# Κεφάλαιο Μ4

Κίνηση σε δύο διαστάσεις

CENGAGE Learning™

# Κινηματική σε δύο διαστάσεις

Θα περιγράψουμε τη διανυσματική φύση της θέσης, της ταχύτητας, και της επιτάχυνσης με περισσότερες λεπτομέρειες.

Θα μελετήσουμε την κίνηση των βλημάτων και την ομαλή κυκλική κίνηση ως ειδικές περιπτώσεις.

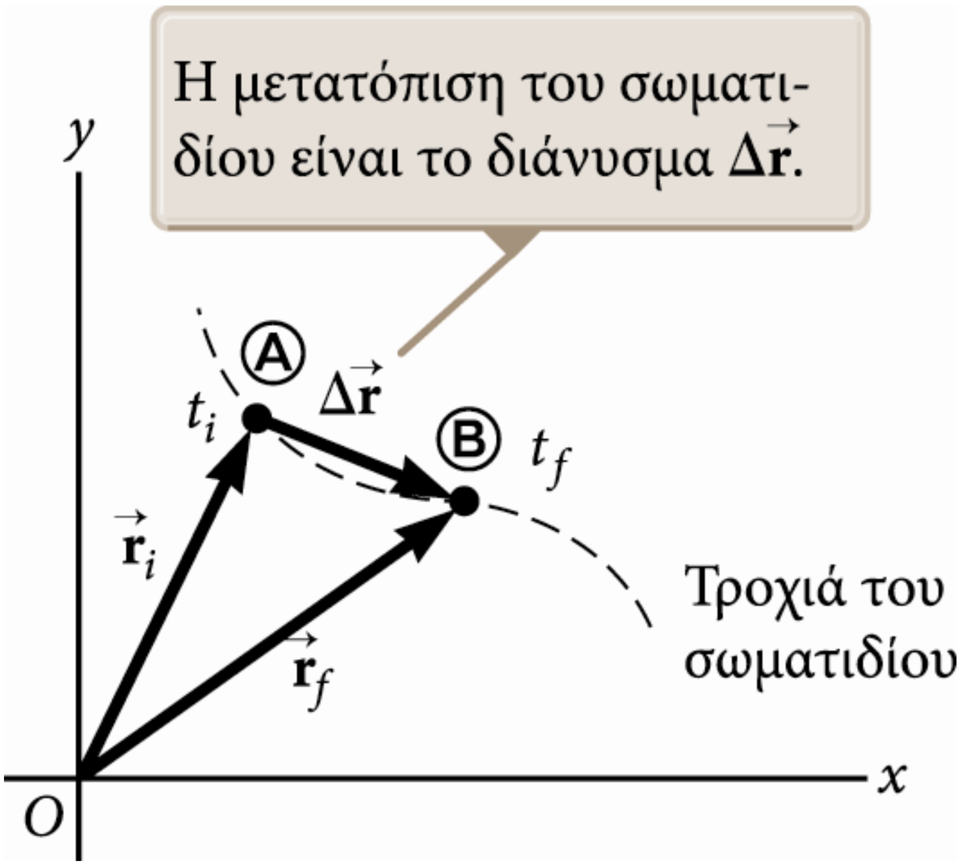
Θα αναλύσουμε τη σχετική κίνηση.

# Θέση και μετατόπιση

Η θέση ενός σώματος περιγράφεται με το διάνυσμα θέσης του $\vec{\mathbf{r}}$ .

Η **μετατόπιση** του σώματος ορίζεται ως η ***μεταβολή της θέσης του***.

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} \equiv \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i$$



# Γενικές ιδέες για την κίνηση

Η κινηματική σε δύο (ή σε τρεις διαστάσεις) είναι παρόμοια με την κινηματική σε μία διάσταση, με τη διαφορά ότι στην πρώτη περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιούμε τον πλήρη συμβολισμό των διανυσμάτων.

- Τα θετικά και τα αρνητικά πρόσημα δεν επαρκούν πλέον για τον προσδιορισμό της κατεύθυνσης.

# Μέση ταχύτητα

Η μέση ταχύτητα είναι ο λόγος της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα στο οποίο συμβαίνει η μετατόπιση.

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{μέση}} \equiv \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t}$$

Η κατεύθυνση του διανύσματος της μέσης ταχύτητας είναι η κατεύθυνση του διανύσματος της μετατόπισης.

Η μέση ταχύτητα μεταξύ σημείων είναι *ανεξάρτητη από τη διαδρομή* που ακολουθείται.

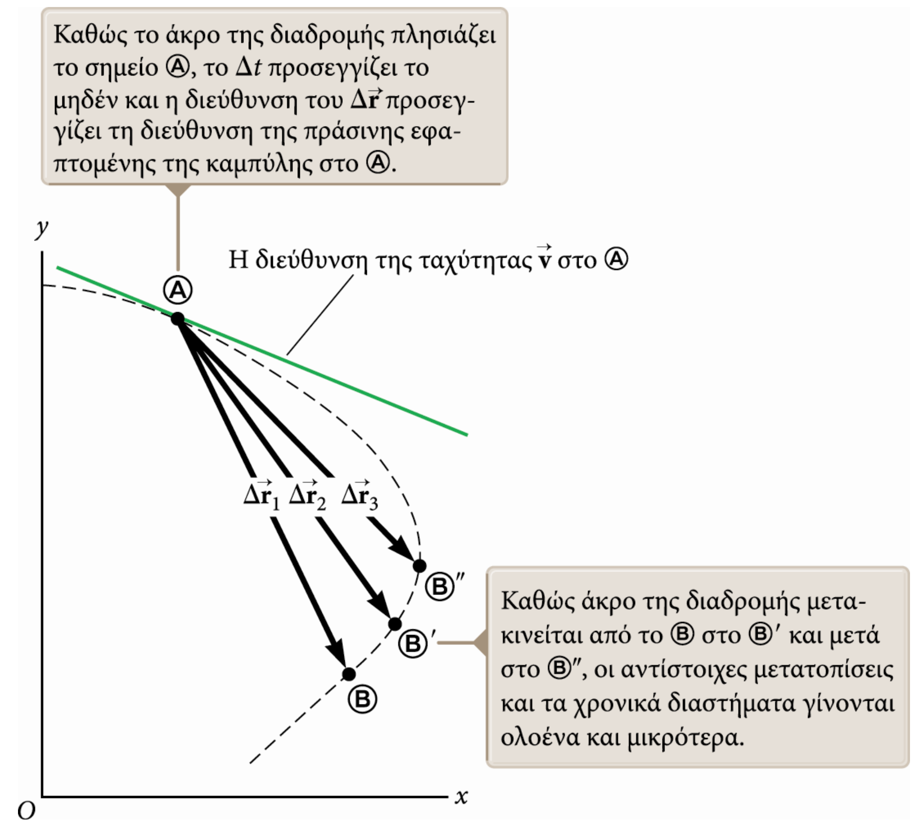
- Αυτό συμβαίνει επειδή εξαρτάται από τη μετατόπιση, η οποία εξαρτάται επίσης από τη διαδρομή.

# Στιγμιαία ταχύτητα

Η στιγμιαία ταχύτητα είναι το όριο της μέσης ταχύτητας καθώς το $\Delta t$ τείνει στο μηδέν.

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$$

- Καθώς το χρονικό διάστημα γίνεται μικρότερο, η κατεύθυνση του διανύσματος της μετατόπισης προσεγγίζει την κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης.



# Στιγμιαία ταχύτητα (*συνέχεια*)

Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς ενός σωματιδίου έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης στο συγκεκριμένο σημείο της τροχιάς και φορά ίδια με αυτή της κίνησης.

Το μέτρο του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας (speed) του σωματιδίου είναι βαθμωτό μέγεθος.

# Μέση επιτάχυνση

Η μέση επιτάχυνση ενός σωματιδίου ορίζεται ως η μεταβολή του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας προς το χρονικό διάστημα στο οποίο συμβαίνει η μεταβολή αυτή.

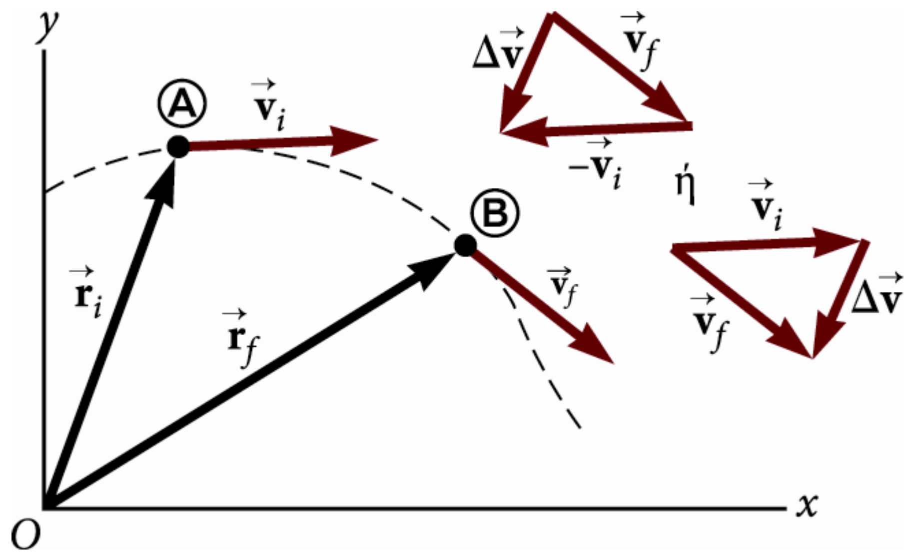
$$\vec{\mathbf{a}}_{\mu έσ\eta} \equiv \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i}{t_f - t_i}$$

# Μέση επιτάχυνση (*συνέχεια*)

Η κατεύθυνση της μεταβολής της ταχύτητας του σωματιδίου κατά την κίνησή του προσδιορίζεται με αφαίρεση διανυσμάτων.

$$\Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i$$

Η μέση επιτάχυνση είναι ένα διανυσματικό μέγεθος που έχει την κατεύθυνση της μεταβολής $\Delta\vec{\mathbf{v}}$.



## Στιγμιαία επιτάχυνση

Η στιγμιαία επιτάχυνση είναι το όριο του λόγου $\Delta\vec{\mathbf{v}}/\Delta t$ καθώς το $\Delta t$ τείνει στο μηδέν.

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$

- Η στιγμιαία επιτάχυνση ισούται με την παράγωγο του διανύσματος της ταχύτητας ως προς τον χρόνο.

# Πώς προκαλείται η επιτάχυνση

Επιτάχυνση μπορούν να προκαλέσουν διάφορες μεταβολές στην κίνηση ενός σωματιδίου.

- Μπορεί να μεταβάλλεται το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας.
- Μπορεί να μεταβάλλεται η κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας.
  - Ακόμα και αν το μέτρο παραμένει σταθερό.
- Ενδέχεται να μεταβάλλονται ταυτόχρονα τόσο το μέτρο όσο και η κατεύθυνση.

# Εξισώσεις της κινηματικής για την κίνηση σε δύο διαστάσεις

Όταν η επιτάχυνση είναι σταθερή στην κίνηση σε δύο διαστάσεις, μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση με μια σειρά εξισώσεων.

Οι εξισώσεις αυτές είναι παρόμοιες με τις εξισώσεις της κινηματικής σε μία διάσταση.

Η κίνηση σε δύο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δύο *ανεξάρτητες* κινήσεις σε καθεμία από τις δύο κάθετες διευθύνσεις που συνδέονται με τους άξονες *x* και *y*.

- Οποιαδήποτε επίδραση στη διεύθυνση του άξονα *y* δεν επηρεάζει την κίνηση στη διεύθυνση του άξονα *x*.

# Εξισώσεις της κινηματικής (2)

Το διάνυσμα θέσης για ένα σωματίδιο που κινείται στο επίπεδο *xy* είναι

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας μπορεί να βρεθεί από το διάνυσμα της θέσης.

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}$$

- Εφόσον η επιτάχυνση είναι σταθερή, μπορούμε επίσης να βρούμε μία σχέση για την ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t$$

# Εξισώσεις της κινηματικής (3)

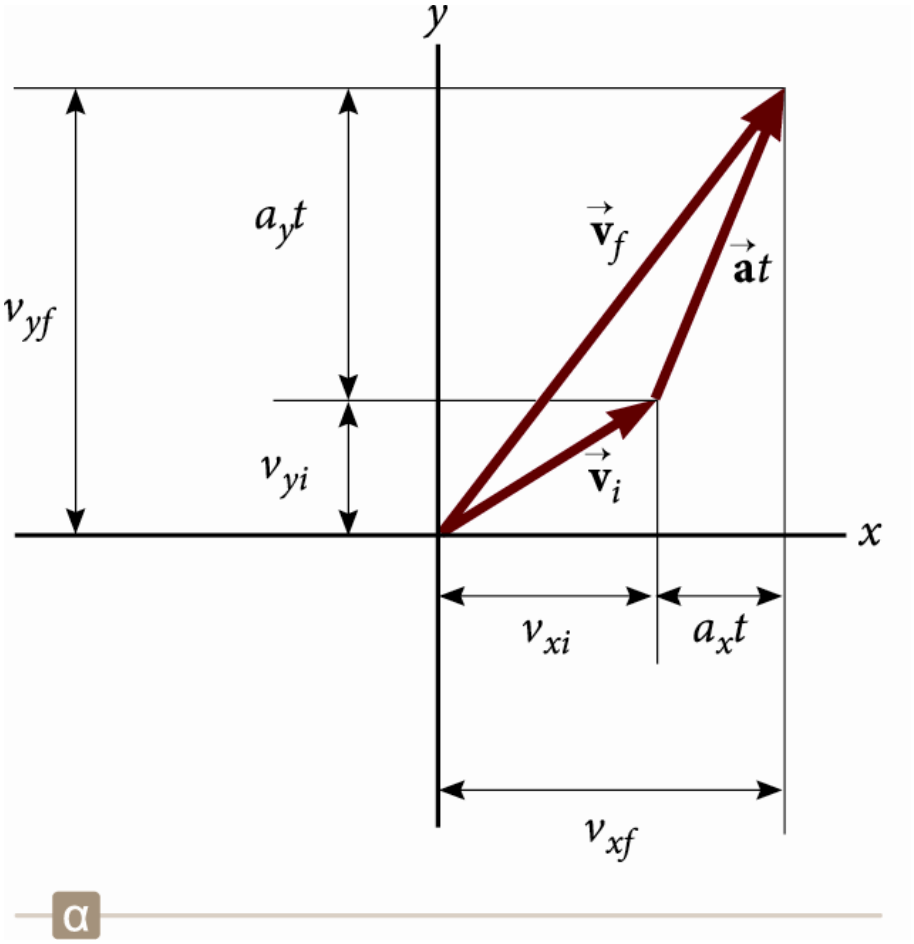
Το διάνυσμα θέσης μπορεί επίσης να εκφραστεί ως συνάρτηση του χρόνου:

- $\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}} t^2$
- Αυτό δείχνει ότι το διάνυσμα θέσης είναι το άθροισμα τριών άλλων διανυσμάτων:
  - της αρχικής θέσης
  - της μετατόπισης που προκαλείται από την αρχική ταχύτητα
  - της μετατόπισης που προκαλείται από την επιτάχυνση

# Εξισώσεις της κινηματικής – Γραφική αναπαράσταση της τελικής ταχύτητας

Το διάνυσμα της ταχύτητας μπορεί να αναπαρασταθεί με τις συνιστώσες του.

Η $\vec{\mathbf{v}}_f$ δεν έχει γενικά την κατεύθυνση των $\vec{\mathbf{v}}_i$ ή $\vec{\mathbf{a}}$.



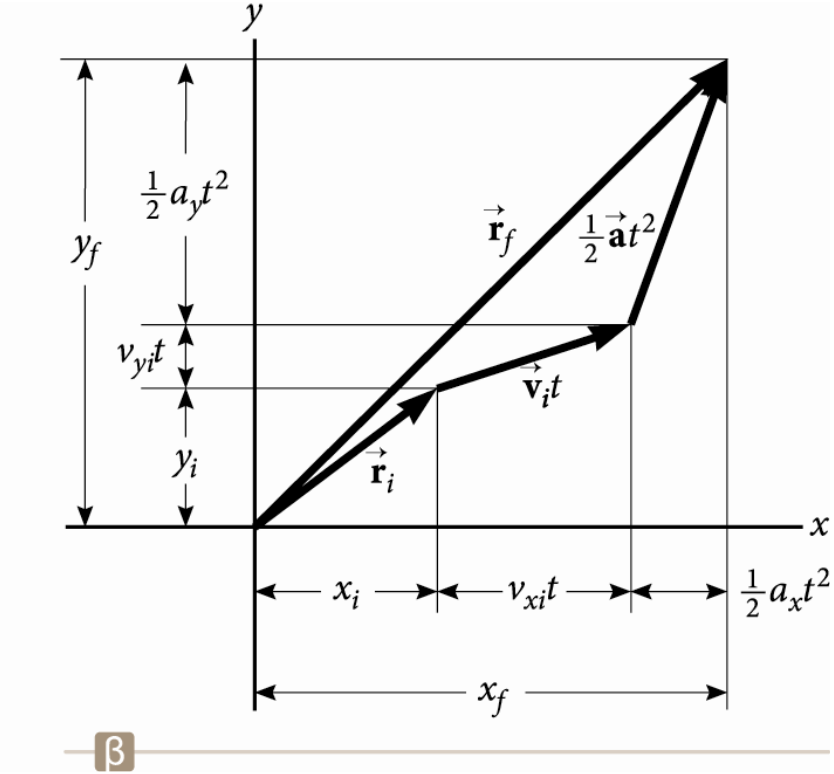



CENGAGE Learning

# Εξισώσεις της κινηματικής – Γραφική αναπαράσταση της τελικής θέσης

Η διανυσματική αναπαράσταση του διανύσματος θέσης $\vec{\mathbf{r}}_f$ δεν έχει γενικά την ίδια κατεύθυνση με τα $\vec{\mathbf{r}}_i$, $\vec{\mathbf{v}}_i$, ή $\vec{\mathbf{a}}$.

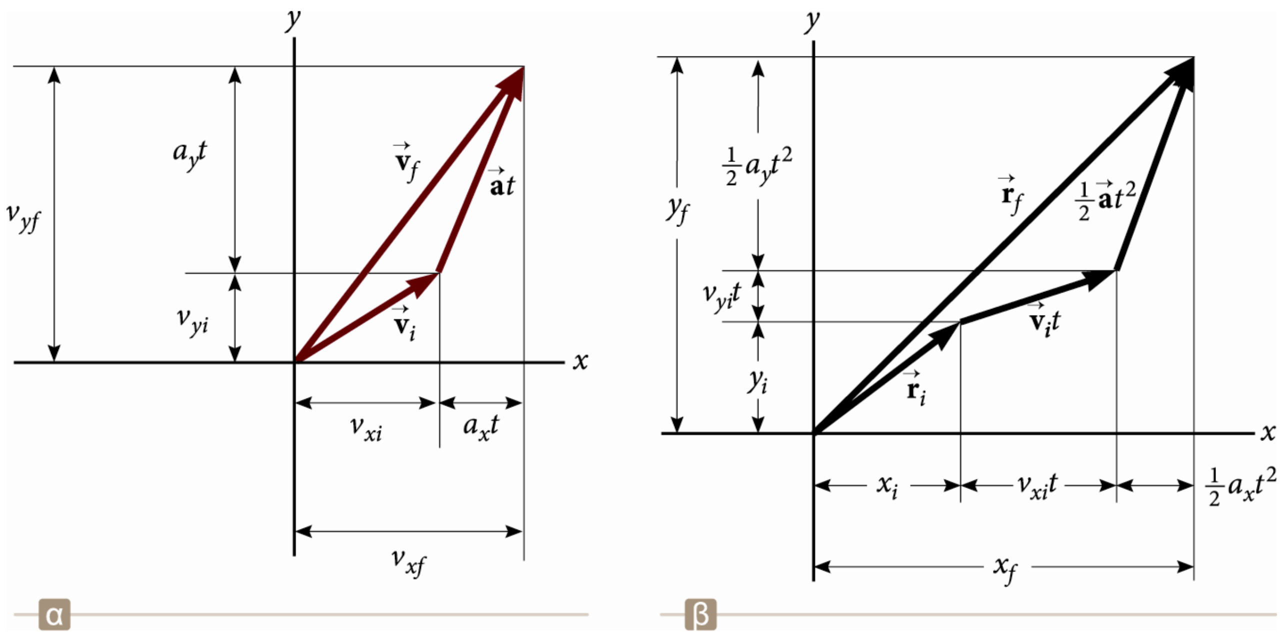
Τα $\vec{\mathbf{v}}_f$ και $\vec{\mathbf{r}}_f$ δεν έχουν γενικά την ίδια κατεύθυνση.



# Γραφική αναπαράσταση – Σύνοψη

Μπορούμε να επιλέξουμε διάφορες αρχικές θέσεις και αρχικές ταχύτητες.

Προσέξτε τις σχέσεις που συνδέουν τις μεταβολές της θέσης ή της ταχύτητας με την αντίστοιχη μεταβολή του άλλου μεγέθους.



# Κίνηση βλημάτων

Ένα σώμα μπορεί να κινείται ταυτόχρονα στις διευθύνσεις των αξόνων $x$ και $y$.

Το είδος της κίνησης σε δύο διαστάσεις, που θα περιγράψουμε στη συνέχεια, ονομάζεται **κίνηση βλημάτων.**

# Υποθέσεις στην κίνηση βλημάτων

Η επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης είναι σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης.

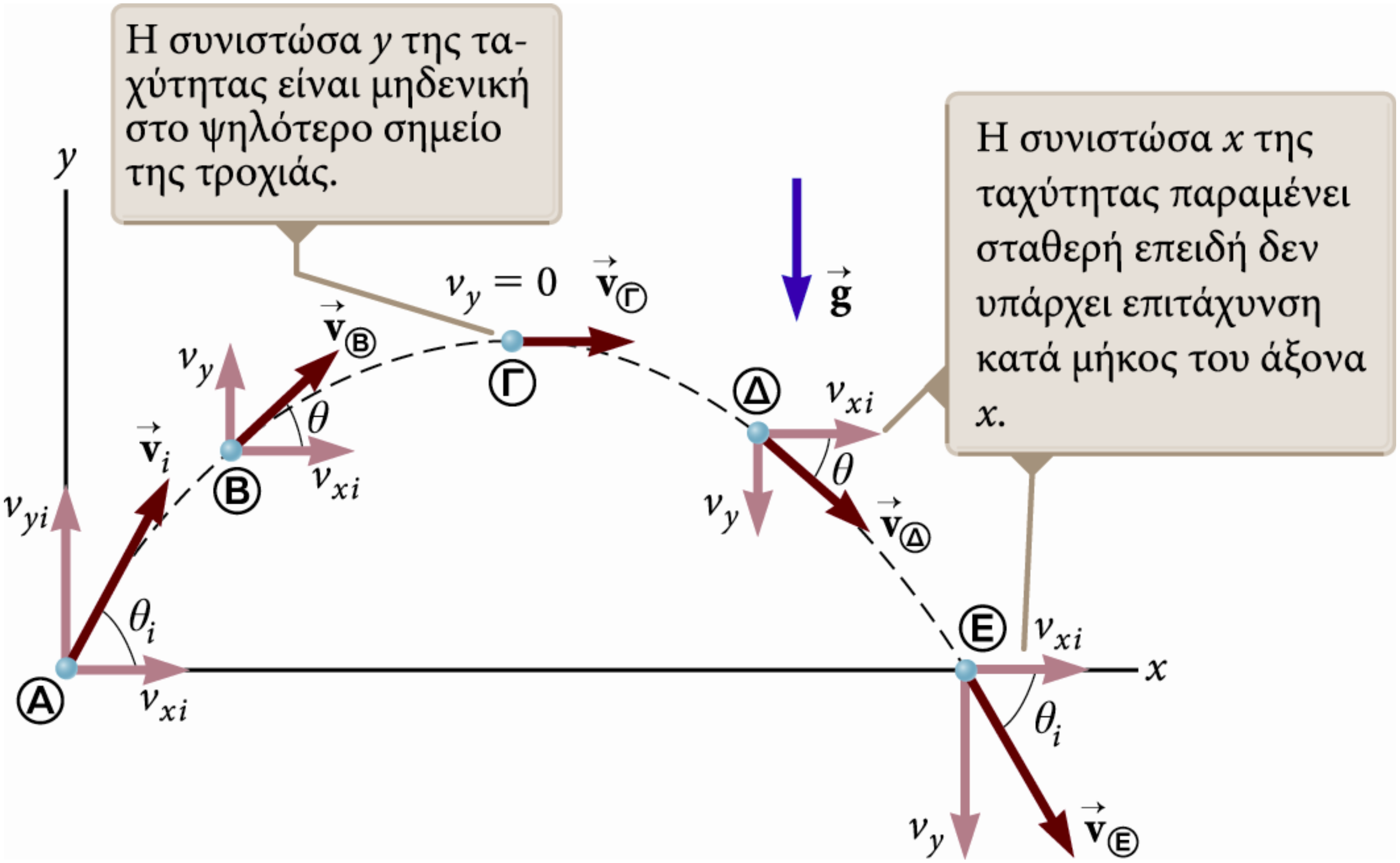
- Έχει κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα κάτω.
- Κάτι τέτοιο ισοδυναμεί με το να υποθέσουμε ότι η Γη είναι επίπεδη .
- Η υπόθεση είναι λογική υπό την προϋπόθεση ότι η έκταση της κίνησης είναι μικρή σε σύγκριση με την ακτίνα της Γης.

Η επίδραση της αντίστασης του αέρα είναι αμελητέα.

Με βάση αυτές τις υποθέσεις, η διαδρομή ενός βλήματος θα είναι παραβολή.

- Η διαδρομή ονομάζεται ***τροχ ά.***

# Διάγραμμα κίνησης ενός βλήματος



# Επιτάχυνση στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς

Η κατακόρυφη ταχύτητα είναι μηδενική στο ψηλότερο σημείο.

Η επιτάχυνση δεν είναι μηδενική σε κανένα σημείο της τροχιάς.

- Αν το βλήμα είχε μηδενική επιτάχυνση στο ψηλότερο σημείο, τότε η ταχύτητά του στο συγκεκριμένο σημείο δεν θα μεταβαλλόταν.
  - Το βλήμα θα συνέχιζε να κινείται οριζόντια με σταθερό μέτρο ταχύτητας.

# Ανάλυση της κίνησης βλημάτων

Μπορούμε να θεωρήσουμε την κίνηση ως την υπέρθεση των κινήσεων στις διευθύνσεις των αξόνων *x* και *y*.

Η πραγματική θέση σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{g}} t^2$$

Η αρχική ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των συνιστωσών της.

- $v_{xi} = v_i \cos\theta$ και $v_{yi} = v_i \sin\theta$

Η ταχύτητα είναι σταθερή στη διεύθυνση του άξονα *x*.

- $a_x = 0$

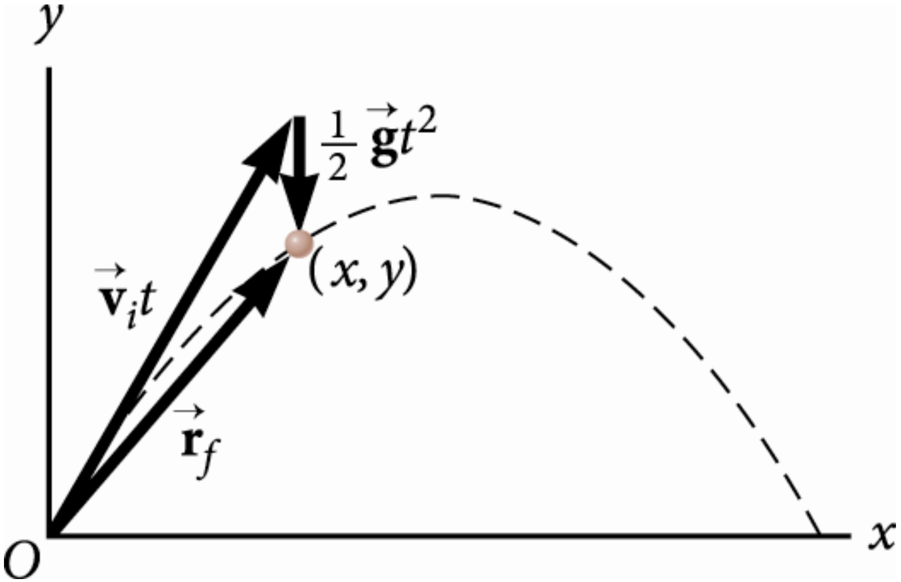
Η επιτάχυνση είναι σταθερή (ελεύθερη πτώση) στη διεύθυνση του άξονα *y*.

- $a_y = -g$

# Διανύσματα κίνησης βλημάτων

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{g}} t^2$$

Η τελική θέση είναι το διανυσματικό άθροισμα της αρχικής θέσης, της μετατόπισης που προκαλείται από την αρχική ταχύτητα, και της μετατόπισης που προκαλείται από την επιτάχυνση.

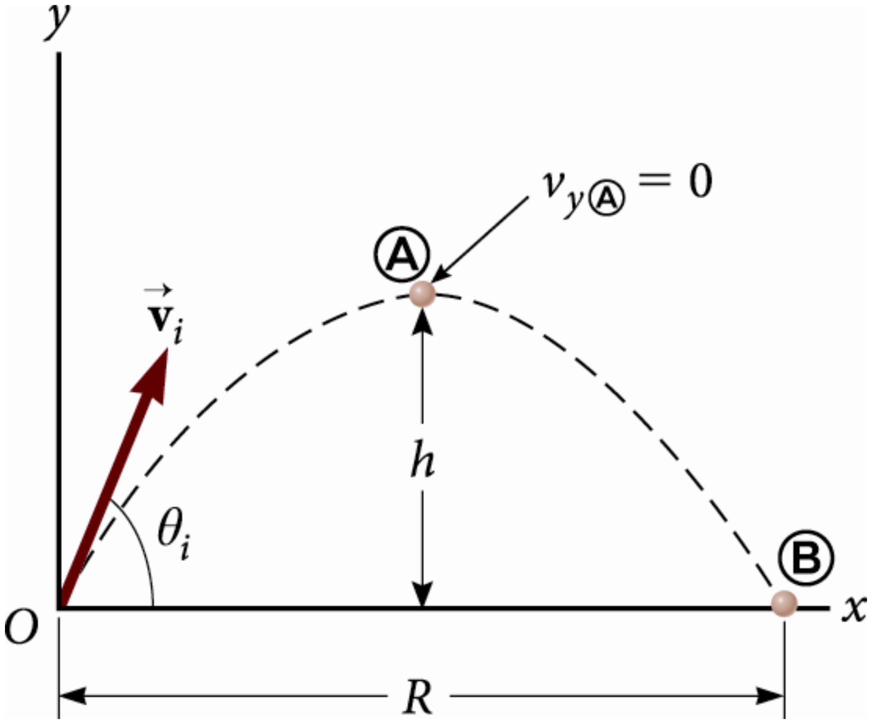


# Βεληνεκές και μέγιστο ύψος βλήματος

Όταν αναλύουμε την κίνηση βλημάτων, δύο χαρακτηριστικά παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον:

Το βεληνεκές *R* είναι η οριζόντια απόσταση του βλήματος.

Το βλήμα φτάνει σε μέγιστο ύψος *h*.



# Ύψος ενός βλήματος – Εξίσωση

Μπορούμε να βρούμε μια σχέση για το μέγιστο ύψος του βλήματος συναρτήσει του μέτρου και της κατεύθυνσης της αρχικής ταχύτητας:

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει μόνο για συμμετρικές τροχιές.

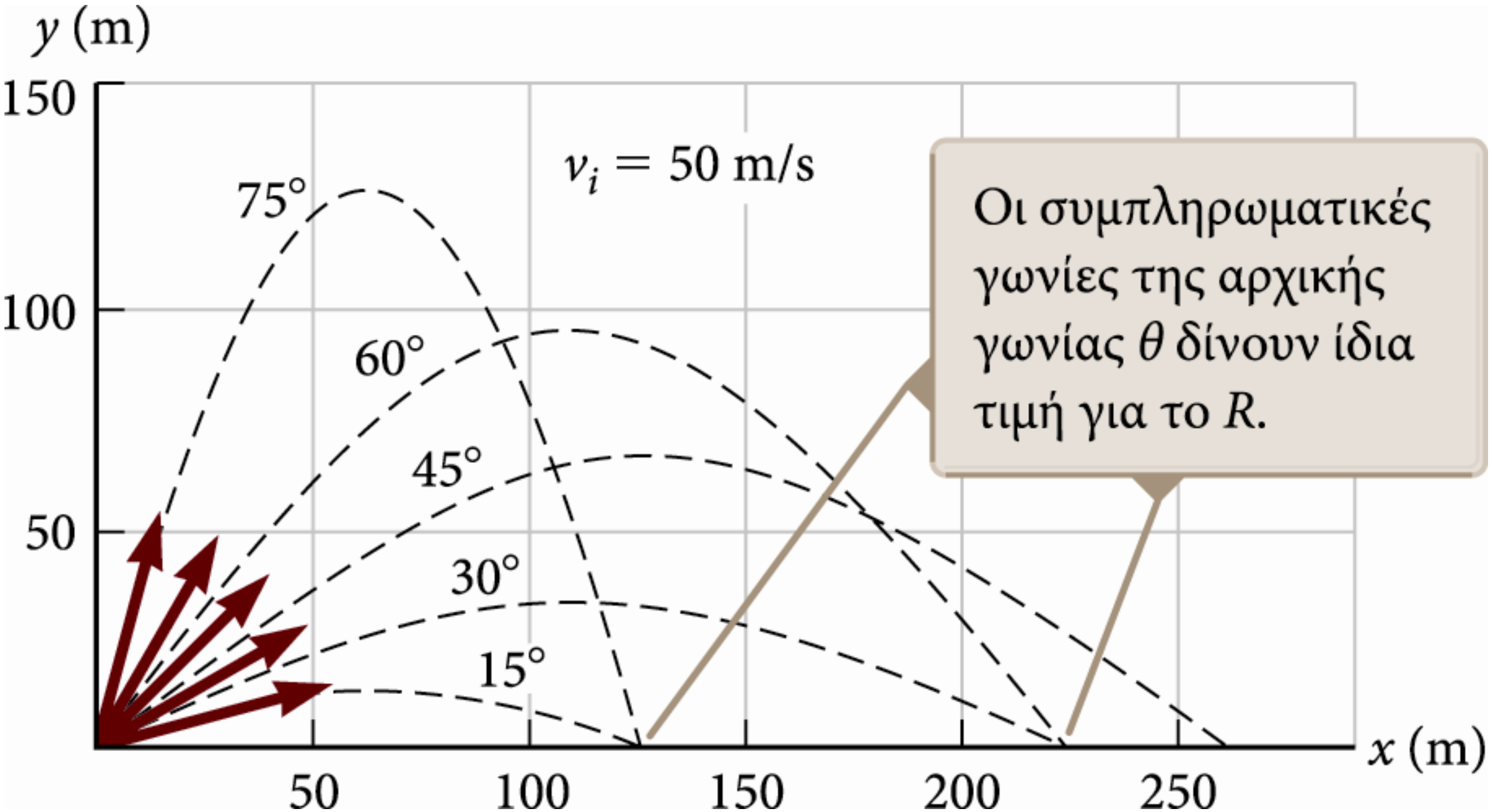
# Βεληνεκές ενός βλήματος – Εξίσωση

Μπορούμε να βρούμε μια σχέση για το βεληνεκές ενός βλήματος συναρτήσει του μέτρου και της κατεύθυνσης της αρχικής ταχύτητας:

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει μόνο για συμμετρικές τροχιές.

# Βεληνεκές ενός βλήματος (*συνέχεια*)






CENGAGE Learning

# Βεληνεκές ενός βλήματος (*τελική διαφάνεια*)

Το μέγιστο βεληνεκές προκύπτει για $\theta_i = 45^o$ .

Το βεληνεκές θα είναι ίδιο για συμπληρωματικές γωνίες.

- Το μέγιστο ύψος θα είναι διαφορετικό για τις δύο γωνίες.
- Οι χρόνοι πτήσης θα είναι διαφορετικοί για τις δύο γωνίες.

# Κίνηση βλημάτων – Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων

*Μοντελοποίηση*

- Φανταστείτε το βλήμα να κινείται κατά μήκος της τροχιάς του.

*Κατηγοριοποίηση*

- Βεβαιωθείτε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.
- Επιλέξτε ένα σύστημα συντεταγμένων με το $x$ στην οριζόντια διεύθυνση και το $y$ στην κατακόρυφη.

*Ανάλυση*

- Αν δίνεται το διάνυσμα της αρχικής ταχύτητας, αναλύστε το στις συνιστώσες $x$ και $y$.
- Θεωρήστε ότι η οριζόντια και η κατακόρυφη κίνηση είναι ανεξάρτητες.

## Κίνηση βλημάτων – Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων (*συνέχεια*)

*Ανάλυση* (*συνέχεια*)

- Αναλύστε την οριζόντια κίνηση του βλήματος χρησιμοποιώντας το μοντέλο του σωματιδίου που κινείται με σταθερή ταχύτητα.
- Αναλύστε την κατακόρυφη κίνηση του βλήματος χρησιμοποιώντας το μοντέλο του σωματιδίου που κινείται με σταθερή επιτάχυνση.
- Θυμηθείτε ότι οι δύο κινήσεις συμβαίνουν στο ίδιο χρονικό διάστημα.

*Ολοκλήρωση*

- Ελέγξτε τις απαντήσεις για να δείτε αν συμφωνούν με τη νοητική και την εικονογραφική αναπαράσταση.
- Ελέγξτε τα αποτελέσματά σας για να δείτε αν είναι ρεαλιστικά.

# Μη συμμετρική κίνηση βλημάτων

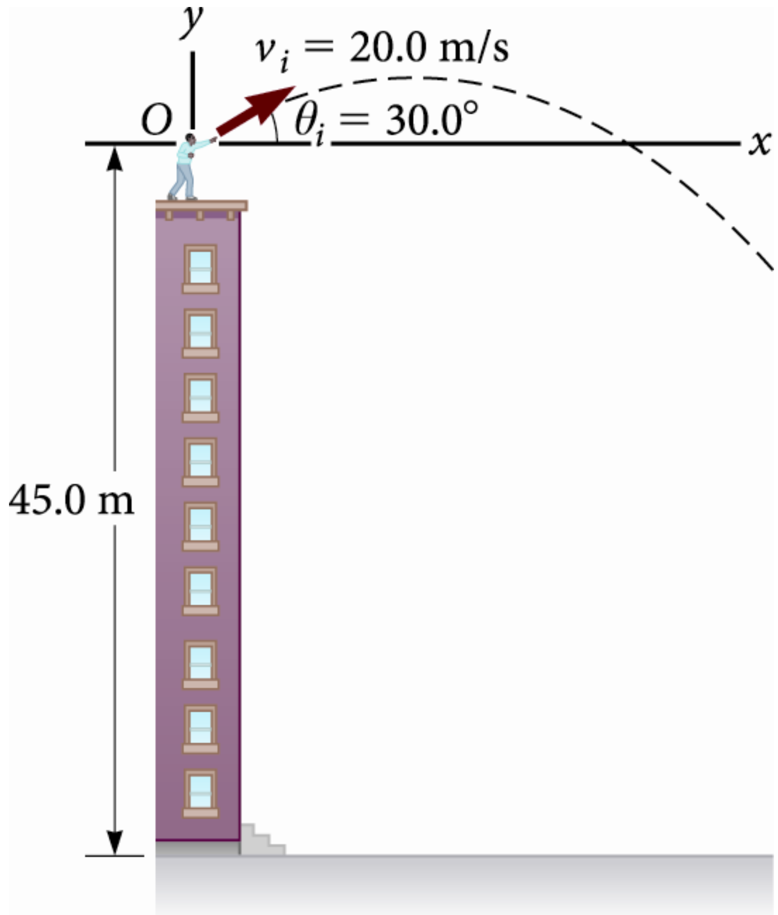
Ακολουθήστε τους γενικούς κανόνες για την κίνηση βλημάτων.

Χωρίστε την κίνηση στη διεύθυνση του άξονα *y* σε τμήματα:

- στην κίνηση προς τα πάνω και προς τα κάτω *ή*
- στη συμμετρική κίνηση μέχρι το βλήμα να επιστρέψει στο αρχικό ύψος και μετά στην κίνηση για το υπόλοιπο ύψος

Εφαρμόστε τη μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων για να προσδιορίσετε και να λύσετε τις απαραίτητες εξισώσεις.

Η κίνηση μπορεί να είναι μη συμμετρική και από άλλες απόψεις.



# Ομαλή κυκλική κίνηση

Ένα σώμα το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου, εκτελεί ***ομαλή κυκλ κή κ νηση***.

Το σχετικό **μοντέλο ανάλυσης** είναι το *σωματίδιο σε ομαλή κυκλική κίνηση.*

Υπάρχει επιτάχυνση εφόσον μεταβάλλεται η *κατεύθυνση* της κίνησης.

- Αυτή η μεταβολή της ταχύτητας σχετίζεται με την επιτάχυνση.

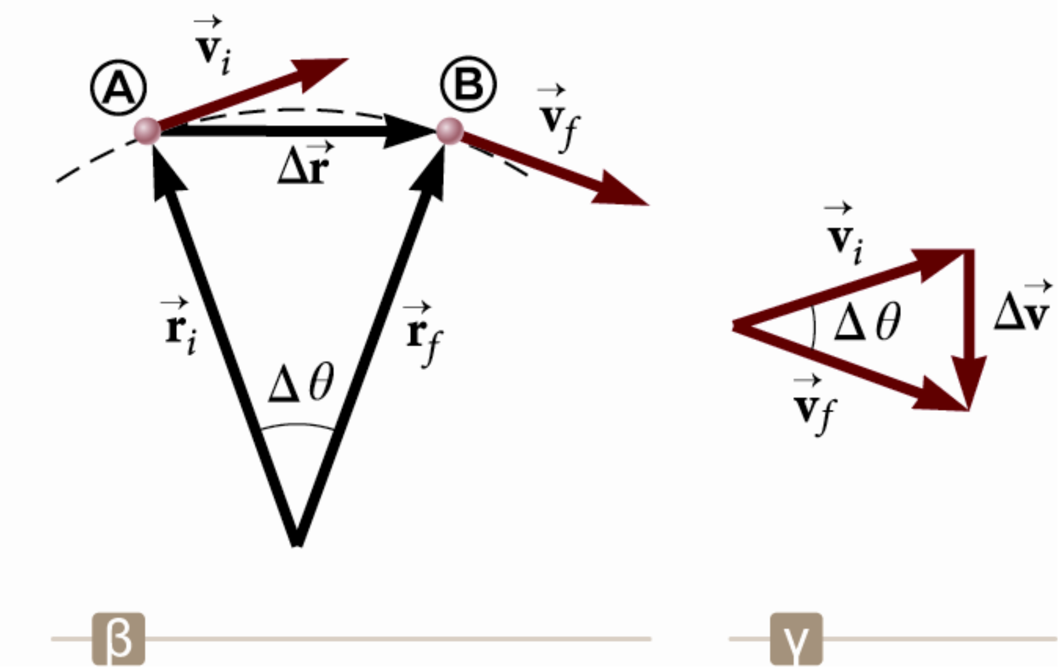
Το διάνυσμα της ταχύτητας σταθερού μέτρου εφάπτεται πάντα στην τροχιά του σώματος.

# Μεταβολή της ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση

Η μεταβολή της ταχύτητας οφείλεται στη μεταβολή της κατεύθυνσης.

Το διάνυσμα της μεταβολής της ταχύτητας έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου.

Στο διανυσματικό διάγραμμα φαίνεται ότι $\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \Delta\vec{\mathbf{v}}$



# Κεντρομόλος επιτάχυνση

Η επιτάχυνση είναι πάντα κάθετη στην ακτίνα της τροχιάς.

Η επιτάχυνση έχει πάντα κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου της κίνησης.

Η επιτάχυνση αυτού του είδους ονομάζεται ***κεντρομόλος επ τάχυνση.***

# Κεντρομόλος επιτάχυνση (*συνέχεια*)

Το μέτρο του διανύσματος της κεντρομόλου επιτάχυνσης δίνεται από τη σχέση

$$a_C = \frac{v^2}{r}$$

Η κατεύθυνση του διανύσματος της κεντρομόλου επιτάχυνσης μεταβάλλεται συνεχώς για να έχει πάντα κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου της κίνησης.

# Περίοδος

Η ***περ οδος*** *T* είναι το χρονικό διάστημα που απαιτείται για μία πλήρη περιστροφή.

Το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου είναι ίσο με το πηλίκο της περιφέρειας της κυκλικής τροχιάς προς την περίοδο.

Άρα, η περίοδος ορίζεται ως

$$T \equiv \frac{2\pi r}{v}$$

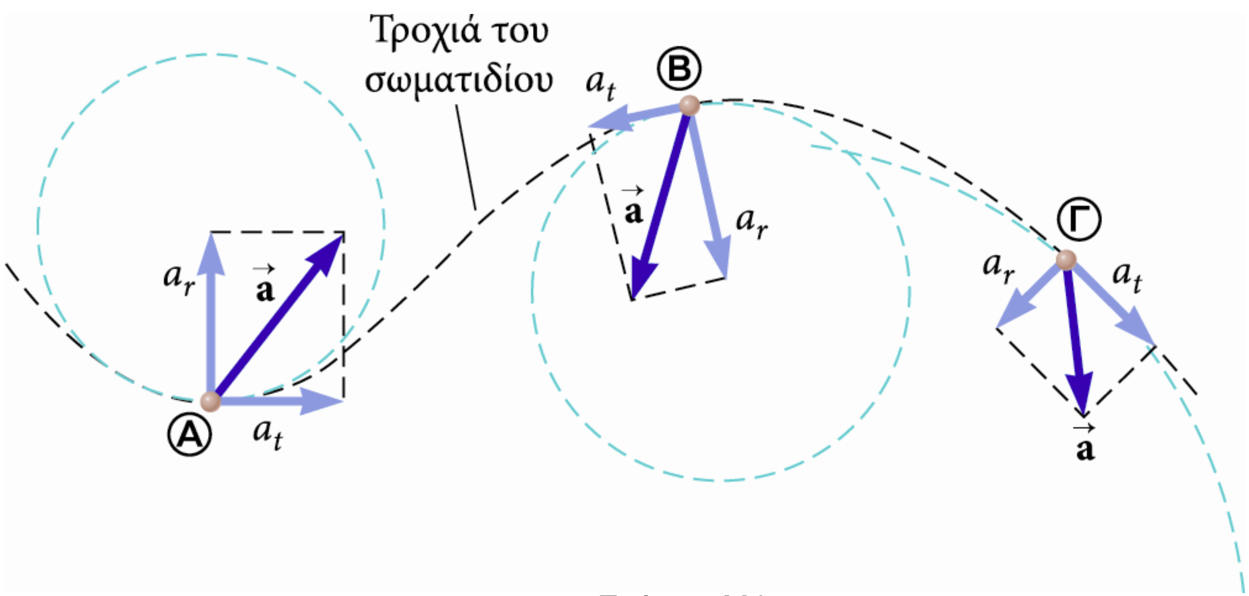
# Εφαπτομενική επιτάχυνση

Θα μπορούσε να μεταβάλλεται και το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας.

Σε αυτή την περίπτωση, θα υπήρχε ***εφαπτομεν κή επ τάχυνση.***

Η κίνηση θα επηρεαζόταν τόσο από την εφαπτομενική όσο και από την κεντρομόλο επιτάχυνση.

- Προσέξτε τη μεταβολή των διανυσμάτων της επιτάχυνσης



# Συνολική επιτάχυνση

Η εφαπτομενική επιτάχυνση μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου.

Η ακτινική επιτάχυνση προκύπτει από τη μεταβολή της κατεύθυνσης του διανύσματος της ταχύτητας.

# Συνολική επιτάχυνση – Εξισώσεις

Εφαπτομενική επιτάχυνση:

$$a_t = \left|\frac{dv}{dt}\right|$$

Ακτινική επιτάχυνση:

$$a_r = -a_C = -\frac{v^2}{r}$$

Συνολική επιτάχυνση:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

# Σχετική ταχύτητα

Δύο παρατηρητές οι οποίοι κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλον διαφωνούν γενικά ως προς το αποτέλεσμα ενός πειράματος.

Ωστόσο, οι παρατηρήσεις τους σχετίζονται μεταξύ τους.

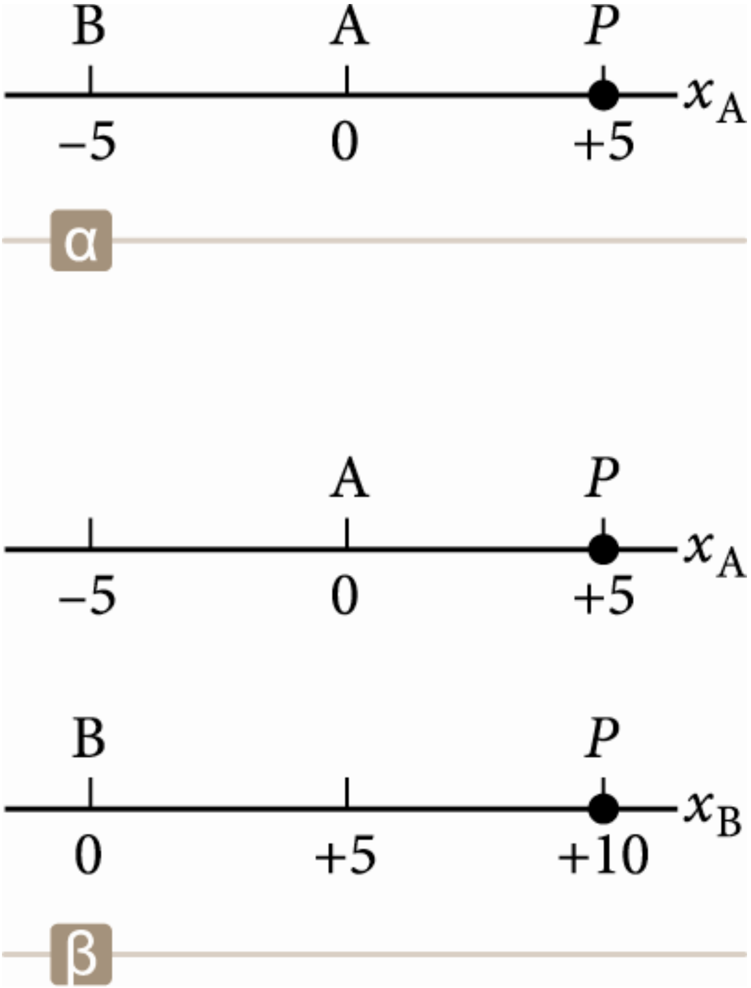
Ένα σύστημα αναφοράς μπορεί να περιγραφεί από ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο ο παρατηρητής είναι ακίνητος σε σχέση με την αρχή των συντεταγμένων.

# Διαφορετικές μετρήσεις – Παράδειγμα

Ο παρατηρητής A μετράει ότι το σημείο *P* βρίσκεται στη θέση +5 m από την αρχή.

Ο παρατηρητής B μετράει ότι το σημείο *P* βρίσκεται στη θέση +10 m από την αρχή.

Η διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι οι μετρήσεις έχουν γίνει σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς.



# Διαφορετικές μετρήσεις – Ένα άλλο παράδειγμα

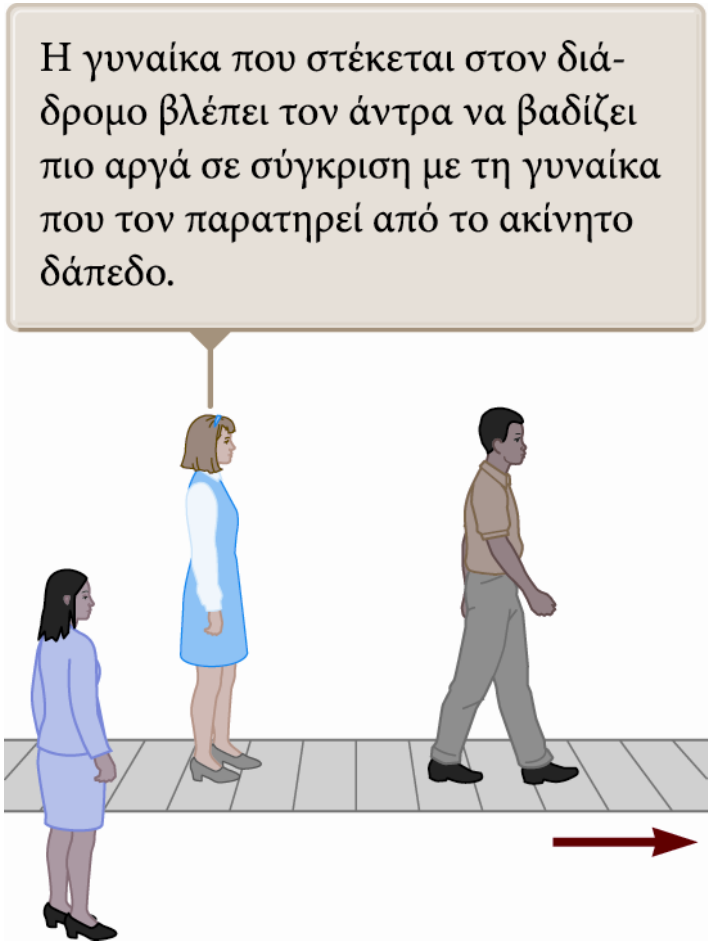
Ο άνδρας περπατάει πάνω στον κυλιόμενο διάδρομο.

Η γυναίκα που στέκεται στον κυλιόμενο διάδρομο βλέπει τον άνδρα να βαδίζει με κανονική ταχύτητα βαδίσματος.

Η ακίνητη γυναίκα βλέπει τον άνδρα να βαδίζει γρηγορότερα.

- Η ταχύτητα του διαδρόμου προστίθεται στην ταχύτητα βαδίσματός του.

Η διαφορά οφείλεται στη σχετική ταχύτητα των συστημάτων αναφοράς τους.



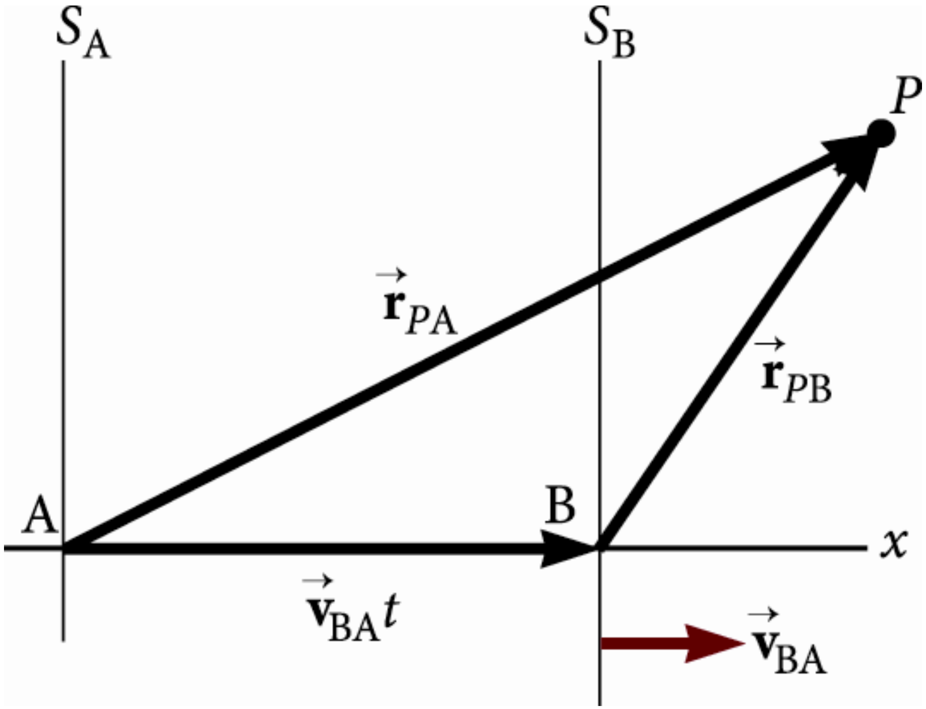
# Σχετική ταχύτητα – Γενική περίπτωση

Το σύστημα αναφοράς $S_A$ είναι ακίνητο.

Το σύστημα αναφοράς $S_B$ κινείται προς τα δεξιά σε σχέση με το $S_A$ με ταχύτητα $\mathbf{v}_{AB}$.

- Αυτό σημαίνει επίσης ότι το $S_A$ κινείται με ταχύτητα $-\mathbf{v}_{BA}$ σε σχέση με το $S_B$.

Ορίζουμε το $t = 0$ ως τη χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο συστήματα αναφοράς έχουν την ίδια αρχή.



## Συμβολισμός

Ο πρώτος δείκτης υποδηλώνει αυτό που παρατηρείται.

Ο δεύτερος δείκτης υποδηλώνει τον παρατηρητή.

Παράδειγμα

- Η ταχύτητα του παρατηρητή Β (και του αντίστοιχου συστήματος αναφοράς $S_B$) όπως τη μετράει ο παρατηρητής Α

$$\vec{\mathbf{v}}_{BA}$$

# Σχετική ταχύτητα – Εξισώσεις

Οι θέσεις που μετράνε οι παρατηρητές από τα δύο συστήματα αναφοράς σχετίζονται μέσω της ταχύτητας

$$\vec{\mathbf{r}}_{PA} = \vec{\mathbf{r}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA} t$$

Παραγωγίζουμε την εξίσωση της θέσης για να πάρουμε την εξίσωση της ταχύτητας

$$\vec{\mathbf{u}}_{PA} = \vec{\mathbf{u}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA}$$

$\vec{\mathbf{u}}_{PA}$: η ταχύτητα του σωματιδίου στο *P* όπως τη μετράει ο παρατηρητής A

$\vec{\mathbf{u}}_{PB}$: η ταχύτητα του σωματιδίου στο *P* όπως τη μετράει ο παρατηρητής B

Οι εξισώσεις είναι γνωστές ως **εξισώσεις μετασχηματισμού του Γαλιλαίου.**

# Επιτάχυνση σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς

Παραγωγίζουμε την εξίσωση της ταχύτητας για να πάρουμε την εξίσωση της επιτάχυνσης.

Η επιτάχυνση του σωματιδίου που μετράει ένας παρατηρητής σε ένα σύστημα αναφοράς είναι ίδια με εκείνη που μετράει κάποιος άλλος παρατηρητής ο οποίος κινείται με *σταθερή ταχύτητα* ως προς το πρώτο σύστημα αναφοράς.

# Επιτάχυνση (*συνέχεια*)

Ο υπολογισμός της επιτάχυνσης δίνει

$$\frac{d\vec{\mathbf{u}}_{\text{PA}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{u}}_{\text{PB}}}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{BA}}}{dt}$$

Εφόσον

$\vec{\mathbf{v}}_{\text{BA}}$ είναι σταθερή, $d\vec{\mathbf{v}}_{\text{BA}}/dt = 0$

Άρα,

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{PA}} = \vec{\mathbf{a}}_{\text{PB}}$$