Κεφάλαιο Μ3

Διανύσματα

Διανύσματα

Διανυσματικά μεγέθη

- Φυσικά μεγέθη που έχουν τόσο αριθμητικές ιδιότητες όσο και ιδιότητες κατεύθυνσης.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με τις μαθηματικές πράξεις των διανυσμάτων.

- Πρόσθεση
- Αφαίρεση

Συστήματα συντεταγμένων

Χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της θέσης ενός σημείου στον χώρο.

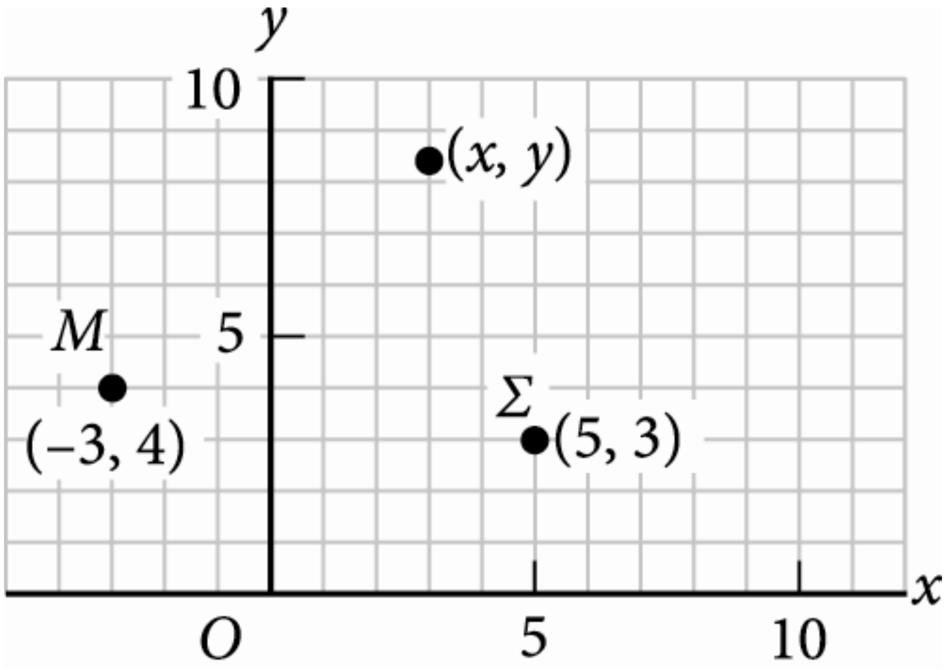
Κοινά συστήματα συντεταγμένων:

- Καρτεσιανό
- Πολικό

Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Οι άξονες *x* και *y* τέμνονται στην αρχή των συντεταγμένων.

Τα σημεία αναπαρίστανται με το ζεύγος (*x*, *y*).



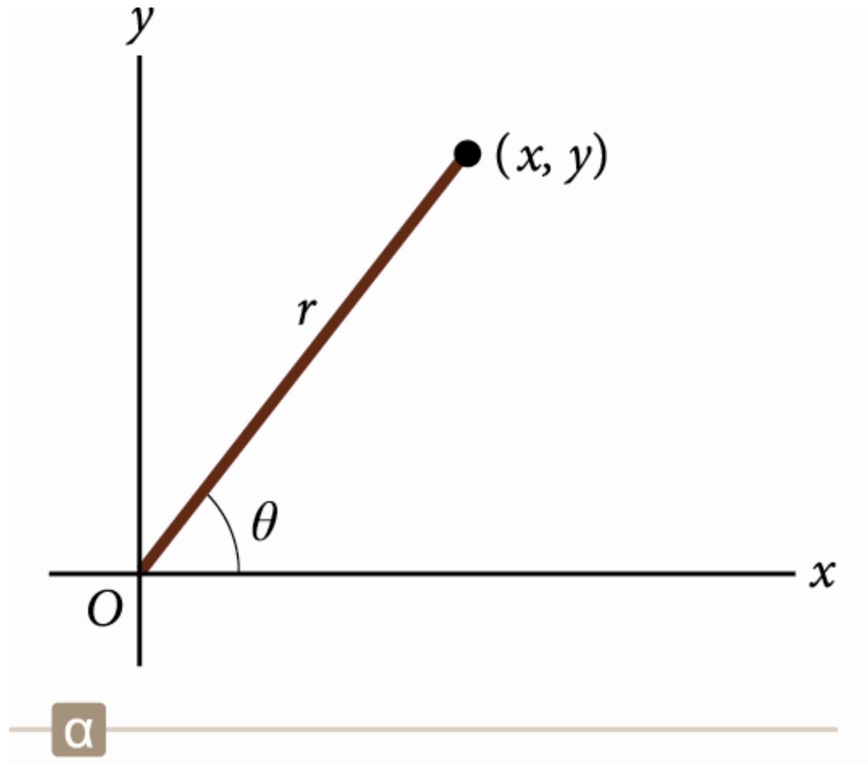
Πολικό σύστημα συντεταγμένων

Ορίζουμε την αρχή των αξόνων και έναν άξονα αναφοράς.

Το σημείο βρίσκεται σε απόσταση *r* από την αρχή των αξόνων στην κατεύθυνση της γωνίας θ, η οποία μετριέται αριστερόστροφα από τον άξονα αναφοράς.

- Ο άξονας αναφοράς είναι συχνά ο άξονας *x.*

Τα σημεία αναπαρίστανται με το ζεύγος (r, θ).



Μετατροπή πολικών συντεταγμένων σε καρτεσιανές

Με βάση το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται από τις r και θ

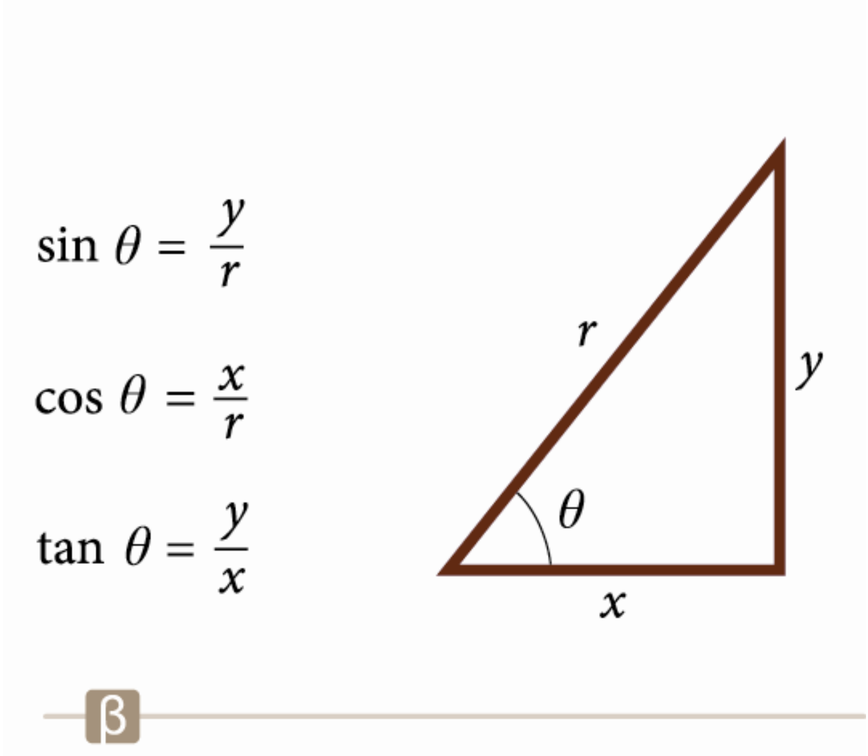
$x = r \cos \theta$

$y = r \sin \theta$

Αν οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι γνωστές:

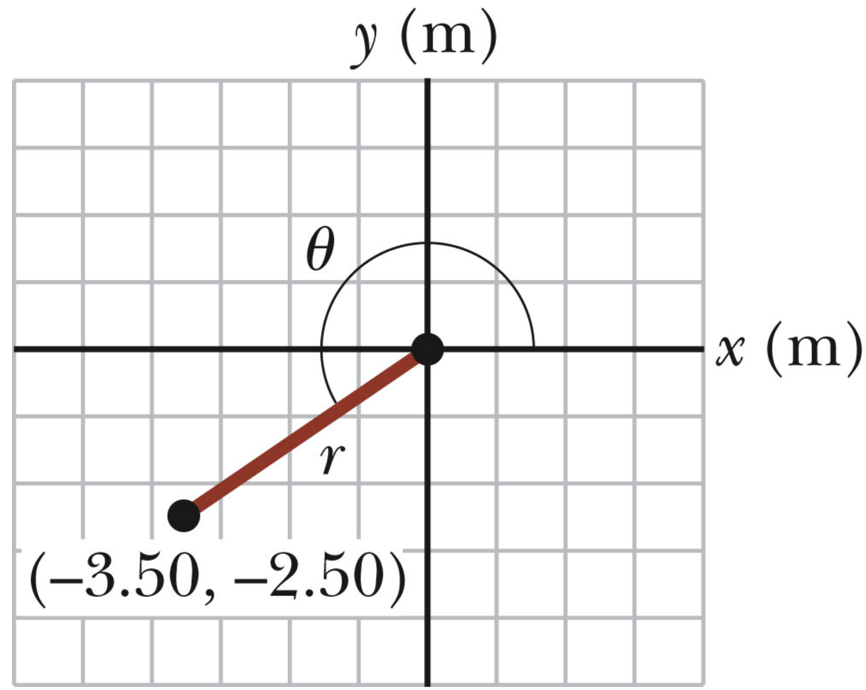
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Παράδειγμα Μ3.1

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο *xy* είναι (x,y) = (3.50, –2.50) m, όπως φαίνεται στην εικόνα. Βρείτε τις πολικές συντεταγμένες του σημείου.



Λύση: Από την Εξίσωση Μ3.4,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(-3.50\text{ m})^2 + (-2.50\text{ m})^2}$$

$$= 4.30\text{ m}$$

και από την Εξίσωση Μ3.3,

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50\text{ m}}{-3.50\text{ m}} = 0.714$$

$\theta = 216°$ (τα πρόσημα προσδιορίζουν το τεταρτημόριο)

Διανυσματικά και βαθμωτά μεγέθη

Ένα ***βαθμωτό μέγεθος*** ορίζεται πλήρως από μία τιμή ακολουθούμενη από την κατάλληλη μονάδα και δεν έχει κατεύθυνση.

- Πολλά βαθμωτά μεγέθη είναι πάντα θετικά (ή μηδέν).
- Άλλα έχουν είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές.
- Οι πράξεις με βαθμωτά μεγέθη γίνονται σύμφωνα με τους κανόνες της απλής αριθμητικής.

Ένα ***δ ανυσματ κό μέγεθος*** ορίζεται πλήρως από έναν αριθμό ακολουθούμενο από την κατάλληλη μονάδα και μία κατεύθυνση.

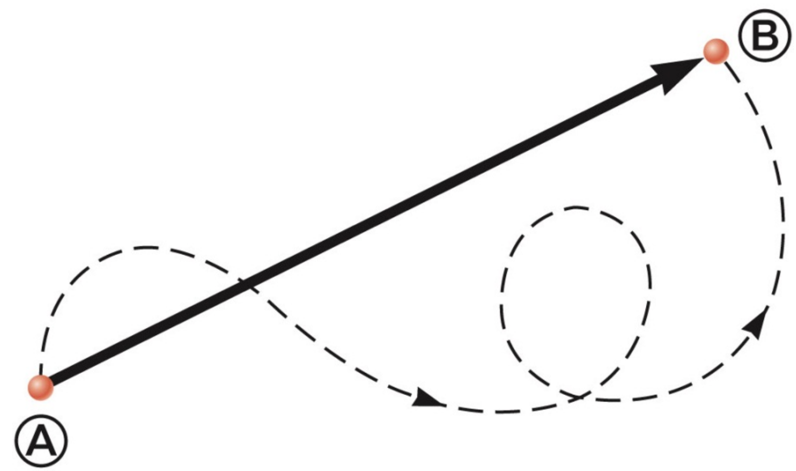
Παράδειγμα διανυσματικού μεγέθους

Ένα σωματίδιο κινείται από το σημείο A στο σημείο B ακολουθώντας τη διαδρομή που υποδεικνύει η διακεκομμένη γραμμή.

- Αυτή είναι η ***απόσταση*** που διένυσε - βαθμωτό μέγεθος.

Η ***μετατόπ ση*** είναι η συμπαγής ευθεία που ενώνει το A με το B.

- Η μετατόπιση είναι ανεξάρτητη από τη διαδρομή που ακολουθεί το σωματίδιο μεταξύ των δύο σημείων.
- Η μετατόπιση είναι διανυσματικό μέγεθος.



CENGAGE Learning™

Συμβολισμός διανυσμάτων

Στο βιβλίο αυτό, συμβολίζουμε κάθε διάνυσμα με ένα έντονο γράμμα μαζί με ένα βέλος πάνω από αυτό: **A**

Επίσης, χρησιμοποιούμε και τον απλό έντονο χαρακτήρα: **A**

Όσον αφορά το μέτρο ενός διανύσματος, θα χρησιμοποιούμε ένα πλάγιο γράμμα: *A* ή |**A**|

- Το μέτρο του διανύσματος έχει φυσικές μονάδες.
- Το μέτρο ενός διανύσματος είναι πάντα θετικός αριθμός.

Όταν γράφετε με το χέρι, να χρησιμοποιείτε το βέλος: $\vec{A}$

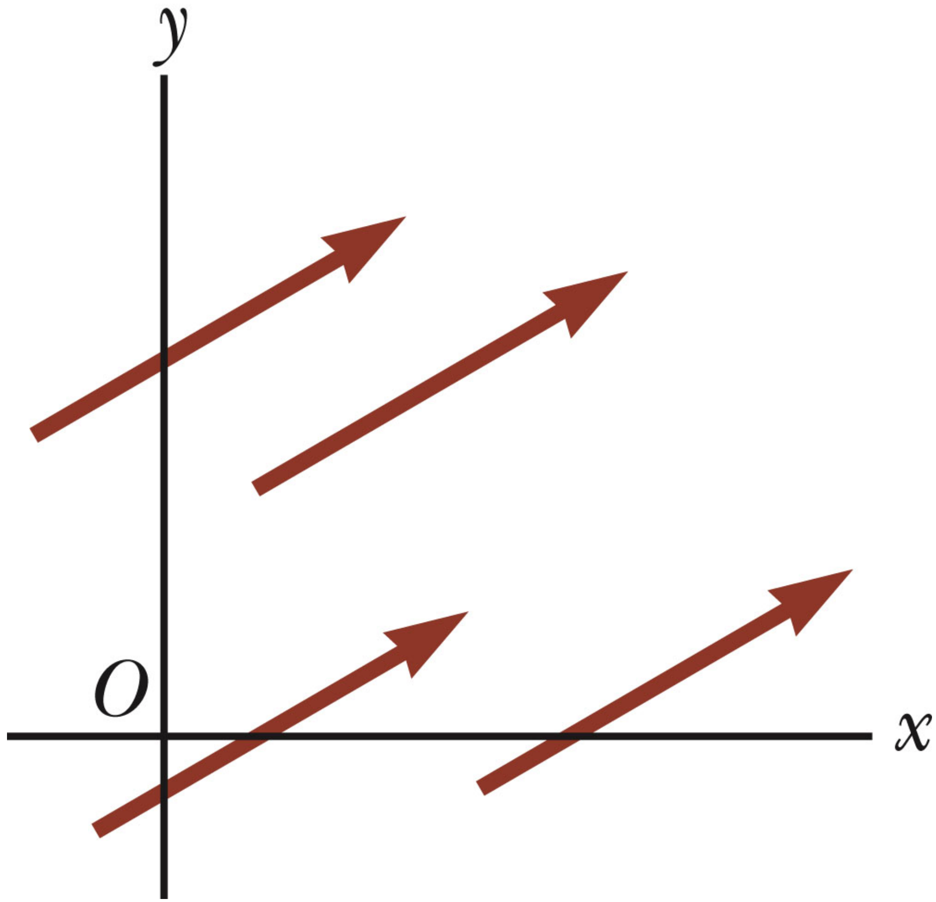
Ισότητα δύο διανυσμάτων

Δύο διανύσματα είναι ***σα*** αν έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση.

$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$ αν $A = B$ και αν τα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση και φορά, δηλαδή ίδια κατεύθυνση.

Όλα τα διανύσματα της εικόνας είναι ίσα.

Αυτό μάς επιτρέπει να μεταθέσουμε παράλληλα ένα διάνυσμα σε μια νέα θέση.



Πρόσθεση διανυσμάτων

Η πρόσθεση διανυσμάτων είναι πολύ διαφορετική από την πρόσθεση βαθμωτών μεγεθών.

Όταν προσθέτουμε διανύσματα, πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη την κατεύθυνσή τους.

Οι μονάδες τους πρέπει να είναι ίδιες.

Γραφικές μέθοδοι

- Σχεδιάζουμε τα διανύσματα υπό κλίμακα.

Αλγεβρικές μέθοδοι

- Είναι πιο βολικές.

Πρόσθεση διανυσμάτων με τη γραφική μέθοδο

Επιλέγουμε μια κλίμακα.

Σχεδιάζουμε το πρώτο διάνυσμα, $\vec{\mathbf{A}}$, με το κατάλληλο μήκος και την κατεύθυνση που ορίζεται, ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων.

Σχεδιάζουμε το επόμενο διάνυσμα με το κατάλληλο μήκος και την κατεύθυνση που ορίζεται, ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων το οποίο έχει αρχή την αρχή του διανύσματος $\vec{\mathbf{A}}$ και είναι παράλληλο προς το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται για το $\vec{\mathbf{A}}$.

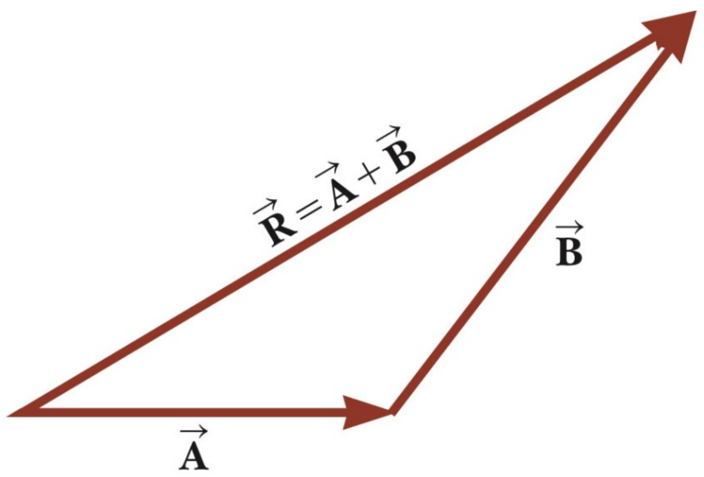
Πρόσθεση διανυσμάτων με τη γραφική μέθοδο (*συνέχεια*)

Συνεχίζουμε να σχεδιάζουμε διανύσματα τοποθετώντας την ουρά κάθε επόμενου διανύσματος στην αιχμή του τελευταίου.

Η συνισταμένη είναι το διάνυσμα που αρχίζει από την ουρά του πρώτου διανύσματος και τελειώνει στην αιχμή του τελευταίου.

Μετράμε το μήκος της συνισταμένης και τη γωνία της.

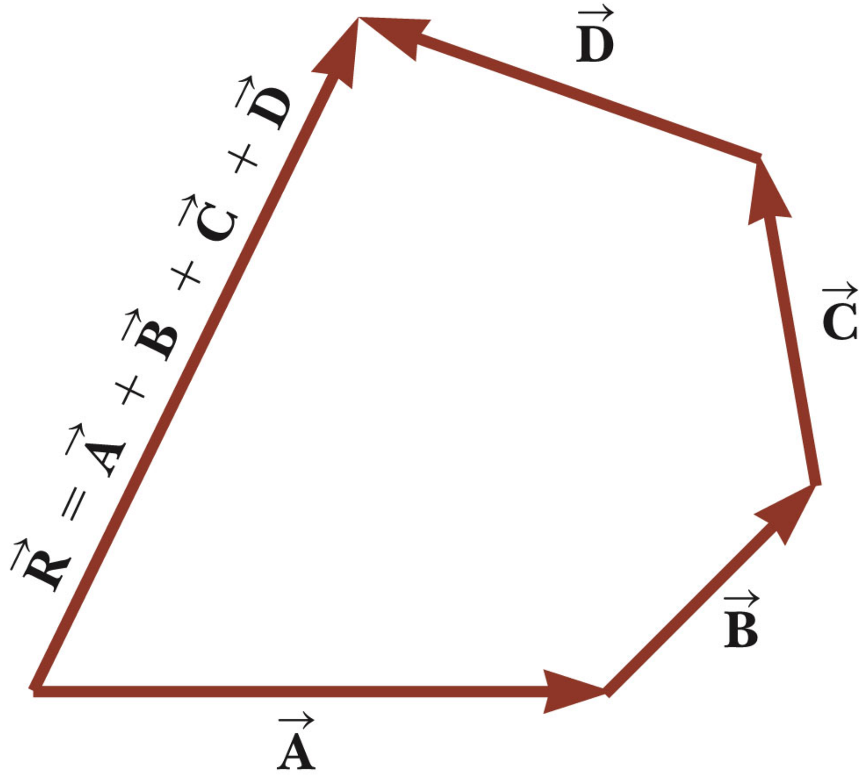
- Χρησιμοποιούμε τον συντελεστή κλίμακας για να μετατρέψουμε το μήκος στο πραγματικό μέτρο του διανύσματος.



Πρόσθεση διανυσμάτων με τη γραφική μέθοδο (*τελική διαφάνεια*)

Όταν έχετε πολλά διανύσματα, επαναλάβετε τη διαδικασία μέχρι να τα συμπεριλάβετε όλα.

Η συνισταμένη εξακολουθεί να είναι το διάνυσμα που αρχίζει από την ουρά του πρώτου διανύσματος και τελειώνει στην αιχμή του τελευταίου.

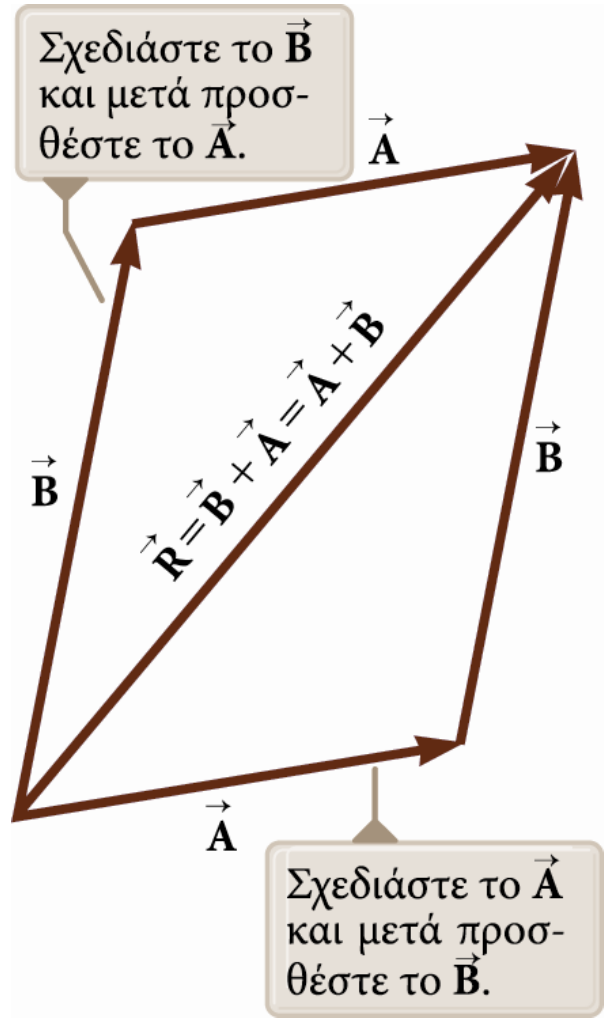


Κανόνες πρόσθεσης διανυσμάτων

Στην πρόσθεση δύο διανυσμάτων, το άθροισμα είναι ανεξάρτητο από τη σειρά της άθροισης.

- Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως ***αντ μεταθετ κή δ ότητα της πρόσθεσης.***

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

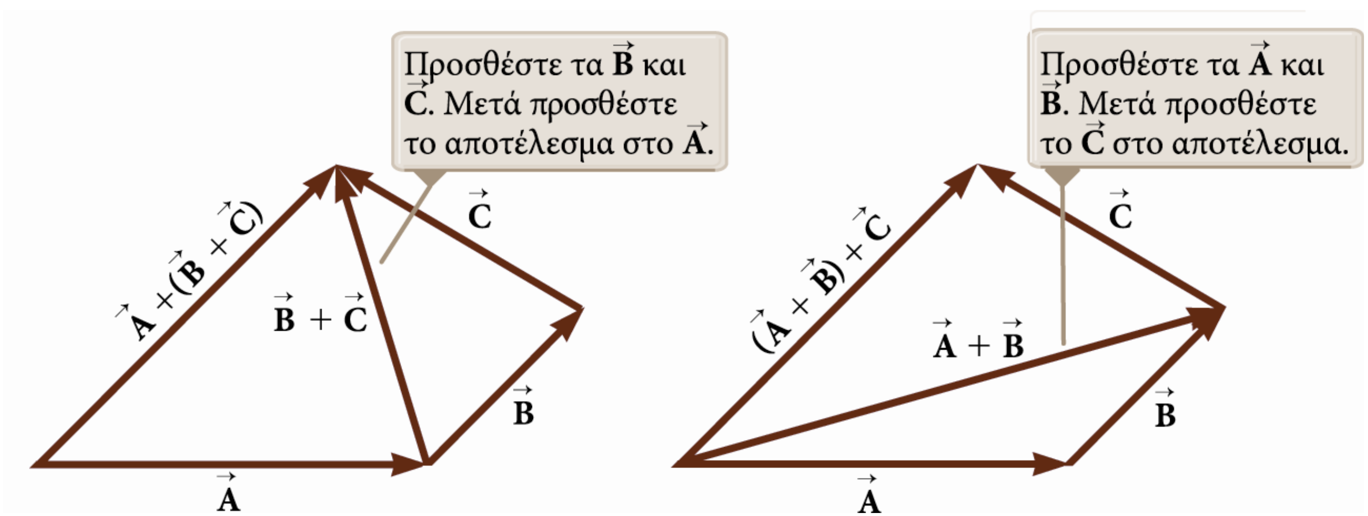


Κανόνες πρόσθεσης διανυσμάτων (*συνέχεια*)

Στην πρόσθεση τριών ή περισσοτέρων διανυσμάτων, το άθροισμα είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο ομαδοποίησης των επιμέρους διανυσμάτων.

- Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ***προσετα ρ στ κή δ ότητα της πρόσθεσης***.

$$\vec{\mathbf{A}} + \left(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}\right) = \left(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}\right) + \vec{\mathbf{C}}$$



Κανόνες πρόσθεσης διανυσμάτων (*τελική διαφάνεια*)

Στην πρόσθεση διανυσμάτων, όλα τα διανύσματα πρέπει να έχουν τις ίδιες μονάδες.

Όλα τα διανύσματα πρέπει να περιγράφουν το ίδιο μέγεθος.

- Για παράδειγμα, δεν μπορείτε να προσθέσετε ένα διάνυσμα μετατόπισης με ένα διάνυσμα ταχύτητας.

Αντίθετο ενός διανύσματος

Ως αντίθετο ενός διανύσματος ορίζουμε το διάνυσμα το οποίο, όταν προστεθεί στο αρχικό, δίνει μηδενικό διανυσματικό άθροισμα.

- Συμβολίζεται με $-\vec{\mathbf{A}}$
- $\vec{\mathbf{A}} + \left(-\vec{\mathbf{A}}\right) = 0$

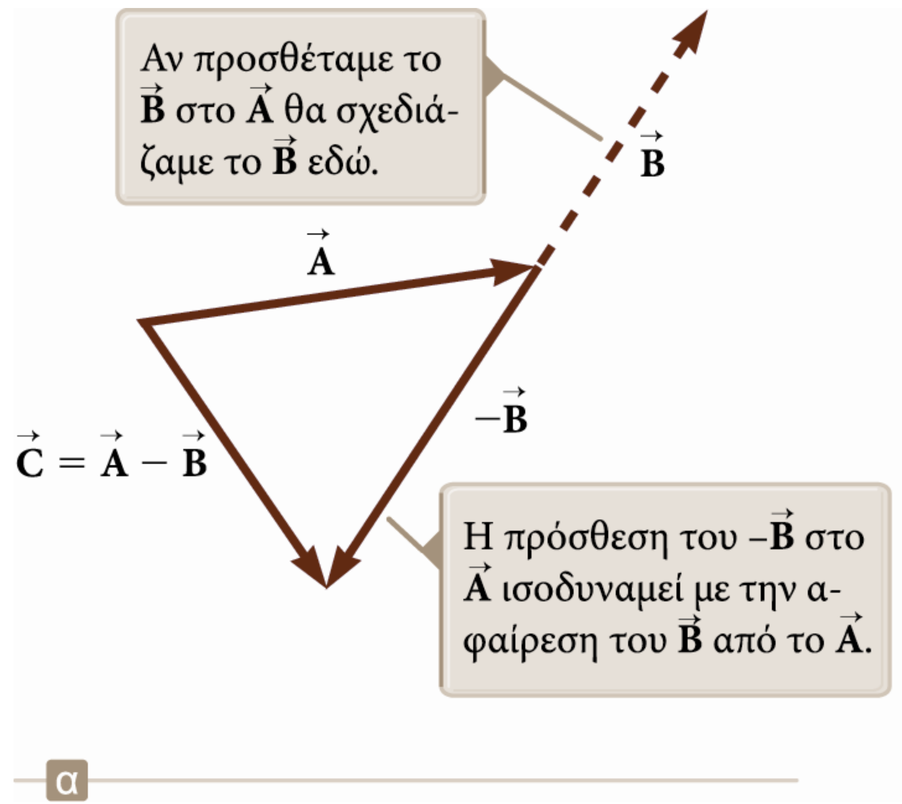
Το αρχικό διάνυσμα και το αντίθετό του θα έχουν ίδιο μέτρο αλλά αντίθετες κατευθύνσεις.

Αφαίρεση διανυσμάτων

Ειδική περίπτωση της πρόσθεσης διανυσμάτων:

Αν $\vec{A} - \vec{B}$, τότε χρησιμοποιούμε το $\vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$

Συνεχίζουμε προσθέτοντας τα διανύσματα.

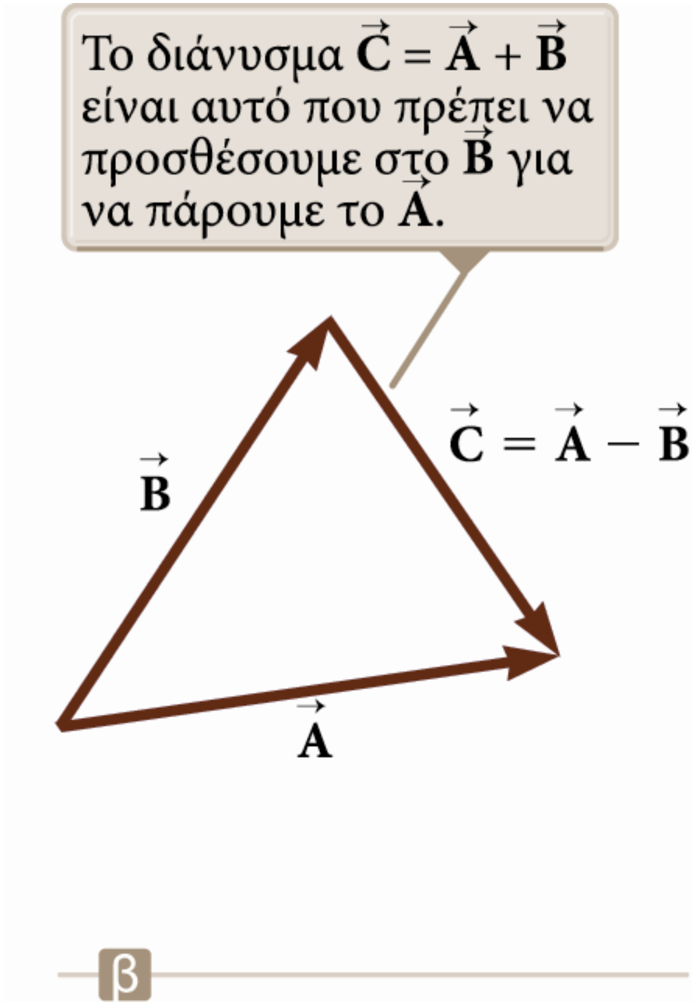


Αφαίρεση διανυσμάτων, μέθοδος 2

Ένας άλλος τρόπος θεώρησης της αφαίρεσης είναι να βρούμε το διάνυσμα που πρέπει να προσθέσουμε στο δεύτερο διάνυσμα για να πάρουμε το πρώτο

$$\vec{A} + \left(-\vec{B}\right) = \vec{C}$$

- Όπως μπορείτε να δείτε, η συνισταμένη έχει κατεύθυνση από την αιχμή του δεύτερου διανύσματος προς την αιχμή του πρώτου.



Πολλαπλασιασμός ή διαίρεση διανύσματος με βαθμωτή ποσότητα

Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης ενός διανύσματος με μια βαθμωτή ποσότητα είναι διάνυσμα.

Το μέτρο του διανύσματος πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται με τη βαθμωτή ποσότητα.

Αν η βαθμωτή ποσότητα είναι θετική, το διάνυσμα που προκύπτει έχει την ίδια κατεύθυνση με το αρχικό διάνυσμα.

Αν η βαθμωτή ποσότητα είναι αρνητική, το διάνυσμα που προκύπτει έχει αντίθετη κατεύθυνση από το αρχικό διάνυσμα.

Μέθοδος πρόσθεσης διανυσμάτων με χρήση συνιστωσών

Η γραφική μέθοδος πρόσθεσης διανυσμάτων δεν ενδείκνυται όταν:

- Θέλουμε μεγάλη ακρίβεια.
- Λύνουμε προβλήματα σε τρεις διαστάσεις.

Μία εναλλακτική μέθοδος είναι η μέθοδος πρόσθεσης με χρήση συνιστωσών.

- Χρησιμοποιεί τις προβολές των διανυσμάτων πάνω σε άξονες συντεταγμένων.

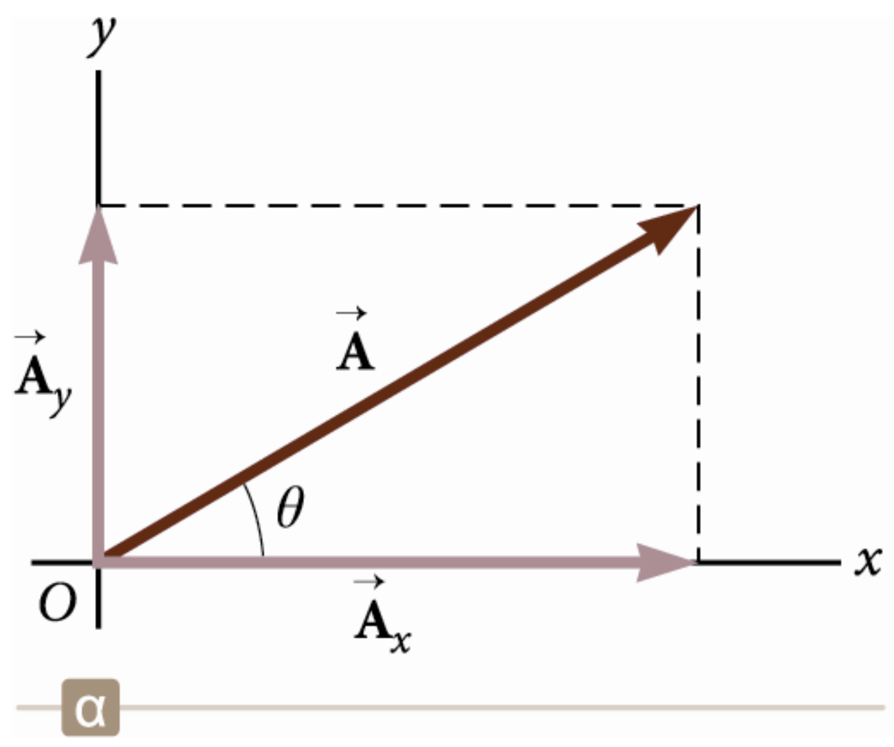
Συνιστώσες διανύσματος – Εισαγωγή

Συνιστώσα είναι η προβολή ενός διανύσματος πάνω σε έναν άξονα.

- Κάθε διάνυσμα μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τις συνιστώσες του.

Είναι καλύτερο να χρησιμοποιούμε τις **καρτεσιανές συνιστώσες.**

- Αυτές είναι οι προβολές του διανύσματος στους άξονες *x* και *y*.



Συνιστώσες διανύσματος – Ορολογία

Τα $\vec{\mathbf{A}}_x$ και $\vec{\mathbf{A}}_y$ είναι οι ***δ ανυσματ κές συν στώσες*** του $\vec{\mathbf{A}}$.

- Είναι διανύσματα, οπότε ακολουθούν όλους τους κανόνες των διανυσμάτων.

Τα A_x και A_y είναι βαθμωτά μεγέθη. Θα αναφερόμαστε σε αυτά ως τις ***συν στώσες*** του $\vec{\mathbf{A}}$.

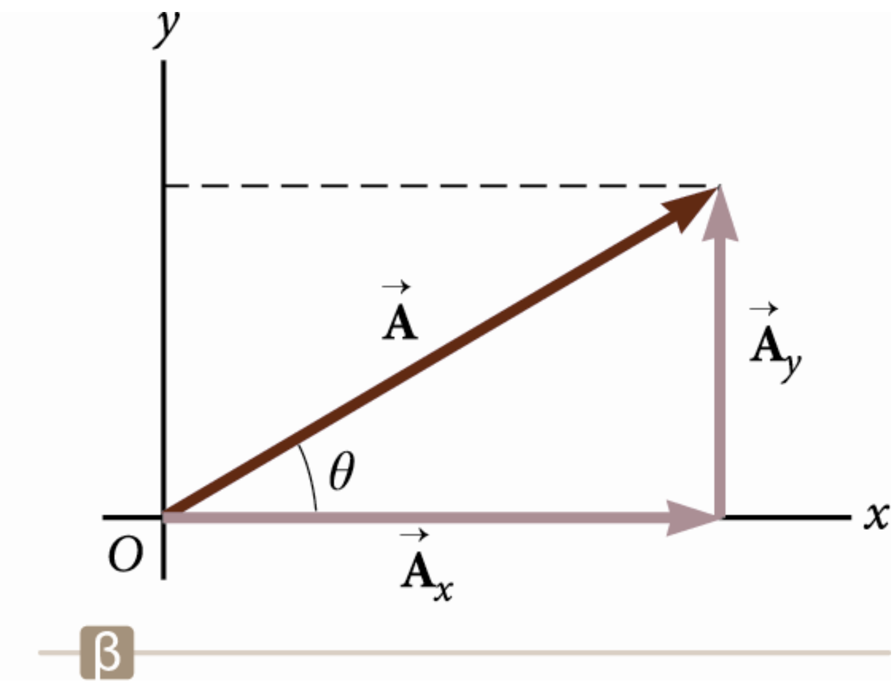
Συνιστώσες διανύσματος

Έστω ότι δίνεται το διάνυσμα $\vec{\mathbf{A}}$.

Αυτό μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\mathbf{A}}_x$ και $\vec{\mathbf{A}}_y$

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_x + \vec{\mathbf{A}}_y$$

Τα τρία διανύσματα σχηματίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

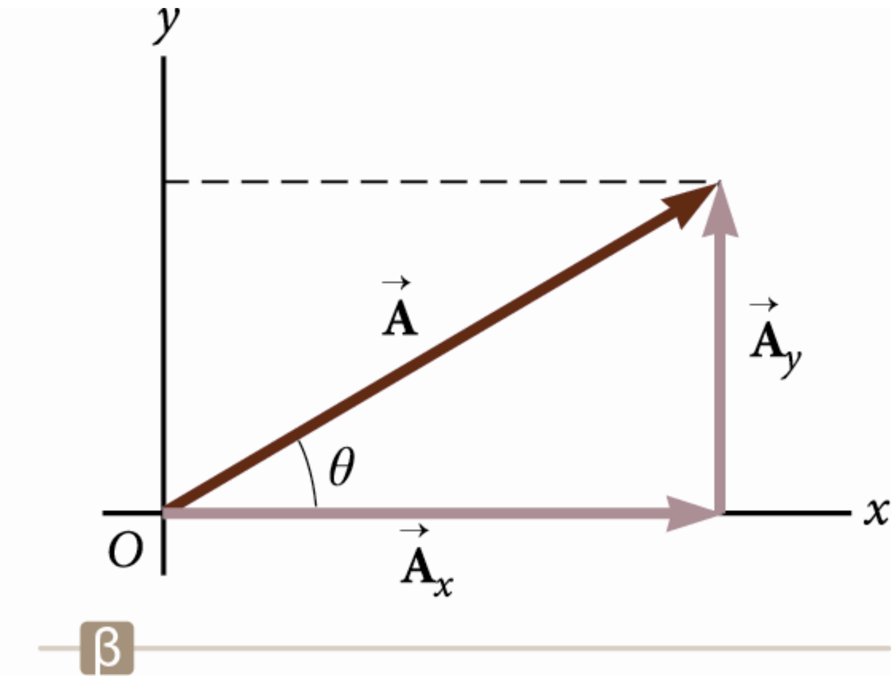


Συνιστώσες διανύσματος (2)

Η συνιστώσα *y* μετατίθεται στην αιχμή της συνιστώσας *x*.

Αυτό είναι εφικτό επειδή μπορούμε να μεταθέσουμε παράλληλα οποιοδήποτε διάνυσμα σε μια νέα θέση χωρίς να το επηρεάσουμε.

- Έτσι σχηματίζεται το τρίγωνο.



Συνιστώσες διανύσματος (3)

Η συνιστώσα *x* ενός διανύσματος είναι η προβολή του πάνω στον άξονα *x*.

$$A_x = A\cos\theta$$

Η συνιστώσα y ενός διανύσματος είναι η προβολή του πάνω στον άξονα *y*.

$$A_y = A\sin\theta$$

Έχουμε υποθέσει ότι η γωνία θ μετριέται ως προς τον άξονα *x*.

- Αν αυτό δεν ισχύει, οι εξισώσεις δεν θα είναι σωστές. Χρησιμοποιήστε τις πλευρές του τριγώνου για να βρείτε τις σωστές σχέσεις.

Συνιστώσες διανύσματος (4)

Οι συνιστώσες είναι οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα μήκους *A*.

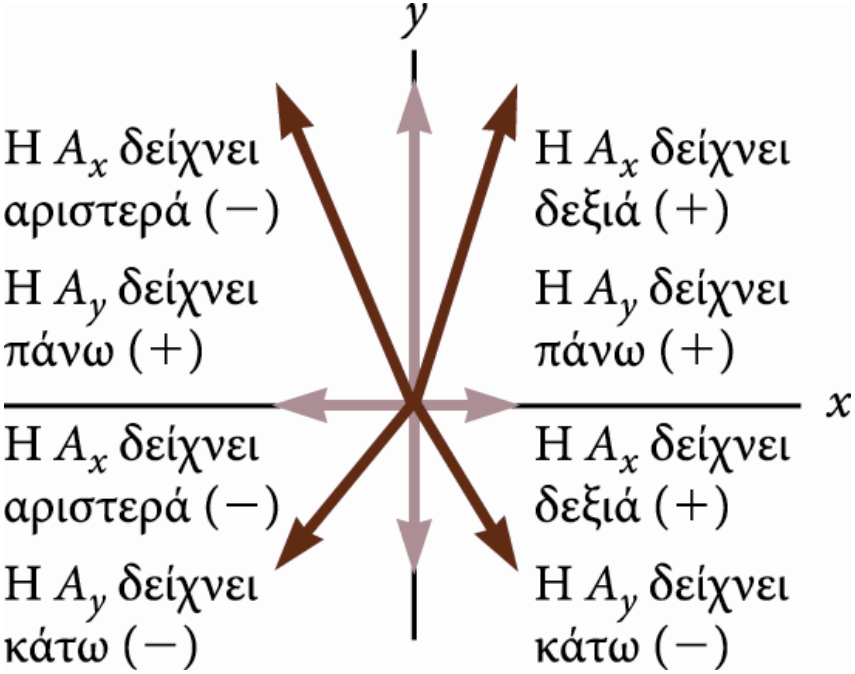
- $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ και $\theta = \tan^{-1} \dfrac{A_y}{A_x}$
- Και πάλι, πρέπει να υπολογίσουμε τη θ ως προς τον θετικό άξονα x.

Στα προβλήματα, μπορούμε να ορίσουμε ένα διάνυσμα είτε με τις συνιστώσες του είτε με το μέτρο και την κατεύθυνσή του.

Συνιστώσες διανύσματος (*τελική διαφάνεια*)

Οι συνιστώσες μπορούν να είναι θετικές ή αρνητικές και έχουν τις ίδιες μονάδες με το αρχικό διάνυσμα.

Τα πρόσημα των συνιστωσών εξαρτώνται από τη γωνία.



Μοναδιαία διανύσματα

Ένα ***μοναδ α ο δ άνυσμα*** δεν έχει διαστάσεις και το μέτρο του είναι ίσο με 1.

Τα μοναδιαία διανύσματα ορίζουν μία συγκεκριμένη κατεύθυνση και δεν έχουν κάποια άλλη φυσική σημασία.

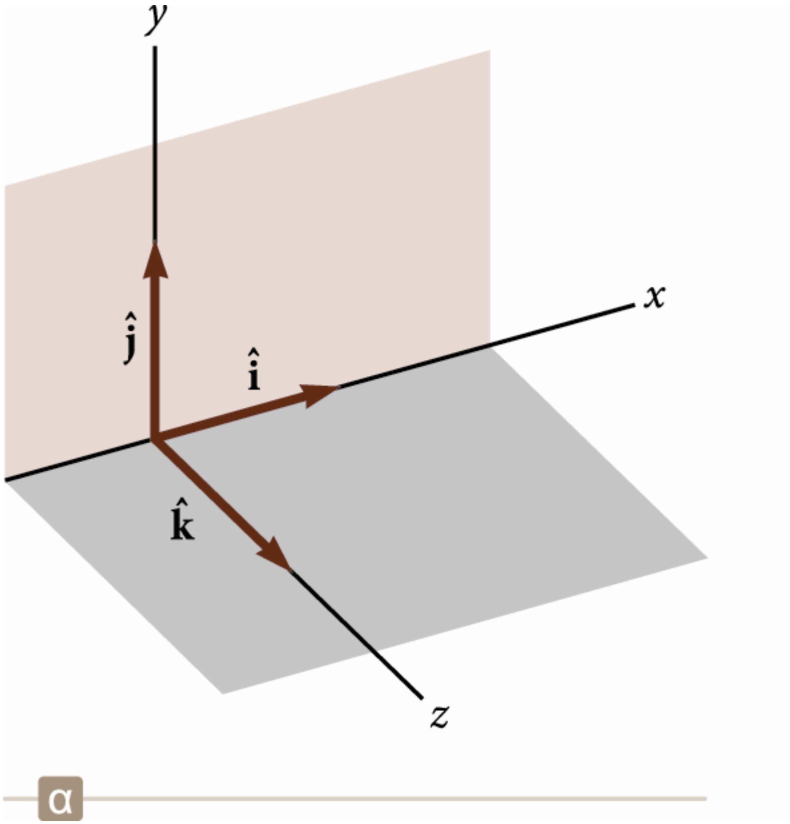
Μοναδιαία διανύσματα (*συνέχεια*)

Συμβολίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα με τα σύμβολα $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$, και $\hat{\mathrm{k}}$

Αποτελούν ένα σύνολο κάθετων μεταξύ τους διανυσμάτων σε ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

Το μέτρο κάθε μοναδιαίου διανύσματος ισούται με 1.

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1$$

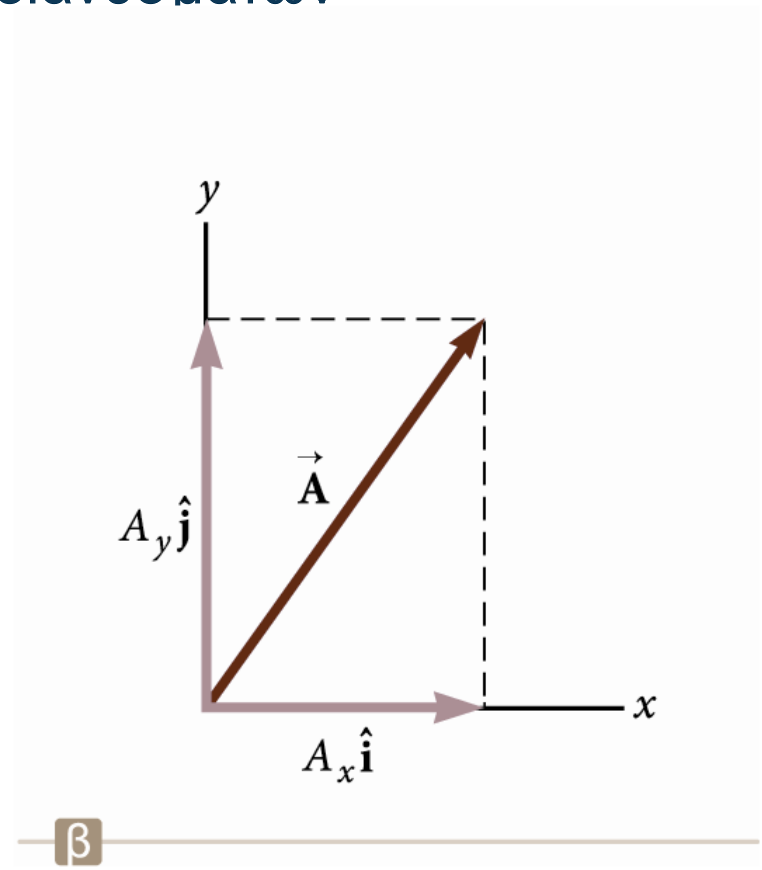


Διανύσματα σε μορφή μοναδιαίων διανυσμάτων

Η συνιστώσα $\mathbf{A_x}$ είναι ίδια με το γινόμενο $A_x\hat{\mathbf{i}}$ και η συνιστώσα $\mathbf{A_y}$ είναι ίδια με το γινόμενο $A_y\hat{\mathbf{j}}$, κ.ο.κ.

Το πλήρες διάνυσμα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$



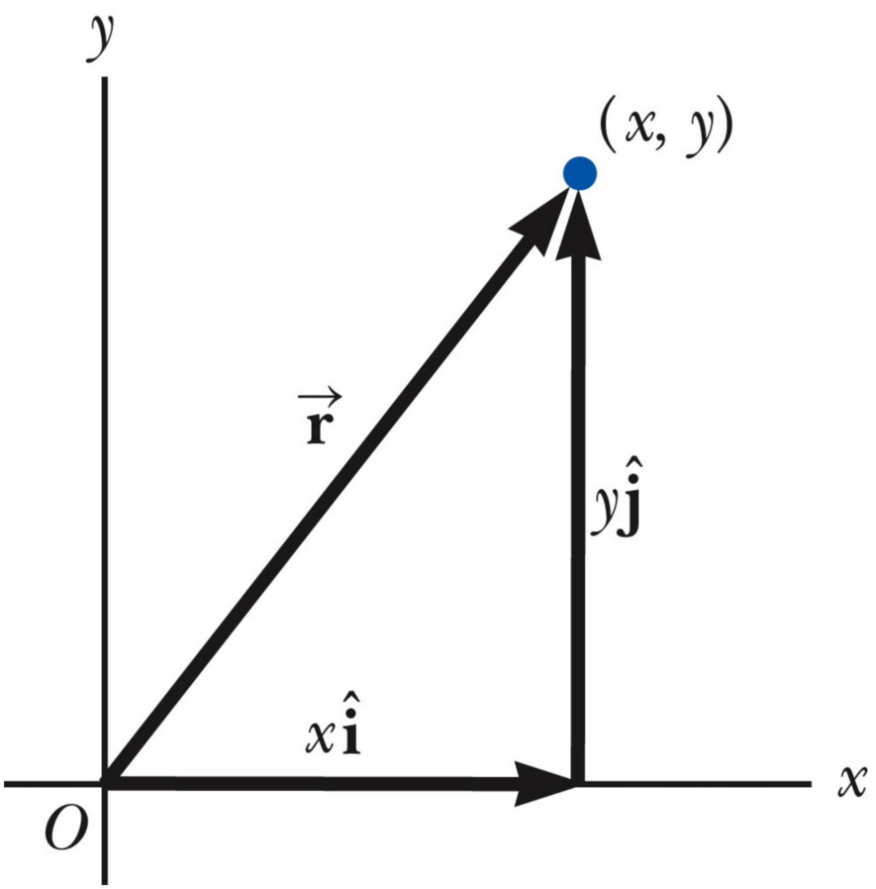
Διάνυσμα θέσης – Παράδειγμα

Ένα σημείο του επιπέδου *xy* έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (*x*, *y*).

Το σημείο μπορεί να οριστεί από το διάνυσμα θέσης

$$\hat{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

Η παραπάνω σχέση δίνει τις συνιστώσες του διανύσματος και τις συντεταγμένες του.



Πρόσθεση διανυσμάτων με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων

Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$

Τότε,

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$$

Άρα, $R_x = A_x + B_x$ και $R_y = A_y + B_y$

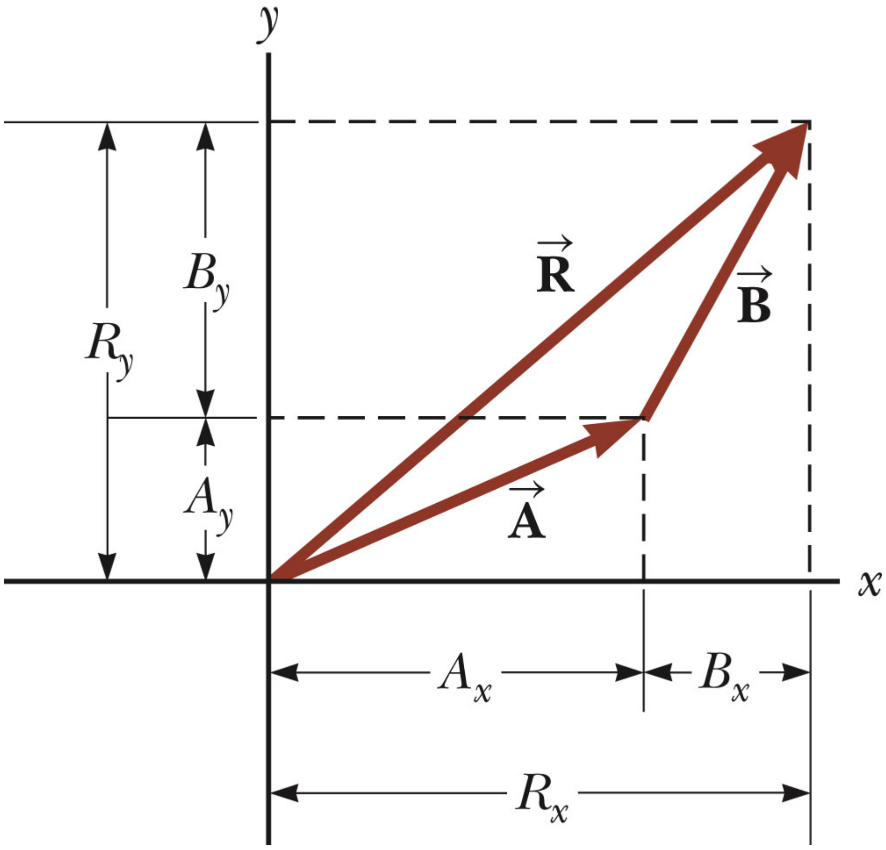
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

Πρόσθεση διανυσμάτων με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων

Προσέξτε τις σχέσεις ανάμεσα στις συνιστώσες της συνισταμένης και στις συνιστώσες των αρχικών διανυσμάτων.

$R_x = A_x + B_x$

$R_y = A_y + B_y$



Επέκταση στις τρεις διαστάσεις

Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$

Τότε,

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right) + \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(A_z + B_z\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$$

Άρα, $R_x = A_x + B_x$, $R_y = A_y + B_y$, και $R_z = A_z + B_z$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad \theta_x = \cos^{-1}\frac{R_x}{R}, \ \kappa\lambda\pi.$$

Πρόσθεση τριών ή περισσότερων διανυσμάτων

Η ίδια μέθοδος μπορεί να επεκταθεί για την πρόσθεση τριών η περισσότερων διανυσμάτων.

Υποθέτουμε ότι

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$$

και

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(A_x + B_x + C_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y + C_y\right)\hat{\mathbf{j}}$$

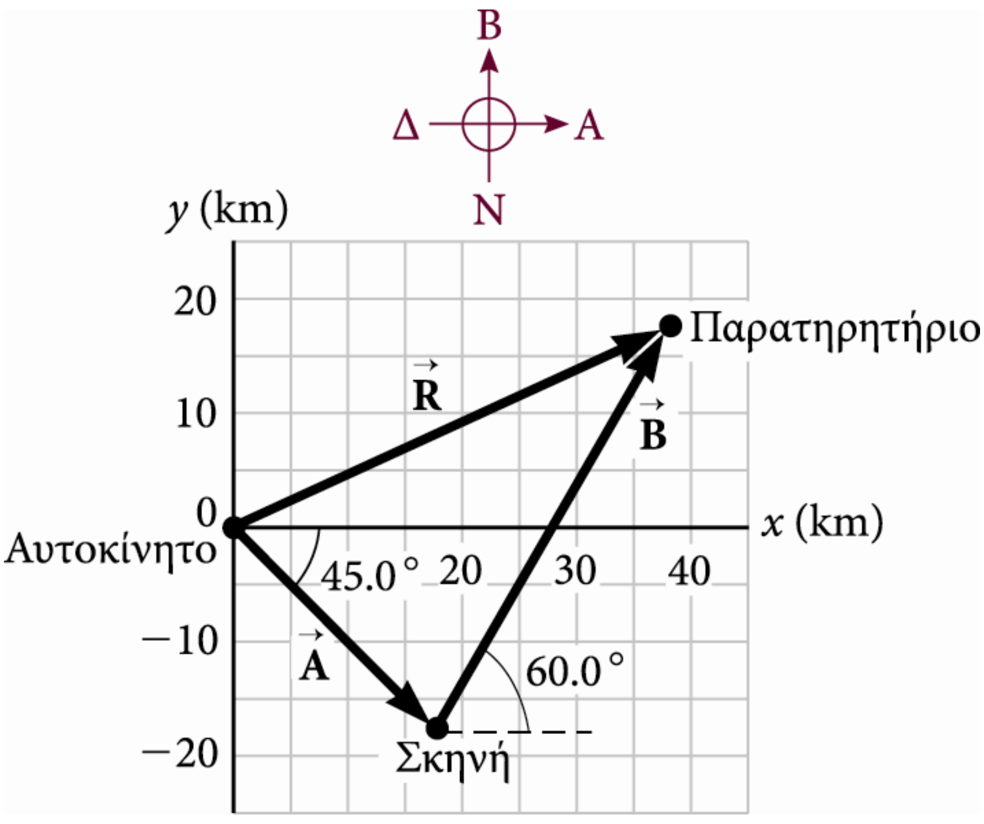
$$+ \left(A_z + B_z + C_z\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Παράδειγμα Μ3.5 – Πεζοπορία

Μια πεζοπόρος ξεκινάει το ταξίδι της περπατώντας 25.0 km νοτιανατολικά από το αυτοκίνητό της. Σταματάει και στήνει τη σκηνή της για να διανυκτερεύσει. Τη δεύτερη μέρα, περπατάει 40.0 km με κατεύθυνση 60.0° βόρεια της ανατολής. Στο σημείο αυτό ανακαλύπτει το παρατηρητήριο ενός δασοφύλακα.

Παράδειγμα Μ3.5 – Λύση (Μοντελοποίηση και Κατηγοριοποίηση)

- *Μοντελοποιήστε* το πρόβλημα σχεδιάζοντας ένα σχήμα όπως αυτό της εικόνας.
- Συμβολίστε τα διανύσματα μετατόπισης για την πρώτη και τη δεύτερη μέρα με $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$, αντίστοιχα.
- Χρησιμοποιήστε το αυτοκίνητο ως αρχή των συντεταγμένων.
- Τα διανύσματα που προκύπτουν φαίνονται στην εικόνα.
- Αφού σχεδιάσουμε τη συνισταμένη $\vec{\mathbf{R}}$, μπορούμε πλέον να *κατηγοριοποιήσουμε* το πρόβλημα ως πρόσθεση δύο διανυσμάτων.



Παράδειγμα Μ3.5 – Λύση (Ανάλυση)

Αναλύστε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τα νέα δεδομένα για τις διανυσματικές συνιστώσες.

Η πρώτη μετατόπιση έχει μέτρο 25.0 km και κατεύθυνση 45.0° κάτω από τον θετικό άξονα *x*.

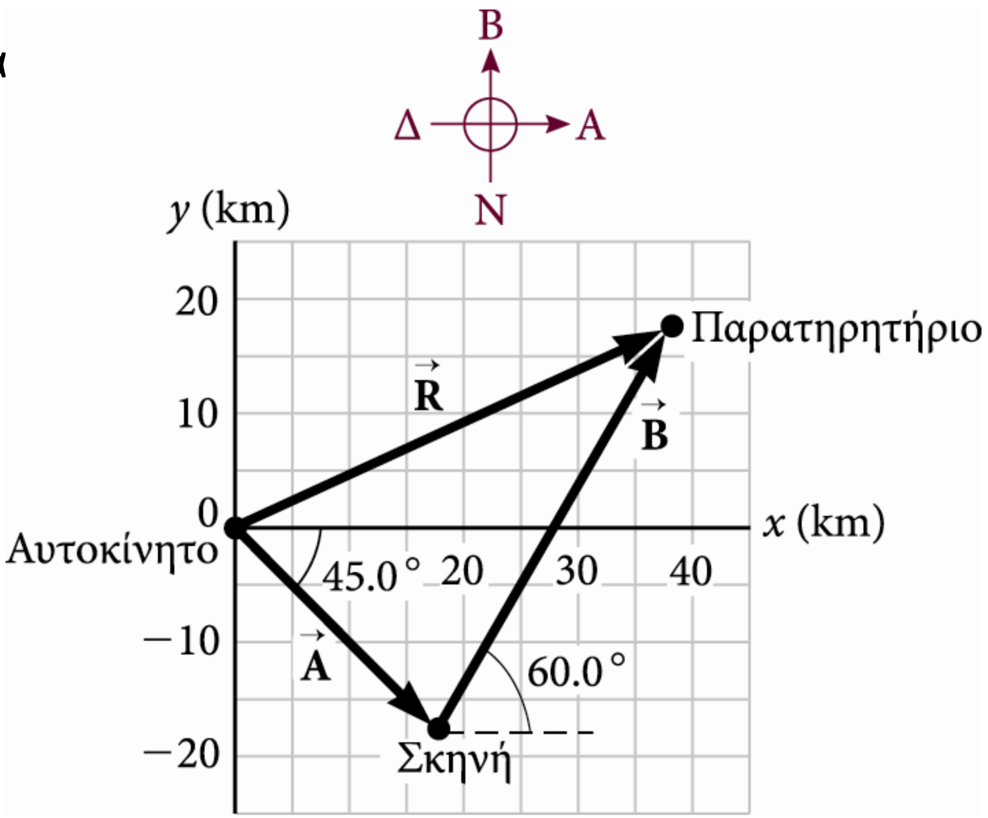
Οι συνιστώσες της είναι:

$A_x = A\cos(-45.0°) =$

$(25.0\text{ km})(0.707) = 17.7\text{ km}$

$A_y = A\sin(-45.0°)$

$= (25.0\text{ km})(-0.707) = -17.7\text{ km}$



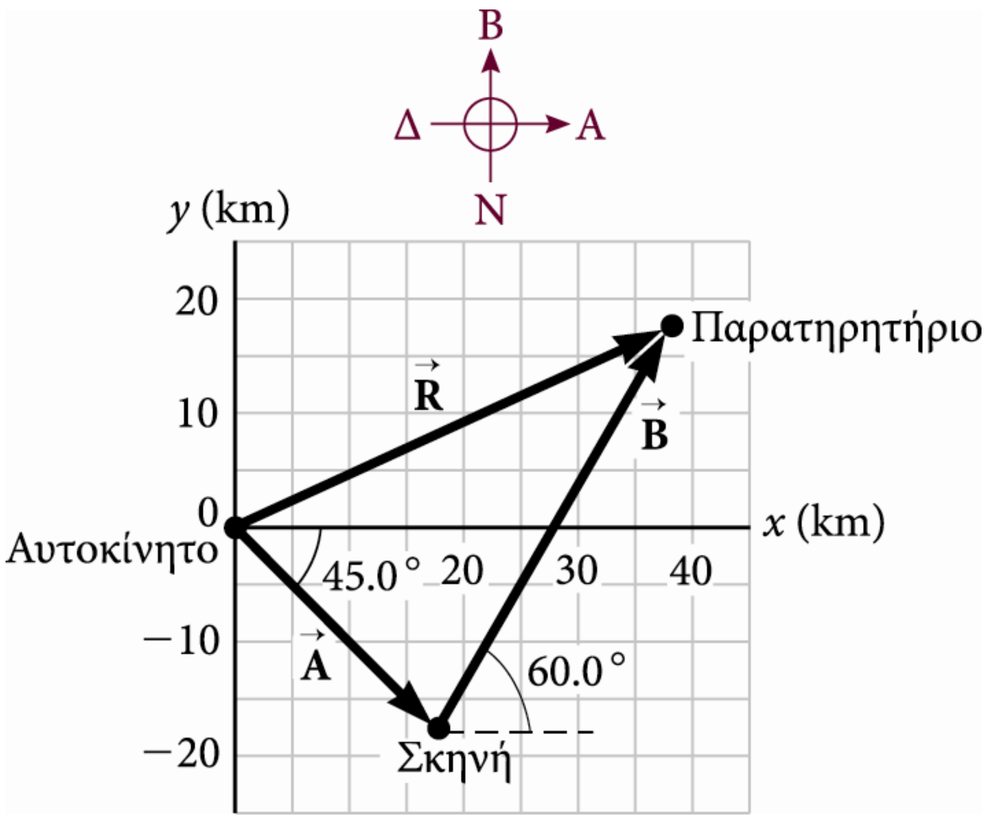
Παράδειγμα Μ3.5 – Λύση (Ανάλυση 2)

Η δεύτερη μετατόπιση έχει μέτρο 40.0 km και κατεύθυνση 60.0° βόρεια της ανατολής.

Οι συνιστώσες της είναι:

$$B_x = B\cos 60.0° = (40.0\text{ km})(0.500) = 20.0\text{ km}$$

$$B_y = B\sin 60.0° = (40.0\text{ km})(0.866) = 34.6\text{ km}$$



CENGAGE Learning

Παράδειγμα Μ3.5 – Λύση (Ανάλυση 3)

Η αρνητική τιμή της συνιστώσας A_y δείχνει ότι την πρώτη μέρα η πεζοπόρος περπατάει προς την κατεύθυνση του αρνητικού άξονα y.

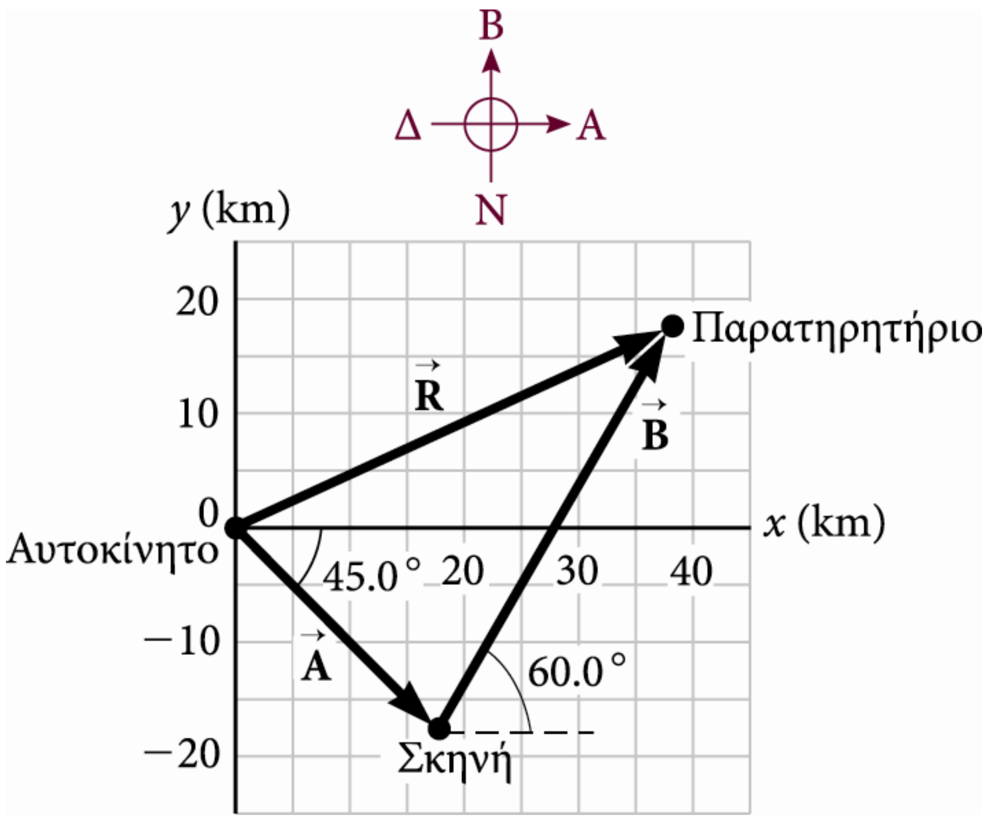
Τα πρόσημα των A_x και A_y είναι επίσης προφανή από την εικόνα.

Τα πρόσημα των συνιστωσών του B επιβεβαιώνονται και αυτά από την εικόνα.

Παράδειγμα Μ3.5 – Λύση (Ανάλυση 4)

Προσδιορίστε τις συνιστώσες της συνισταμένης μετατόπισης της πεζοπόρου για όλη τη διαδρομή.

- Βρείτε μια σχέση για τη συνισταμένη ως συνάρτηση των μοναδιαίων διανυσμάτων.



Οι συνιστώσες της συνισταμένης μετατόπισης για όλη τη διαδρομή δίνονται από τις σχέσεις

- $R_x = A_x + B_x = 17.7\text{ km} + 20.0\text{ km} = 37.7\text{ km}$
- $R_y = A_y + B_y = -17.7\text{ km} + 34.6\text{ km} = 16.9\text{ km}$

Σε μορφή μοναδιαίων διανυσμάτων

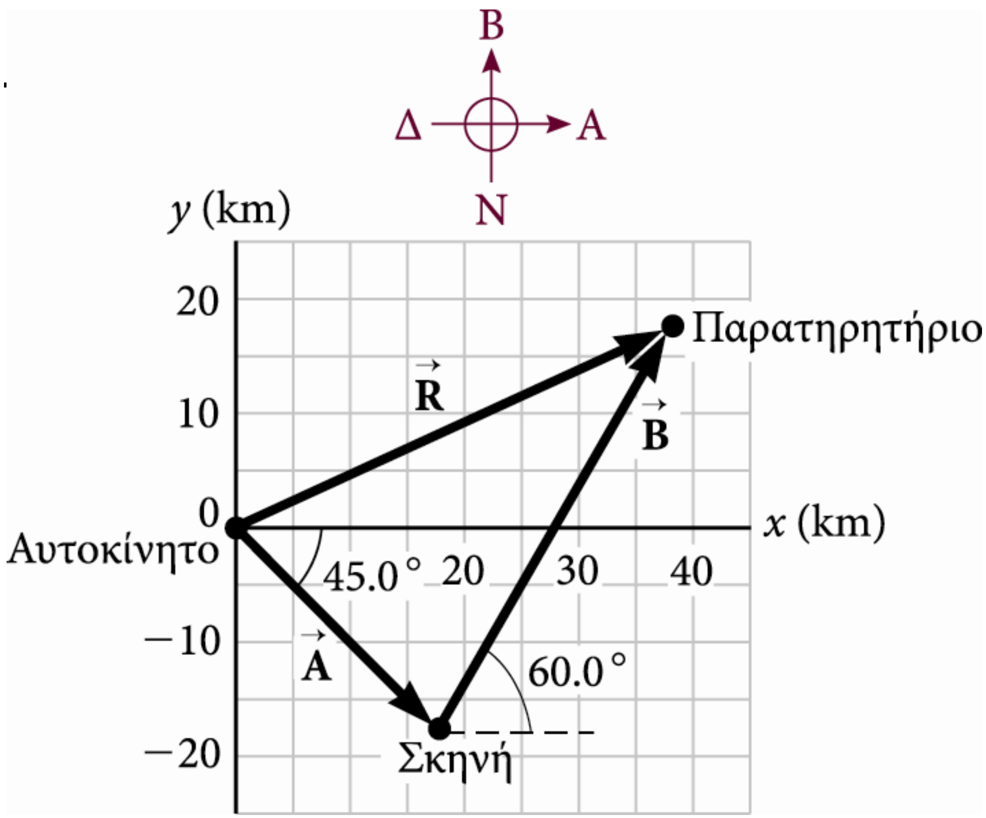
$$\vec{R} = (37.7\hat{\mathbf{i}} + 16.9\hat{\mathbf{j}})\text{ km}$$

Παράδειγμα M3.5 – Λύση (Ολοκλήρωση)

Η συνισταμένη έχει μέτρο 41.3 km και κατεύθυνση 24.1° βόρεια της ανατολής.

Οι μονάδες του $\vec{R}$ είναι τα km. Αυτό είναι λογικό για ένα διάνυσμα μετατόπισης.

Από τη γραφική αναπαράσταση, εκτιμούμε ότι η τελική θέση της πεζοπόρου είναι (38 km, 17 km), κάτι που συμφωνεί με τις συνιστώσες της συνισταμένης.



Παράδειγμα Μ3.5 – Λύση (Ολοκλήρωση) (*συνέχεια*)

Επίσης, και οι δύο συνιστώσες της συνισταμένης είναι θετικές. Άρα, η τελική θέση βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του συστήματος συντεταγμένων.

- Αυτό συμφωνεί και με την εικόνα.