκρεμές

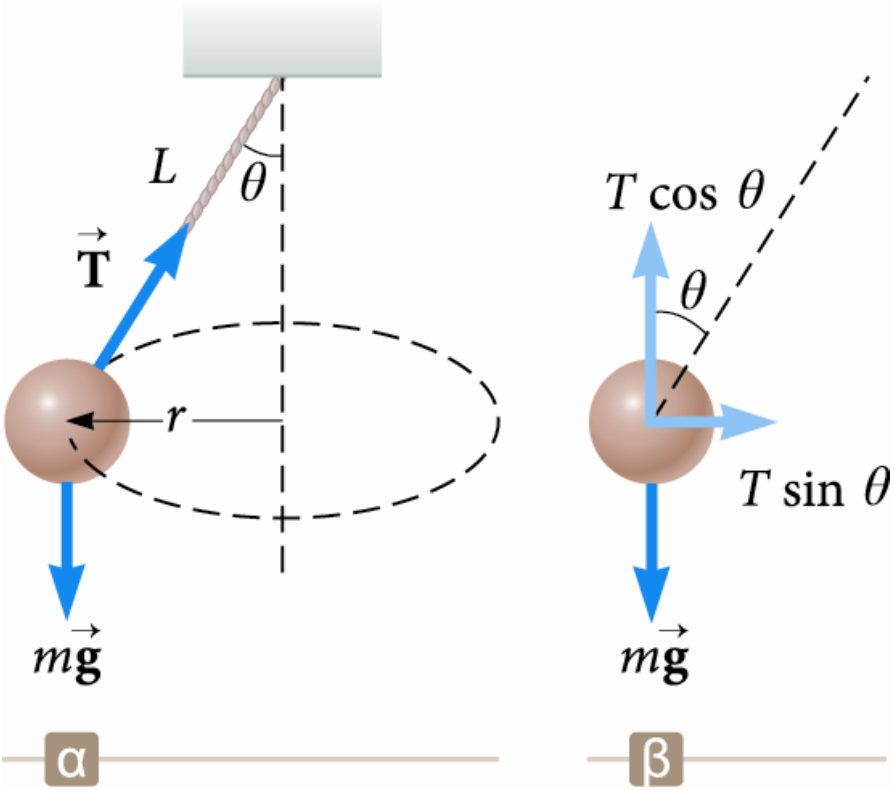
Το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση.

Εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση στην οριζόντια διεύθυνση.

- $\sum F_y = 0 \rightarrow T\cos\,\theta = mg$
- $\sum F_x = T\sin\,\theta = ma_c$

Το μέτρο της ταχύτητας *v* είναι ανεξάρτητο από τη μάζα *m*.

$$v = \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}$$



Κίνηση σε οριζόντιο κύκλο

Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία κινείται το σώμα εξαρτάται από τη μάζα του σώματος και την τάση του νήματος.

Η φυγόκεντρος δύναμη δίνεται από την τάση.

$$v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

Το μέγιστο μέτρο ταχύτητας αντιστοιχεί στη μέγιστη τάση την οποία μπορεί να αντέξει το νήμα.

Οριζόντια (επίπεδη) καμπή

Μοντελοποιήστε το αυτοκίνητο στο οριζόντιο επίπεδο ως σωματίδιο που κινείται με ομαλή κυκλική κίνηση.

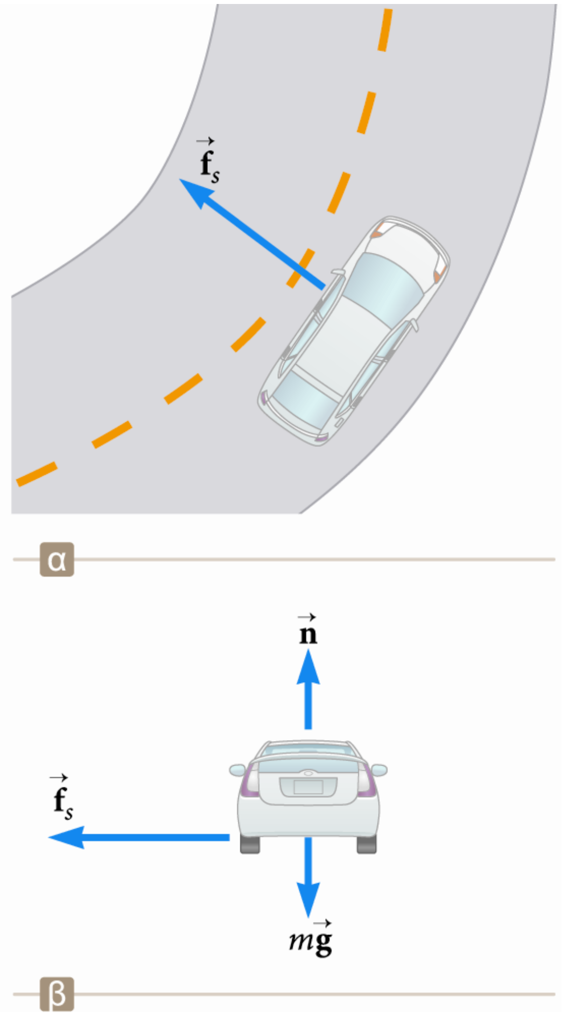
Μοντελοποιήστε το αυτοκίνητο στην κατακόρυφη διεύθυνση ως σωματίδιο σε ισορροπία.

Η φυγόκεντρος δύναμη παρέχεται από τη δύναμη της στατικής τριβής.

Το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας με την οποία μπορεί να στρίψει το αυτοκίνητο είναι:

$$v = \sqrt{\mu_s g r}$$

- Προσέξτε ότι αυτό δεν εξαρτάται από τη μάζα του αυτοκινήτου



Καμπή με κλίση

Σε αυτή την περίπτωση, η καμπή με κλίση σχεδιάζεται έτσι ώστε η τριβή να είναι μηδενική.

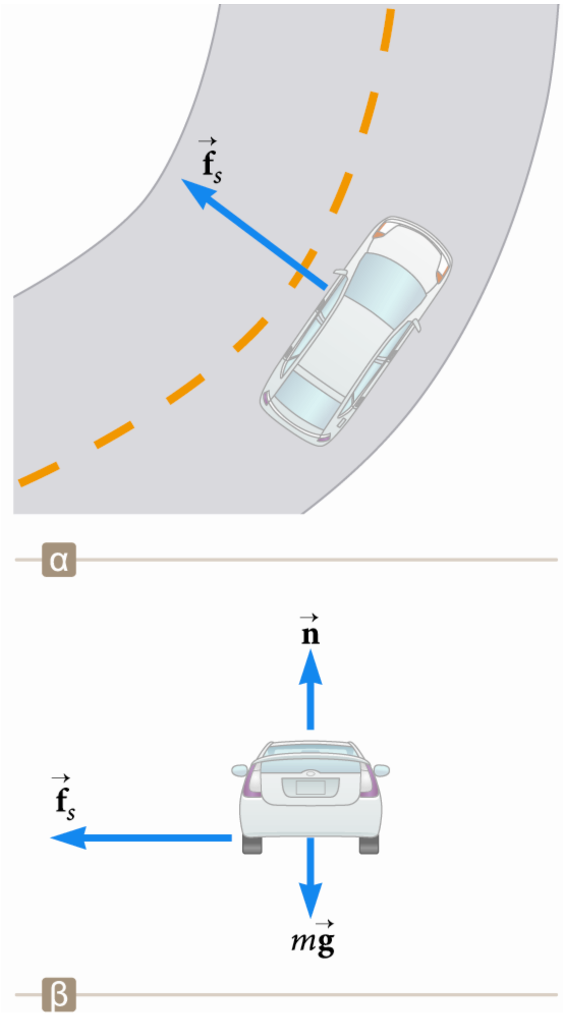
Μοντελοποιήστε το αυτοκίνητο στην κατακόρυφη διεύθυνση ως σωματίδιο σε ισορροπία.

Μοντελοποιήστε το αυτοκίνητο στην οριζόντια διεύθυνση ως σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Μία συνιστώσα της κάθετης δύναμης είναι η φυγόκεντρος δύναμη.

Η γωνία κλίσης βρίσκεται από τη σχέση

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$



Καμπή με κλίση (2)

Η γωνία κλίσης είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του οχήματος.

Αν το αυτοκίνητο κινείται στην καμπή με ταχύτητα μικρότερη από την προβλεπόμενη, θα χρειαστεί τριβή για να μην ολισθήσει προς το εσωτερικό της καμπής.

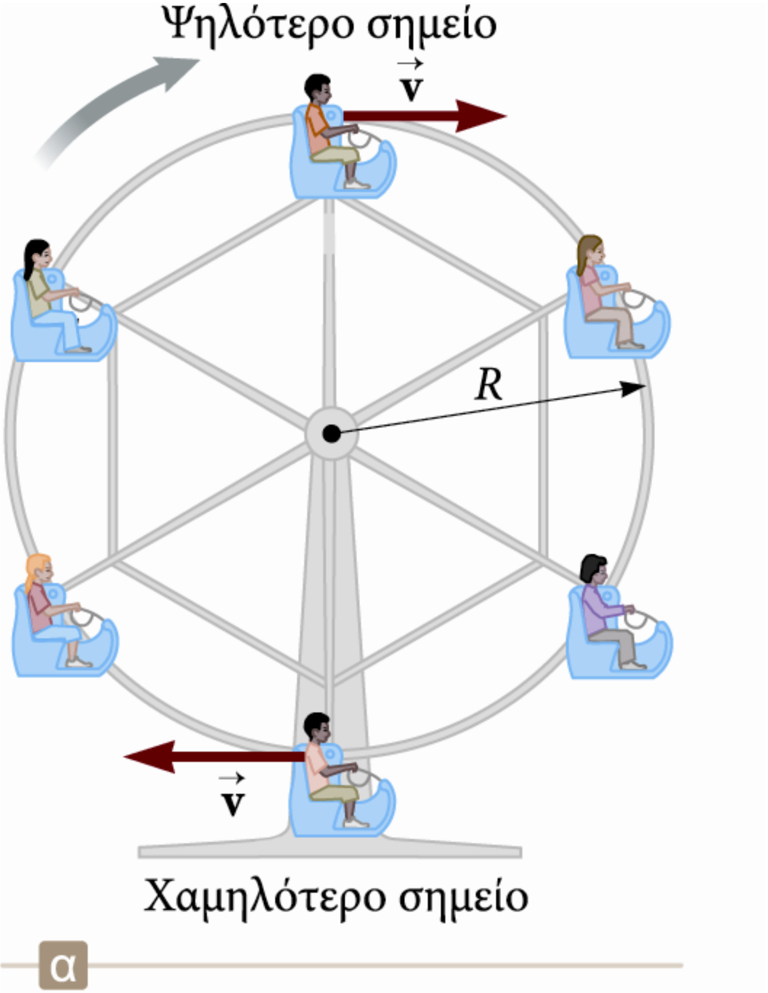
Αν το αυτοκίνητο κινείται στην καμπή με ταχύτητα μεγαλύτερη από την προβλεπόμενη, θα χρειαστεί τριβή για να μην ολισθήσει προς το εξωτερικό της καμπής.

Ο τροχός του λούνα παρκ

Στο ψηλότερο και στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς, η κάθετη δύναμη και η βαρυτική δύναμη που δρουν στο παιδί έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.

Μπορείτε να κατηγοριοποιήσετε το πρόβλημα ως πρόβλημα ενός σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, στο οποίο ασκείται και η βαρυτική δύναμη.

- Το παιδί είναι το σωματίδιο.

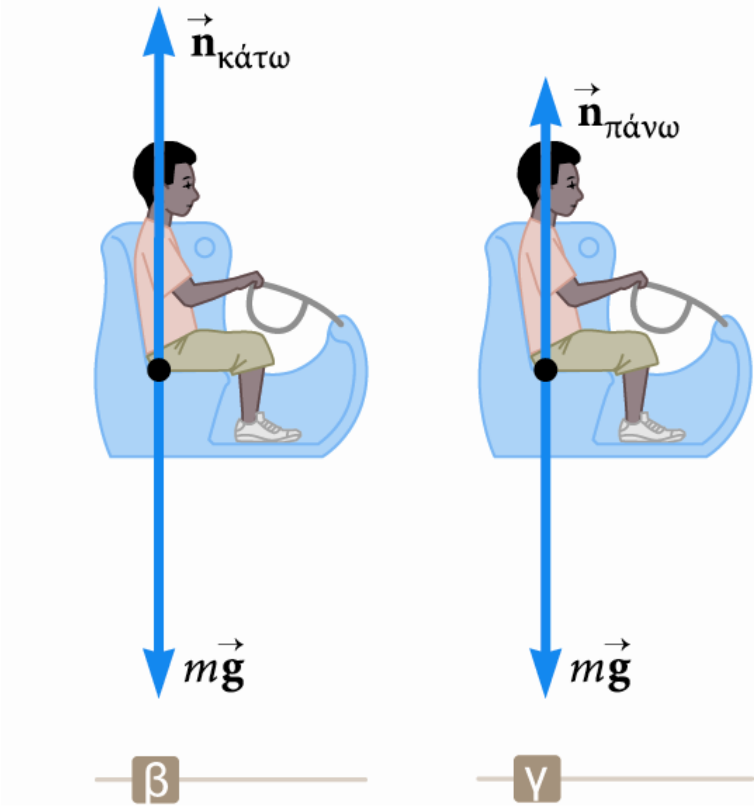


Ο τροχός του λούνα παρκ (*συνέχεια*)

Στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς, η δύναμη που ασκείται στο παιδί κατακόρυφα προς τα πάνω (η κάθετη δύναμη) είναι μεγαλύτερη από το βάρος του.

$$\sum F = n_{κάτω} - mg = \frac{mv^2}{r}$$

$$n_{κάτω} = mg\left(1 + \frac{v^2}{rg}\right)$$

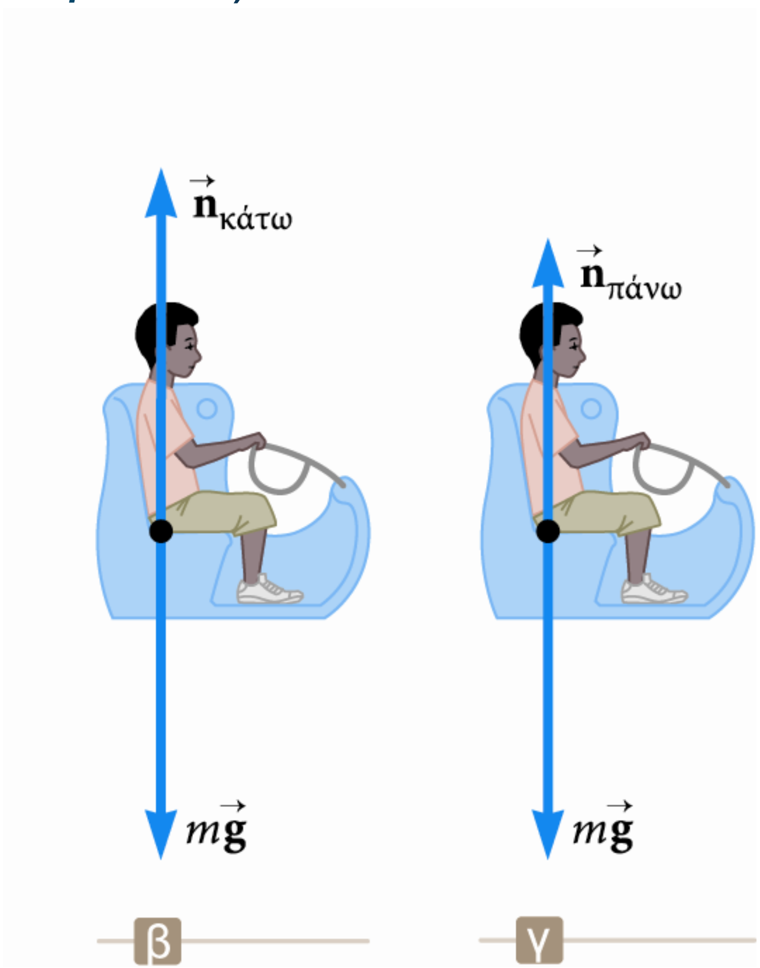


Ο τροχός του λούνα παρκ (*τελική διαφάνεια*)

Στο ψηλότερο σημείο του κύκλου, η δύναμη που ασκείται στο παιδί είναι μικρότερη από το βάρος του.

$$\sum F = n_{\text{επάνω}} + mg = \frac{mv^2}{r}$$

$$n_{\text{επάνω}} = mg\left(\frac{v^2}{rg} - 1\right)$$



Μη ομαλή κυκλική κίνηση

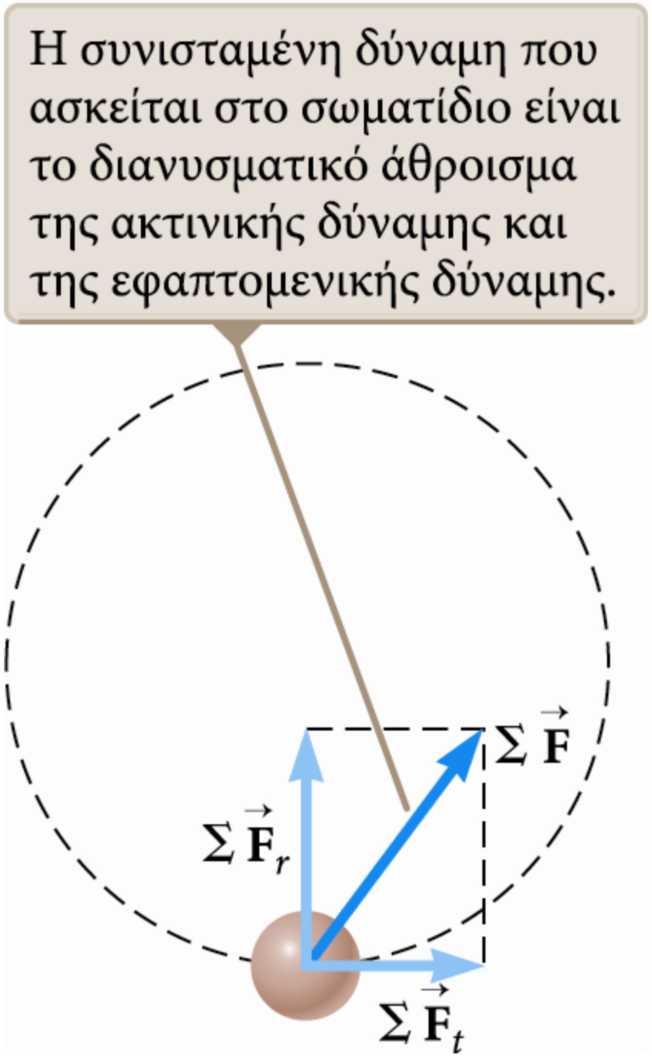
Η επιτάχυνση και η δύναμη έχουν εφαπτομενικές συνιστώσες.

Η $\vec{F}_r$ προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση.

Η $\vec{F}_t$ προκαλεί την εφαπτομενική επιτάχυνση.

Η συνισταμένη δύναμη είναι

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_r + \sum \vec{F}_t$$



Ταχύτητα μεταβαλλόμενου μέτρου σε κατακόρυφη κυκλική τροχιά

Η βαρύτητα ασκεί μια εφαπτομενική δύναμη στο σώμα.

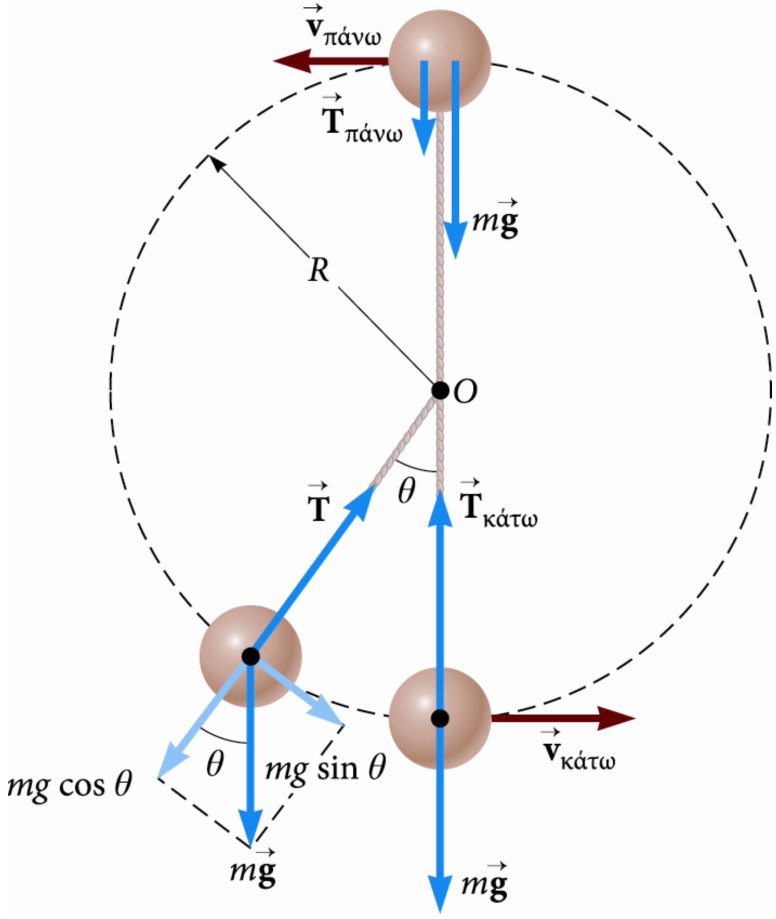
- Μελετήστε τις συνιστώσες της F_g

Μοντελοποιήστε τη σφαίρα ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης, το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά.

- Το σώμα δεν εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Η τάση σε οποιοδήποτε σημείο δίνεται από τη σχέση.

$$T = mg\left(\frac{v^2}{Rg} + \cos\theta\right)$$



Ψηλότερο και χαμηλότερο σημείο της κυκλικής τροχιάς

Η τάση στο χαμηλότερο σημείο είναι μέγιστη.

$$T = mg\left(\frac{v_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega}^2}{Rg} + 1\right)$$

Η τάση στο ψηλότερο σημείο είναι ελάχιστη.

$$T = mg\left(\frac{v_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega}^2}{Rg} - 1\right)$$

Αν ισχύει $T_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} = 0$, τότε

$$v_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} = \sqrt{gR}$$

Κίνηση σε επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς

Οι ***πλασματικές δυνάμεις*** εμφανίζονται σε επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς.

- Οι πλασματικές δυνάμεις παρατηρούνται σε επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς.
- Οι πλασματικές δυνάμεις φαίνονται να δρουν στα σώματα όπως οι πραγματικές δυνάμεις, αλλά στην περίπτωση των πλασματικών δυνάμεων δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το δεύτερο σώμα.
  - Μην ξεχνάτε ότι οι πραγματικές δυνάμεις είναι πάντα αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο σωμάτων.
- Οι απλές πλασματικές δυνάμεις φαίνονται να δρουν με κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της επιτάχυνσης του μη αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

«Φυγόκεντρος» δύναμη

Στο σύστημα αναφοράς της συνοδηγού (β), μια δύναμη φαίνεται να τη σπρώχνει προς την πόρτα.

Στο σύστημα αναφοράς της Γης, το αυτοκίνητο ασκεί μια δύναμη στη συνοδηγό με κατεύθυνση προς τα αριστερά.

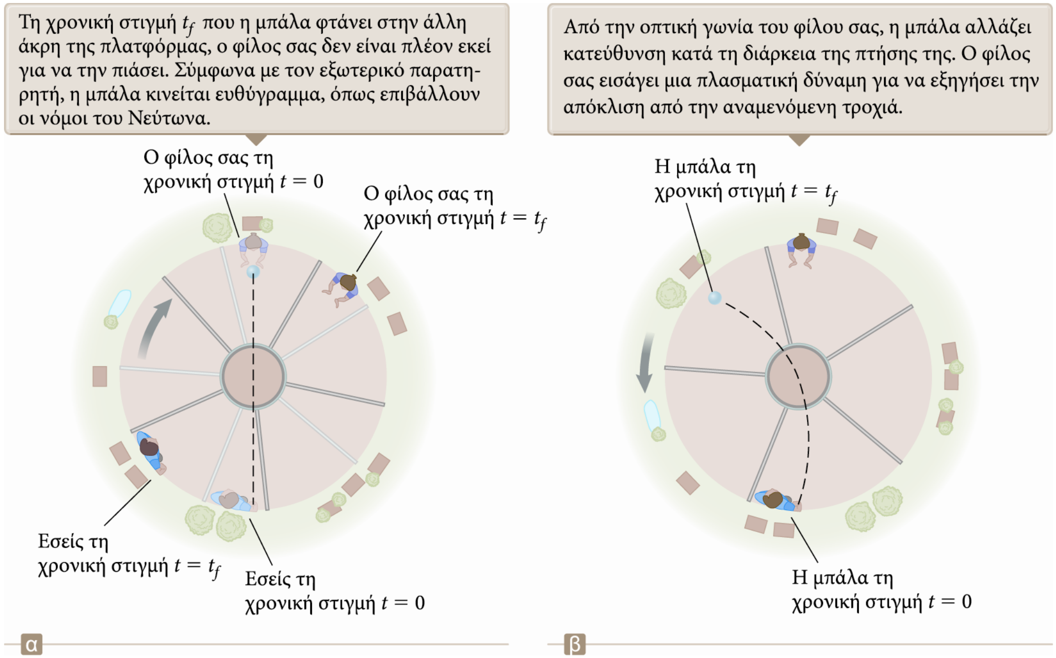
Η ακτινική δύναμη με φορά προς τα έξω ονομάζεται συχνά ***φυγόκεντρος*** δύναμη.

- Είναι μια πλασματική δύναμη, η οποία οφείλεται στην κεντρομόλο επιτάχυνση που συνδέεται με τη μεταβολή της κατεύθυνσης του αυτοκινήτου.

Στην πραγματικότητα, η δύναμη που επιτρέπει στη συνοδηγό να κινείται μαζί με το αυτοκίνητο είναι η δύναμη της τριβής.

- Αν η πλασματική δύναμη δεν είναι αρκετά μεγάλη, η συνοδηγός ακολουθεί την αρχική της τροχιά σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα.

«Δύναμη Coriolis»



Πρόκειται για μια πλασματική δύναμη που προκαλείται από τη μεταβολή της ακτινικής θέσης ενός σώματος σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων.

Το αποτέλεσμα της περιστροφής είναι η μπάλα του παραδείγματος να ακολουθήσει καμπύλη τροχιά σύμφωνα με τον παρατηρητή στο καρουσέλ.

Από την οπτική γωνία του παρατηρητή στο καρουσέλ, για την καμπύλη τροχιά της μπάλας ευθύνεται μια πλάγια δύναμη.

Πλασματικές δυνάμεις – Παραδείγματα

Οι πλασματικές δυνάμεις δεν είναι πραγματικές, αλλά έχουν πραγματικές επιπτώσεις.

Παραδείγματα:

- Τα αντικείμενα που βρίσκονται στο ταμπλό του αυτοκινήτου σας γλιστράνε και πέφτουν.
- Καθώς περιστρέφεστε πάνω σε ένα καρουσέλ, νιώθετε να σας σπρώχνουν προς τα έξω.
- Η δύναμη Coriolis ευθύνεται για την περιστροφική κίνηση μετεωρολογικών συστημάτων, όπως οι τυφώνες, καθώς και για τα ρεύματα των ωκεανών.

Πλασματικές δυνάμεις σε γραμμικά συστήματα

Ο αδρανειακός παρατηρητής μοντελοποιεί τη σφαίρα ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης στην οριζόντια διεύθυνση και ως σωματίδιο σε ισορροπία στην κατακόρυφη διεύθυνση.

Ο μη αδρανειακός παρατηρητής μοντελοποιεί τη σφαίρα ως σωματίδιο σε ισορροπία και στις δύο διευθύνσεις.

Ο αδρανειακός παρατηρητής (α), που είναι ακίνητος, βλέπει

$$\sum F_x = T\sin\theta = ma$$

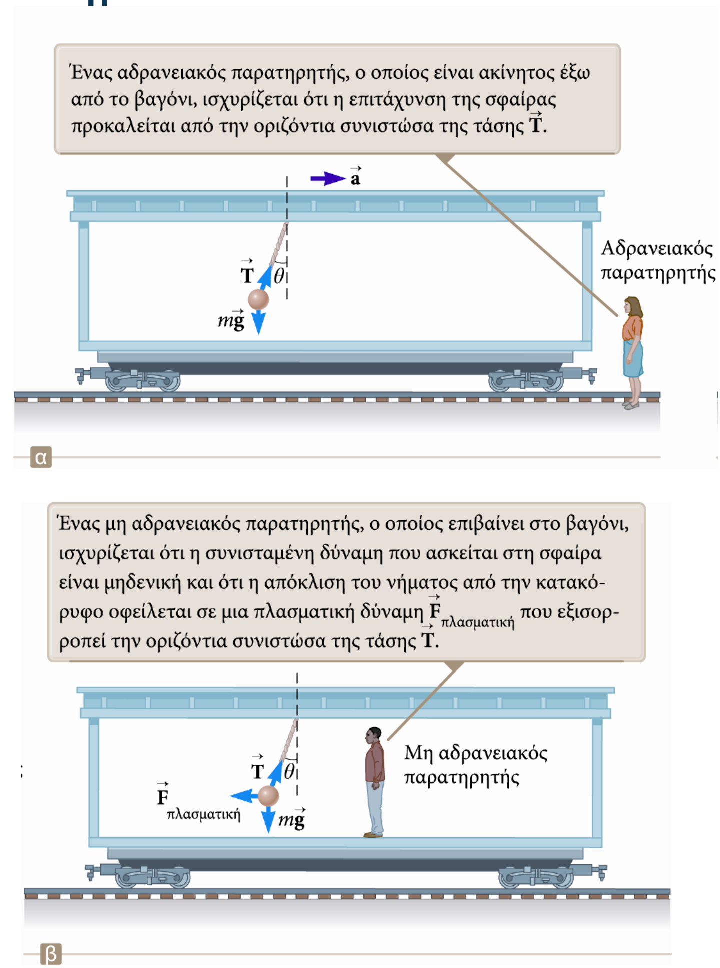
$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$

Ο μη αδρανειακός παρατηρητής (β) βλέπει

$$\sum F'_x = T\sin\theta - F_{\text{πλασματική}} = ma$$

$$\sum F'_y = T\cos\theta - mg = 0$$

Οι δυνάμεις είναι ισοδύναμες αν ισχύει $F_{\text{πλασματική}} = ma$



Ενότητα Μ6.3

Κίνηση υπό την παρουσία δυνάμεων αντίστασης

Ένα σώμα μπορεί να κινείται μέσα σε κάποιο μέσο.

- Το μέσο μπορεί να είναι είτε υγρό είτε αέριο.

Το μέσο ασκεί μια *δύναμη αντίστασης* $\vec{\mathbf{R}}$, η οποία αντιστέκεται στην κίνηση του σώματος μέσα σε αυτό.

Το μέτρο της $\vec{\mathbf{R}}$ εξαρτάται από το μέσο.

Η κατεύθυνση της $\vec{\mathbf{R}}$ είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της κίνησης του σώματος σε σχέση με το μέσο.

- Αυτή η κατεύθυνση μπορεί να είναι ή να μην είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της ταχύτητας του σώματος σύμφωνα με τον παρατηρητή.

Η $\vec{\mathbf{R}}$ σχεδόν πάντα αυξάνεται όταν αυξάνεται η ταχύτητα.

Κίνηση υπό την παρουσία δυνάμεων αντίστασης (*συνέχεια*)

Η εξάρτηση του μέτρου της $\vec{\mathbf{R}}$ από το μέτρο της ταχύτητας μπορεί να είναι σύνθετη.

Θα μελετήσουμε μόνο δύο περιπτώσεις:

- Η $\vec{\mathbf{R}}$ είναι ανάλογη προς το μέτρο της ταχύτητας (v).
  - Η προσέγγιση ισχύει για σώματα που κινούνται αργά ή για μικρά σώματα.
- Η $\vec{\mathbf{R}}$ είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητας (v^2).
  - Η προσέγγιση ισχύει για μεγάλα σώματα.

Δύναμη αντίστασης ανάλογη προς το μέτρο της ταχύτητας

Η δύναμη αντίστασης μπορεί να εκφραστεί ως

$$\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$$

Η σταθερά *b* εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου, καθώς και από το σχήμα και τις διαστάσεις του σώματος.

Το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει ότι η $\vec{\mathbf{R}}$ έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$.

Δύναμη αντίστασης ανάλογη προς το μέτρο της ταχύτητας – Παράδειγμα

Θεωρήστε μια μικρή σφαίρα μάζας *m* την οποία αφήνουμε από κατάσταση ηρεμίας μέσα σε ένα υγρό.

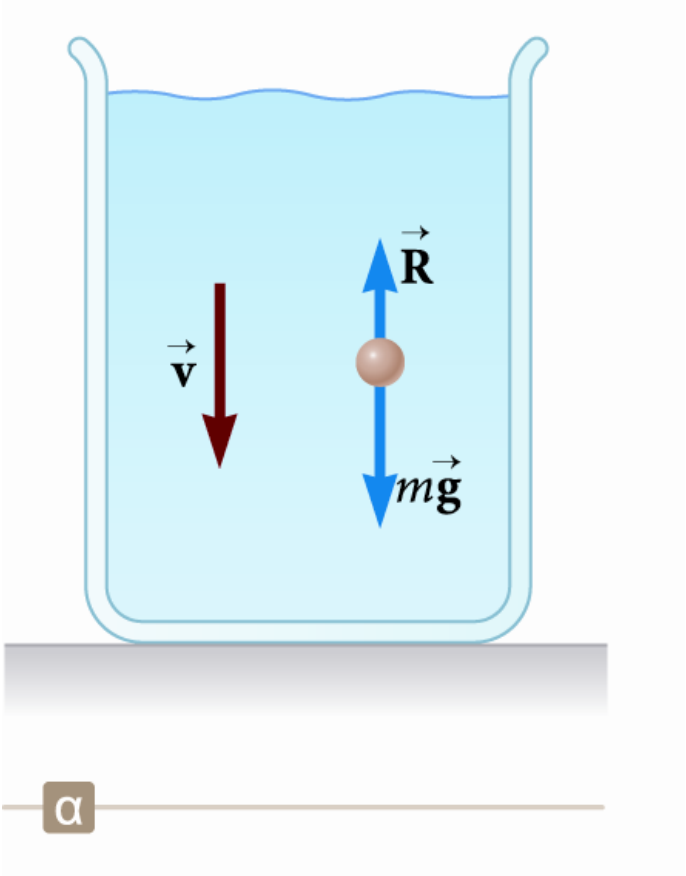
Στη σφαίρα ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- Η δύναμη αντίστασης
- Η βαρυτική δύναμη

Η ανάλυση της κίνησης δίνει

$$mg - bv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v$$



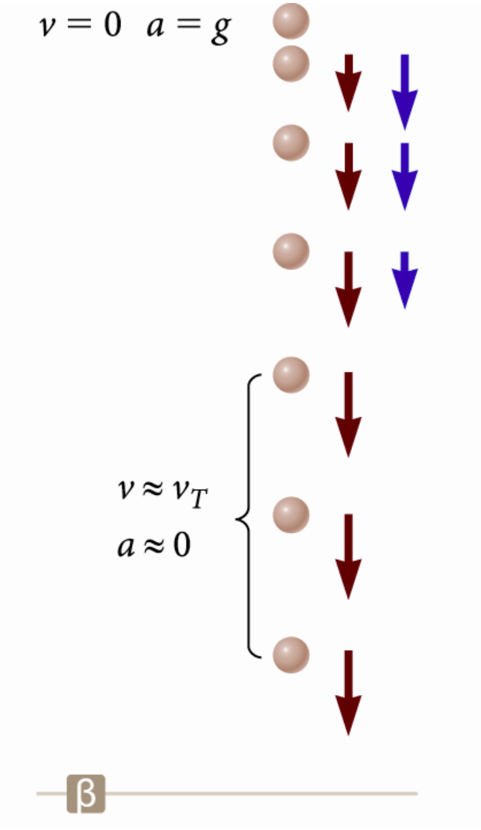
Δύναμη αντίστασης ανάλογη προς το μέτρο της ταχύτητας – Παράδειγμα (συνέχεια)

Αρχικά, ισχύει $v = 0$ και $dv/dt = g$.

Καθώς ο χρόνος t αυξάνεται, η δύναμη R αυξάνεται και η επιτάχυνση a μειώνεται.

Η επιτάχυνση τείνει στο 0 όταν $R \rightarrow mg$.

Σε αυτό το σημείο, το μέτρο της ταχύτητας v τείνει στην ***οριακή ταχύτητα*** του σώματος.



CENGAGE Learning™

Οριακή ταχύτητα

Για να υπολογίσουμε την οριακή ταχύτητα, θέτουμε $a = 0$

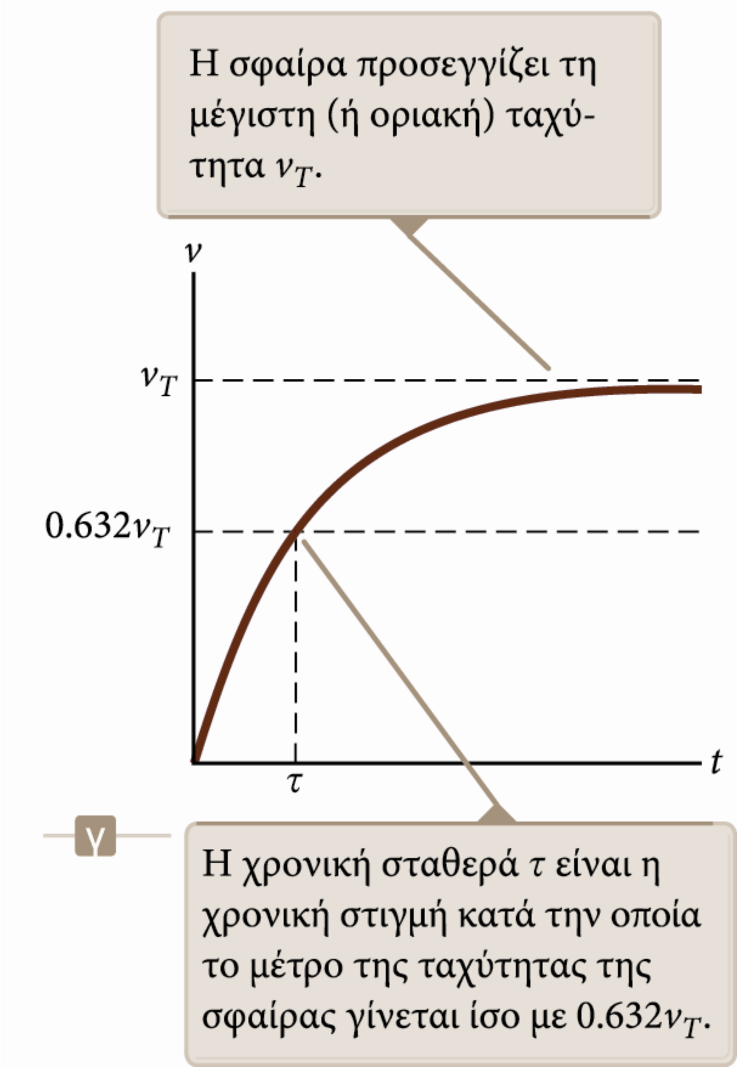
$$v_T = \frac{mg}{b}$$

Λύνοντας τη διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right) = v_T\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Το τ είναι η ***χρονική σταθερά***:

$$\tau = m/b$$



CENGAGE Learning

Δύναμη αντίστασης ανάλογη προς το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητας (v^2)

Για σώματα που κινούνται γρήγορα μέσα στην ατμόσφαιρα, η δύναμη αντίστασης είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητάς τους.

$R = \frac{1}{2} D r A v^2$

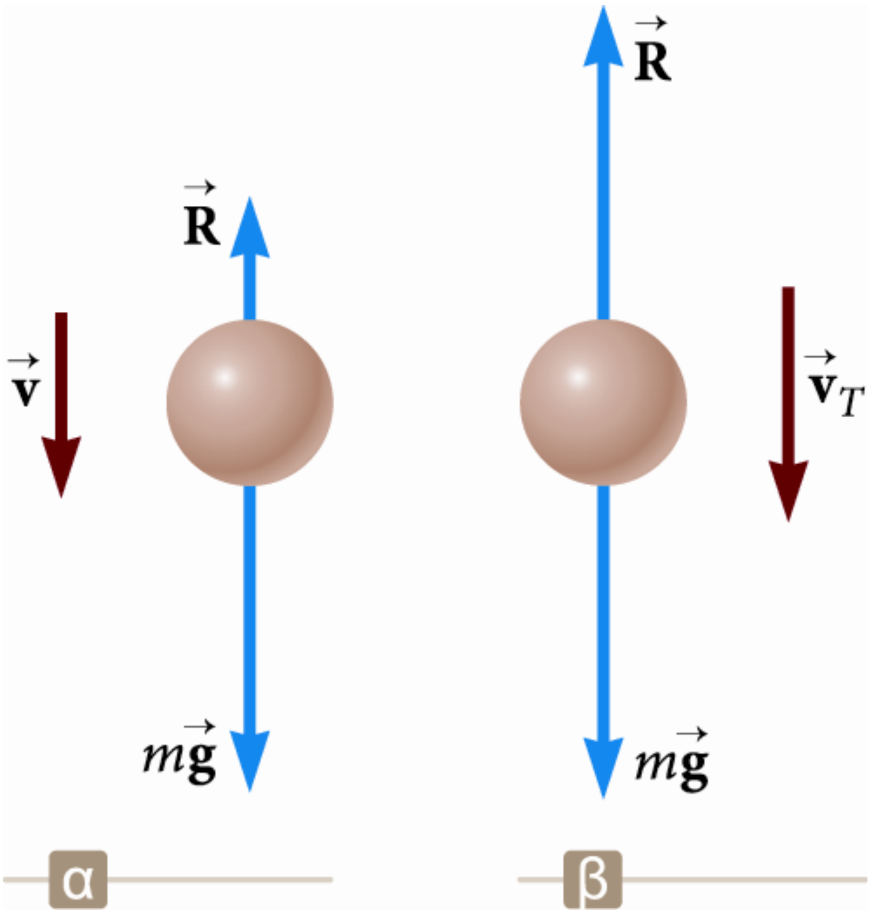
- Το *D* είναι ένα αδιάστατο εμπειρικό μέγεθος το οποίο ονομάζεται συντελεστής οπισθέλκουσας.
- Το *r* είναι η πυκνότητα του αέρα.
- Το *A* είναι το εμβαδόν διατομής του σώματος.
- Το *v* είναι το μέτρο της ταχύτητας του σώματος.

Δύναμη αντίστασης ανάλογη προς το v^2 – Παράδειγμα

Ας αναλύσουμε την κίνηση ενός σώματος που πέφτει και δέχεται από τον αέρα μια δύναμη αντίστασης.

$$\sum F = mg - \frac{1}{2} D\rho A v^2 = ma$$

$$a = g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right) v^2$$



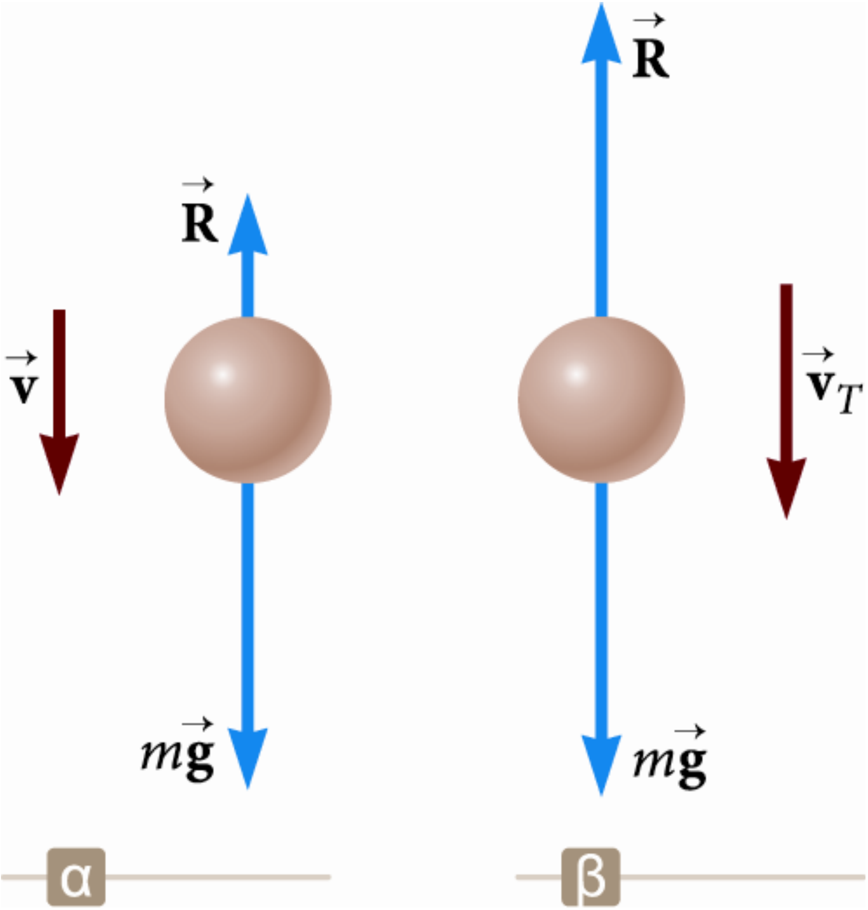
CENGAGE Learning

Δύναμη αντίστασης ανάλογη προς το v^2 – Οριακή ταχύτητα

Η οριακή ταχύτητα προκύπτει όταν η επιτάχυνση είναι μηδενική.

Η επίλυση της προηγούμενης εξίσωσης δίνει

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}}$$



Μερικές οριακές ταχύτητες

ΠΙΝΑΚΑΣ Μ6.1 *Οριακή ταχύτητα διαφόρων σωμάτων που πέφτουν στην ατμόσφαιρα*

Σώμα	**Μάζα (kg)**	**Εμβαδόν διατομής (m^2)**	**v_T (m/s)**
Αλεξιπτωτιστής	75	0.70	60
Μπάλα του μπέιζμπολ (ακτίνα 3.7 cm)	0.145	4.2×10^{-3}	43
Μπάλα του γκολφ (ακτίνα 2.1 cm)	0.046	1.4×10^{-3}	44
Χαλάζι (ακτίνα 0.50 cm)	4.8×10^{-4}	7.9×10^{-5}	14
Σταγόνα βροχής (ακτίνα 0.20 cm)	3.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	9.0

Παράδειγμα: Σερφάρισμα στον αέρα

Ο αλεξιπτωτιστής πηδάει από το αεροπλάνο.

- Η αρχική ταχύτητα είναι μηδενική.
- Η βαρύτητα τον αναγκάζει να επιταχύνει προς το έδαφος.
- Το μέτρο της κατακόρυφης καθοδικής ταχύτητάς του αυξάνεται, αλλά το ίδιο ισχύει για την κατακόρυφη ανοδική δύναμη που ασκείται σε αυτόν.

Τελικά, η καθοδική δύναμη της βαρύτητας εξισώνεται με την ανοδική δύναμη αντίστασης.

- Κινείται με την οριακή ταχύτητά του.

Σερφάρισμα στον αέρα (*συνέχεια*)

Ο αλεξιπτωτιστής ανοίγει το αλεξίπτωτό του.

- Κάποια χρονική στιγμή, αφότου ο αλεξιπτωτιστής έχει φτάσει στην οριακή του ταχύτητα, ανοίγει το αλεξίπτωτό του.
- Αυτό αυξάνει δραστικά την ανοδική δύναμη αντίστασης.
- Η συνισταμένη δύναμη, και άρα η επιτάχυνση, έχει τώρα κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα πάνω.
  - Η ταχύτητα καθόδου μειώνεται.
- Τελικά, ο αλεξιπτωτιστής φτάνει σε μια νέα, μικρότερη οριακή ταχύτητα.

Παράδειγμα: Φίλτρα καφέ

Ρίχνετε μια σειρά από ανοιχτά χάρτινα φίλτρα του καφέ και μετράτε τις οριακές ταχύτητές τους.

Η χρονική σταθερά είναι μικρή.

- Τα φίλτρα αποκτούν γρήγορα την οριακή τους ταχύτητα.

Παράμετροι:

- $M_{\text{φίλτρου καφέ}} = 1.64$ g
- Τα φίλτρα στοιβάζονται έτσι ώστε το εμβαδόν της μετωπικής τους επιφάνειας να μην αυξάνεται.

Μοντέλο

- Μπορείτε να μοντελοποιήσετε κάθε φίλτρο ως σωματίδιο σε ισορροπία.

Φίλτρα καφέ (*συνέχεια*)

Τα δεδομένα που προέκυψαν από το πείραμα:

Όταν το φίλτρο φτάσει στην οριακή ταχύτητά του, η ανοδική δύναμη αντίστασης εξισορροπεί την καθοδική βαρυτική δύναμη.

$R = mg$

ΠΙΝΑΚΑΣ Μ6.2

Οριακή ταχύτητα και δύναμη αντίστασης για ένθετα φίλτρα καφέ

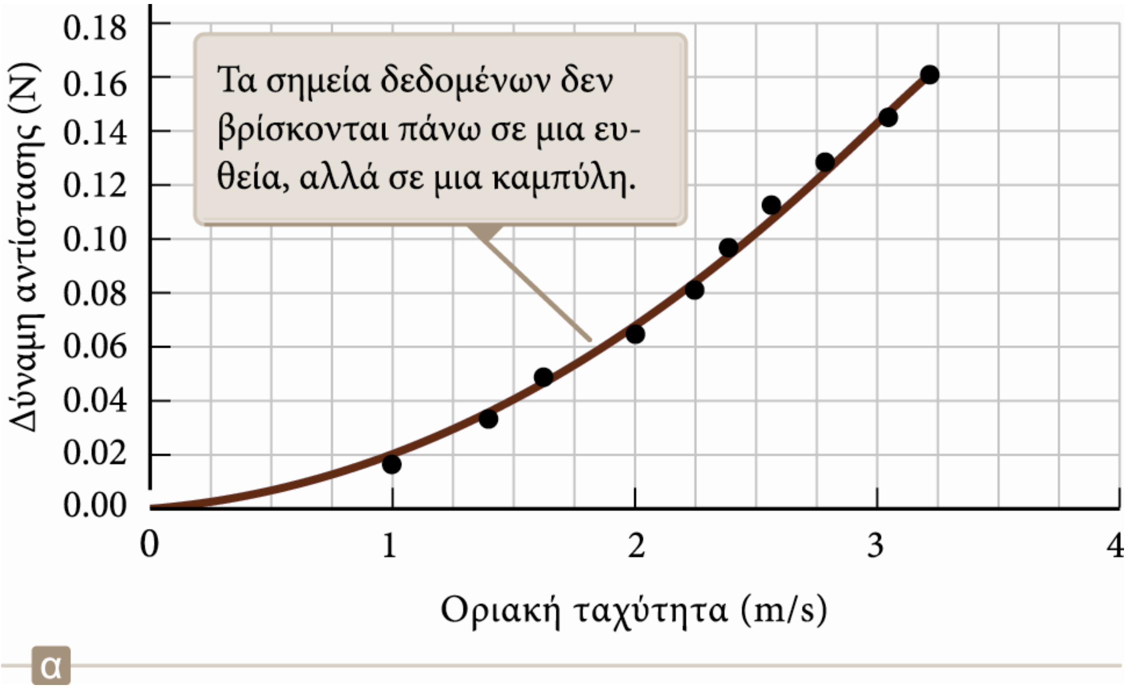
Αριθμός φίλτρων	v_T (m/s)[α]	R (N)
1	1.01	0.016 1
2	1.40	0.032 2
3	1.63	0.048 3
4	2.00	0.064 4
5	2.25	0.080 5
6	2.40	0.096 6
7	2.57	0.112 7
8	2.80	0.128 8
9	3.05	0.144 9
10	3.22	0.161 0

[α]Όλες οι τιμές της ταχύτητας v_T είναι προσεγγιστικές.

Φίλτρα καφέ – Γραφική ανάλυση

Στο γράφημα της δύναμης αντίστασης και της οριακής ταχύτητας, η καμπύλη βέλτιστης προσαρμογής <u>δεν</u> είναι ευθεία.

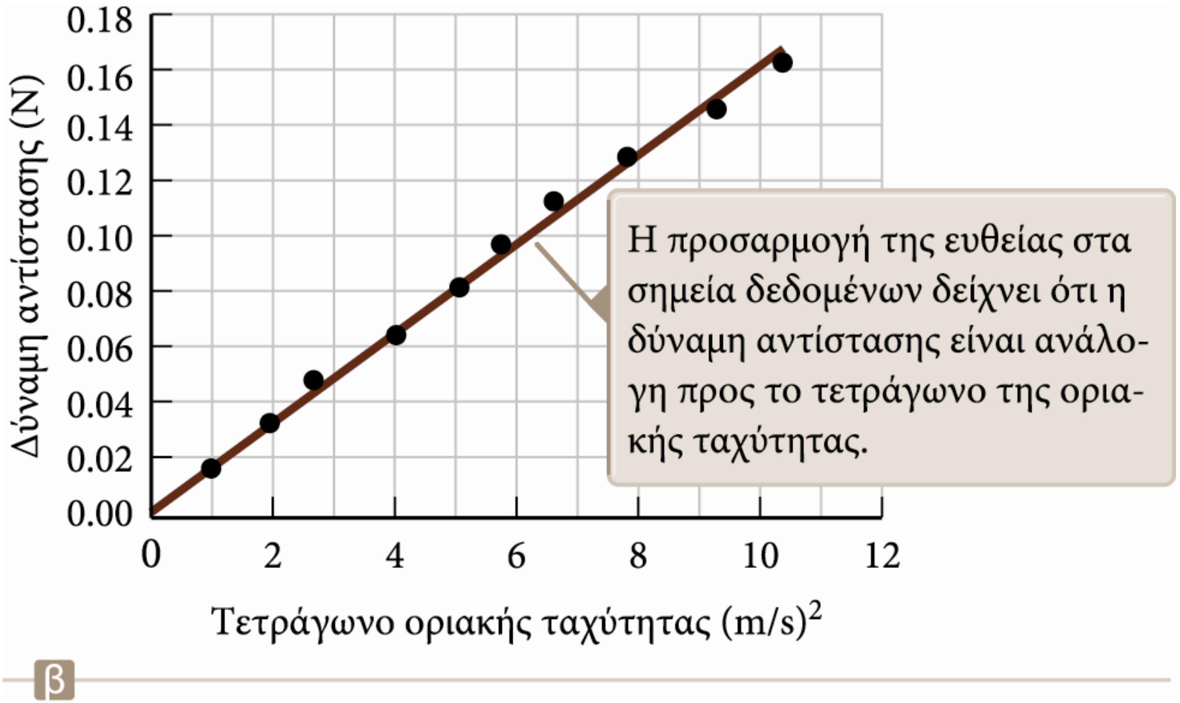
Η δύναμη αντίστασης δεν είναι ανάλογη προς το μέτρο της ταχύτητας του σώματος.



Φίλτρα καφέ – Γραφική ανάλυση

Στο γράφημα της δύναμης αντίστασης και του τετραγώνου της οριακής ταχύτητας, η καμπύλη βέλτιστης προσαρμογής <u>είναι</u> ευθεία.

Η δύναμη αντίστασης είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητας.



Η δύναμη αντίστασης που ασκείται σε μια μπάλα του μπέιζμπολ – Παράδειγμα

Το σώμα κινείται οριζόντια στην ατμόσφαιρα.

Η δύναμη αντίστασης προκαλεί επιβράδυνση της μπάλας.

Η βαρύτητα αναγκάζει την τροχιά της να καμπυλώσει προς τα κάτω.

Η μπάλα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης.

- Εξετάζουμε μόνο μία χρονική στιγμή, οπότε δεν μας ενδιαφέρει η επιτάχυνση.

Αναλύστε το πρόβλημα για να βρείτε τον συντελεστή οπισθέλκουσας *D* και το μέτρο *R* της δύναμης αντίστασης.

$$D = \frac{2mg}{v_T^2 \rho A} \text{ και } R = \frac{1}{2} D \rho A v^2$$