Κεφάλαιο Μ11

Στροφορμή

CENGAGE Learning™

Στροφορμή

Η στροφορμή παίζει σημαντικό ρόλο στη δυναμική των περιστροφών.

Αρχή διατήρησης της στροφορμής

- Η αρχή αυτή είναι ανάλογη με την αρχή διατήρησης της ορμής.
- Σύμφωνα με την αρχή αυτή, η στροφορμή ενός απομονωμένου συστήματος είναι σταθερή.
  - Ένα σύστημα θεωρείται απομονωμένο ως προς τη στροφορμή όταν δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές σε αυτό.

Η αρχή διατήρησης της στροφορμής είναι μια θεμελιώδης αρχή της φυσικής.

- Ισχύει τόσο σε σχετικιστικά όσο και σε κβαντικά συστήματα.

Διανυσματικό γινόμενο

Σε κάποιες περιπτώσεις, το γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι και αυτό διάνυσμα.

- Σε προηγούμενα κεφάλαια εξετάσαμε την περίπτωση κατά την οποία το γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος.
  - Ονομάσαμε το γινόμενο αυτό εσωτερικό γινόμενο.

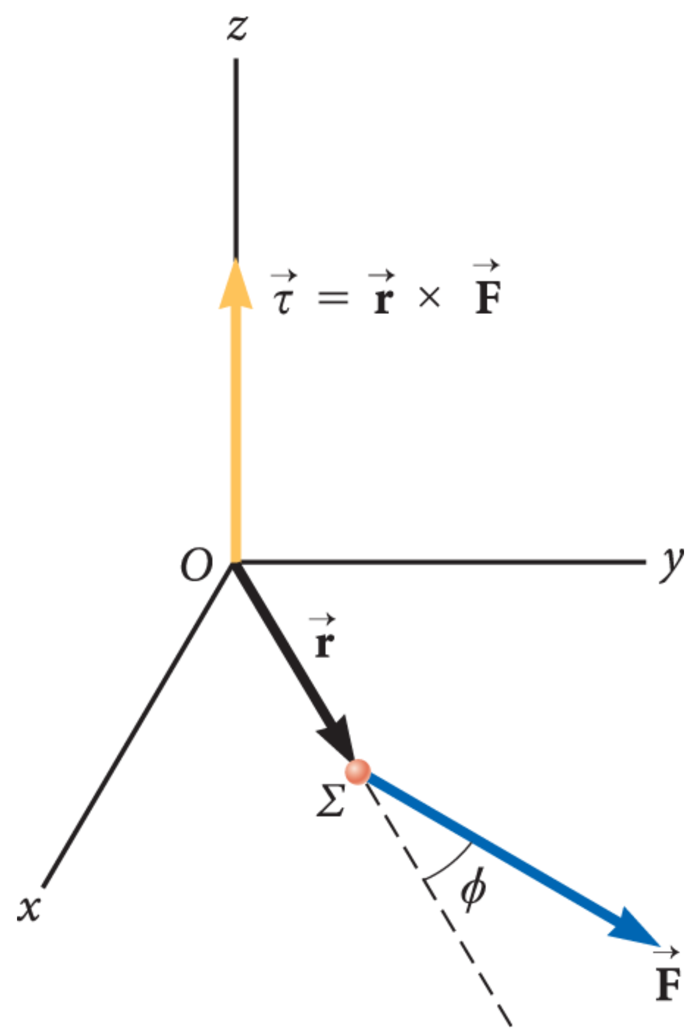
Το διανυσματικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ονομάζεται και εξωτερικό γινόμενο.

Διανυσματικό γινόμενο και ροπή

Η διεύθυνση του διανύσματος της ροπής είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν το διάνυσμα της θέσης και το διάνυσμα της δύναμης

$$\vec{\tau} = \vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{r}}$$

Η ροπή είναι το διανυσματικό (ή εξωτερικό) γινόμενο των διανυσμάτων της θέσης και της δύναμης.



Διανυσματικό γινόμενο – Ορισμός

Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$:

Το διανυσματικό (εξωτερικό) γινόμενο των $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$ είναι ένα *τρίτο διάνυσμα*, το $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$.

Το μέτρο του διανύσματος *C* είναι *AB* sin θ.

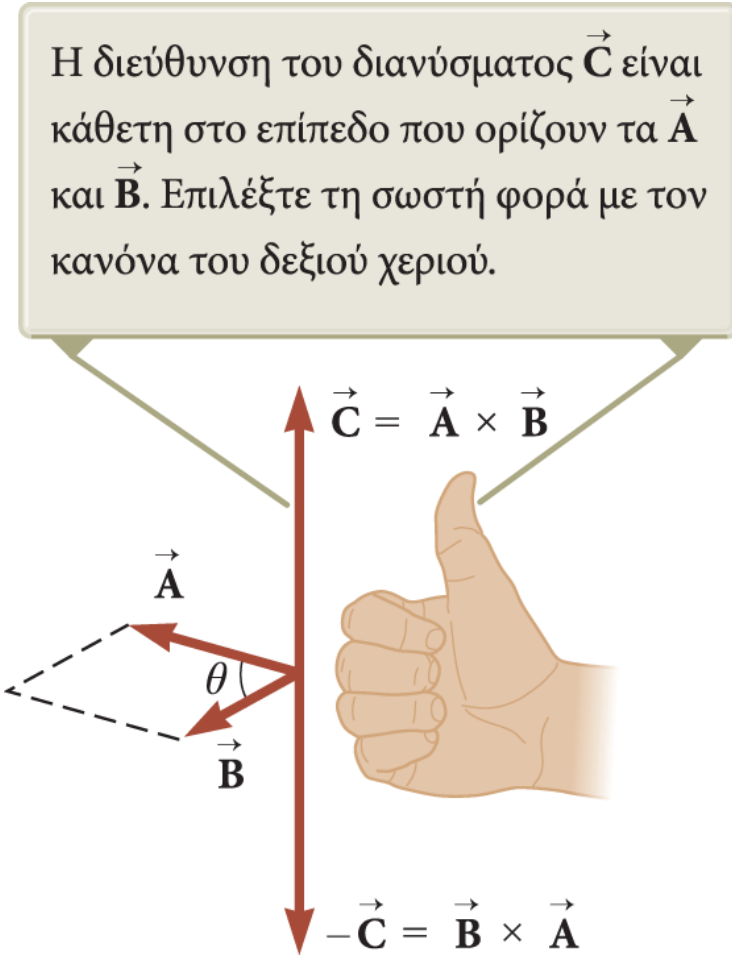
- θ είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$.

Περισσότερα για το διανυσματικό γινόμενο

Η ποσότητα $AB \sin \theta$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα **A** και **B**.

Η διεύθυνση του **C** είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν τα **A** και **B**.

Ο καλύτερος τρόπος για να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση του διανύσματος **C** είναι να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Ιδιότητες του διανυσματικού γινομένου

Στο διανυσματικό γινόμενο *δεν* ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζουμε τα δύο διανύσματα έχει σημασία.

- Για να λάβετε υπόψη τη σειρά, θυμηθείτε ότι $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$.

Αν το $\vec{\mathbf{A}}$ είναι παράλληλο με το $\vec{\mathbf{B}}$ ($\theta = 0^\circ$ ή 180°), τότε $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0$

- Άρα, $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0$.

Αν το $\vec{\mathbf{A}}$ είναι κάθετο στο $\vec{\mathbf{B}}$, τότε $\left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right| = AB$.

Στο διανυσματικό γινόμενο ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα.

$$\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$$

Ιδιότητες του διανυσματικού γινομένου (*τελική διαφάνεια*)

Η παράγωγος του διανυσματικού γινομένου ως προς μια μεταβλητή, όπως ο χρόνος *t*, είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right) = \frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}$$

Είναι σημαντικό να τηρούμε τη σειρά των παραγόντων του γινομένου.

Διανυσματικά γινόμενα μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}$$

Πρόσημα των διανυσματικών γινομένων

Στα διανυσματικά γινόμενα, τα πρόσημα μπορούν να αλλάξουν θέση:

- $\vec{\mathbf{A}} \times \left(-\vec{\mathbf{B}}\right) = -\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$
- και $\hat{\mathbf{i}} \times \left(-\hat{\mathbf{j}}\right) = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$

Χρήση οριζουσών

Το διανυσματικό γινόμενο μπορεί να εκφραστεί σε μορφή ορίζουσας ως

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

Αν αναπτύξουμε τις ορίζουσες, παίρνουμε τη σχέση

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \hat{\mathbf{i}} + \left(A_x B_z - A_z B_x\right) \hat{\mathbf{j}} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right) \hat{\mathbf{k}}$$

Παράδειγμα διανυσματικού γινομένου

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$

Βρείτε το $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$

Αποτέλεσμα

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} &= (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \\
&= 2\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 2\hat{\mathbf{i}} \times 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 3\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{j}} \\
&= 0 + 4\hat{\mathbf{k}} + 3\hat{\mathbf{k}} + 0 = 7\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα διανύσματος ροπής

Δίνονται η δύναμη και η θέση:

$$\vec{\mathbf{F}} = (2.00\,\hat{\mathbf{i}} + 3.00\,\hat{\mathbf{j}})\ N$$

$$\vec{\mathbf{r}} = (4.00\,\hat{\mathbf{i}} + 5.00\,\hat{\mathbf{j}})\ m$$

Βρείτε την παραγόμενη ροπή.

$$\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = [(4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})\mathrm{N}] \times [(2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})\mathrm{m}]$$

$$= [(4.00)(2.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + (4.00)(3.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$$

$$+(5.00)(2.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} + (5.00)(3.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$$

$$= 2.0\,\hat{\mathbf{k}}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

Στροφορμή

Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας *m* που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}$ και κινείται με ορμή $\vec{\mathbf{p}}$.

Βρείτε τη συνισταμένη ροπή.

$$\vec{\mathbf{r}} \times \sum \vec{\mathbf{F}} = \sum \vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

Προσθέτουμε τον όρο $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}}$ (επειδή είναι ίσος με 0)

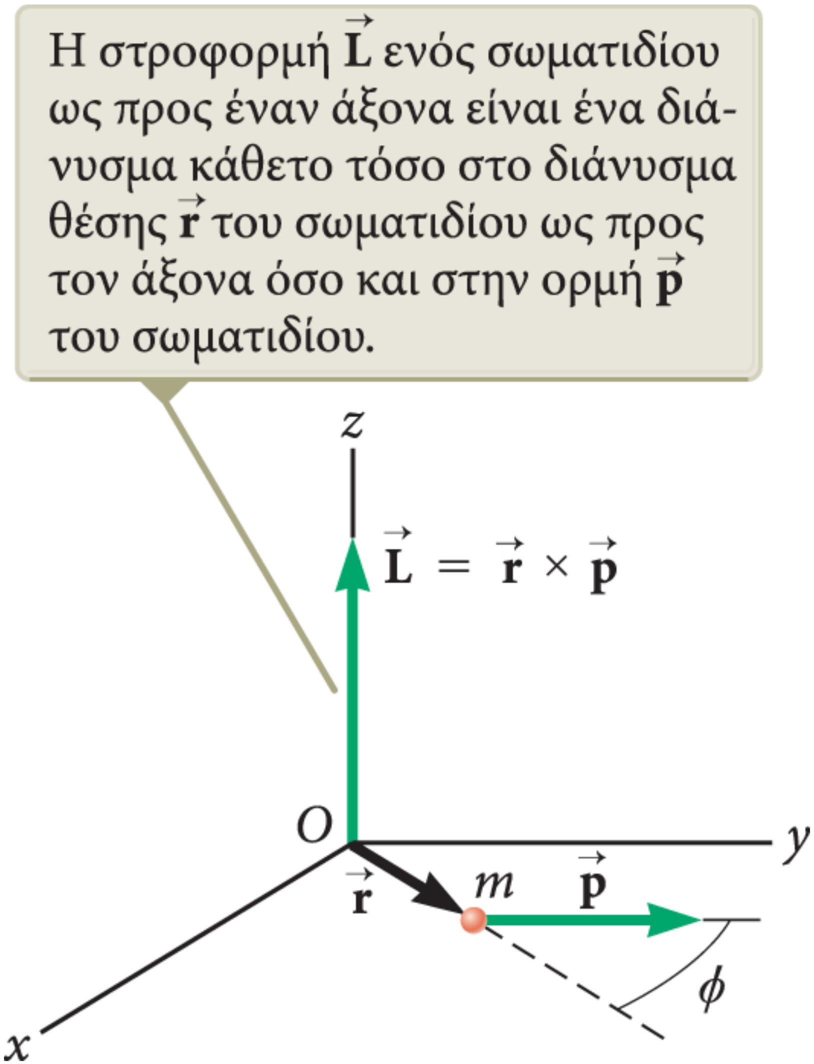
$$\sum \vec{\tau} = \frac{d(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}})}{dt}$$

Η εξίσωση μοιάζει πολύ με την εξίσωση της συνισταμένης δύναμης ως συνάρτηση της ορμής. Αυτό συμβαίνει επειδή η ροπή στην περιστροφική κίνηση έχει τον ίδιο ρόλο με τη δύναμη στη μεταφορική κίνηση.

Στροφορμή (*συνέχεια*)

Η στιγμιαία στροφορμή ενός σωματιδίου ως προς την αρχή των αξόνων *O* ορίζεται ως το διανυσματικό γινόμενο του διανύσματος της στιγμιαίας θέσης του σωματιδίου και της στιγμιαίας ορμής του.

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$$



Ροπή και στροφορμή

Υπάρχει μια σχέση που συνδέει τη ροπή με τη στροφορμή.

- Είναι παρόμοια με τη σχέση που συνδέει τη δύναμη με την ορμή.

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

Η ροπή που δέχεται ένα σωματίδιο ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του.

Στην περιστροφική κίνηση, η παραπάνω εξίσωση είναι ανάλογη με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

- Τα $\sum \vec{\tau}$ και $\vec{\mathbf{L}}$ πρέπει να θεωρούνται ως προς τον ίδιο άξονα.
- Η σχέση ισχύει για κάθε σταθερή αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

Περισσότερα για τη στροφορμή

Στο σύστημα SI, η στροφορμή έχει μονάδες (kg·m^2)/ s.

Το μέτρο και η διεύθυνση της στροφορμής εξαρτώνται από την επιλογή του άξονα.

Το μέτρο της στροφορμής είναι $L = mvr \sin \phi$

- ϕ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\mathbf{r}}$ και $\vec{\mathbf{p}}$.

Η διεύθυνση της στροφορμής $\vec{\mathbf{L}}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{\mathbf{r}}$ και $\vec{\mathbf{p}}$.

Στροφορμή σωματιδίου – Παράδειγμα

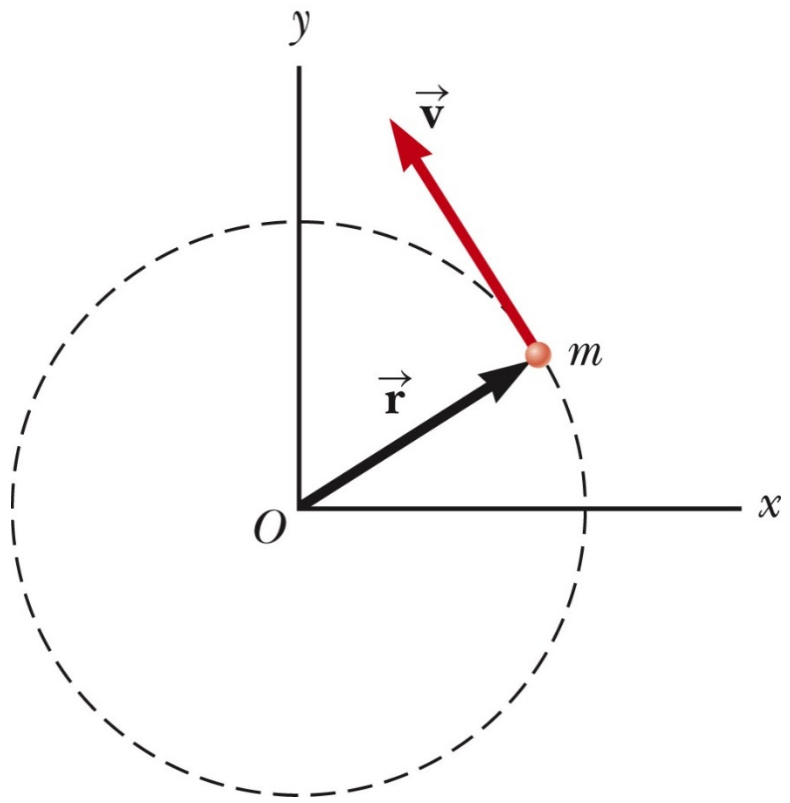
Το διάνυσμα $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ έχει φορά από το διάγραμμα προς τα έξω.

Το μέτρο του είναι

$L = mvr \sin 90^{o} = mvr$

- Χρησιμοποιούμε το sin 90º επειδή τα *v* και *r* είναι κάθετα μεταξύ τους.

Ένα σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει σταθερή στροφορμή ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της τροχιάς του.



Στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων

Η συνολική στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων ορίζεται ως το διανυσματικό άθροισμα της στροφορμής των μεμονωμένων σωματιδίων.

$$\vec{\mathbf{L}}_{\sigma\upsilon\nu.} = \vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2 + \ldots + \vec{\mathbf{L}}_n = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i$$

Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση ως προς τον χρόνο, θα πάρουμε

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\sigma\upsilon\nu.}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i$$

Στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων (*συνέχεια*)

Οι ροπές που σχετίζονται με τις εσωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωματιδίων είναι μηδενικές.

Άρα, $\sum \vec{\tau}_{\text{εξωτ.}} = \dfrac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{συν.}}}{dt}$

- Η συνισταμένη εξωτερική ροπή που ασκείται σε ένα σύστημα ως προς έναν άξονα, ο οποίος διέρχεται από την αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς, ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της συνολικής στροφορμής του συστήματος ως προς αυτή την αρχή.

Η παραπάνω εξίσωση αναπαριστά μαθηματικά το μοντέλο του μη απομονωμένου συστήματος ως προς τη στροφορμή.

Αν αναδιατάξουμε την εξίσωση, θα πάρουμε $\int \left(\sum \vec{\tau}_{\text{εξωτ.}} \right) dt = \Delta \vec{\mathbf{L}}_{\text{συν.}}$

Η σχέση αυτή είναι το θεώρημα ώθησης-στροφορμής.

Στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων (*τελική διαφάνεια*)

Η συνισταμένη ροπή που ασκείται σε ένα σύστημα ως προς έναν άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του συστήματος, ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος, ανεξάρτητα από την κίνηση του κέντρου μάζας.

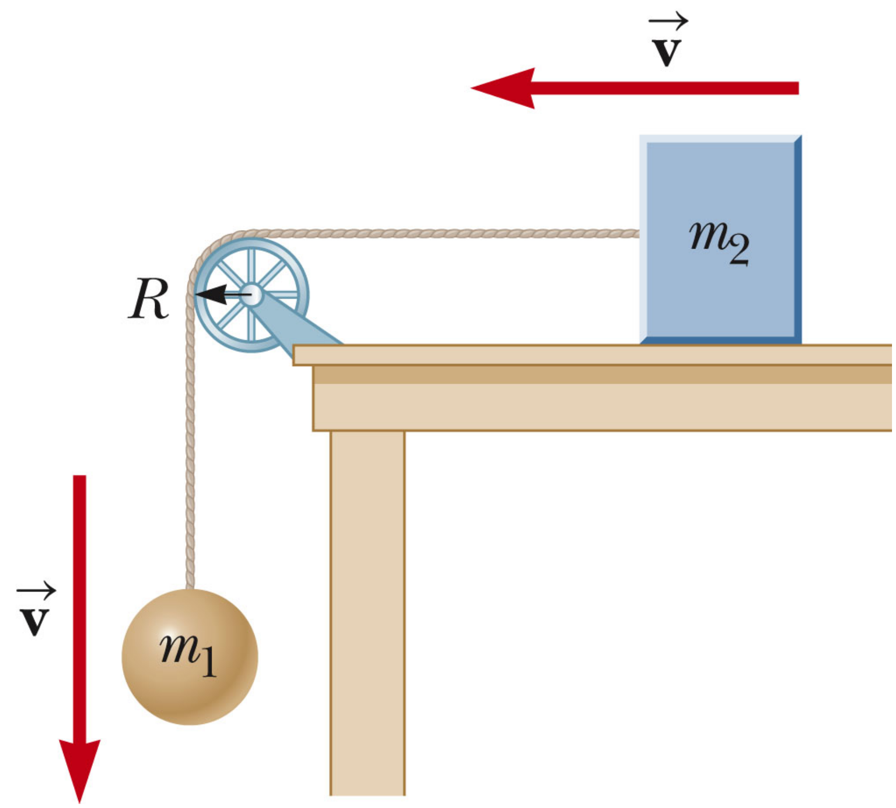
- Αυτό ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που το κέντρο μάζας πραγματοποιεί επιταχυνόμενη κίνηση, με την προϋπόθεση ότι η ροπή και η στροφορμή υπολογίζονται ως προς το κέντρο μάζας.

Σύστημα σωμάτων – Παράδειγμα

Τα σώματα συνδέονται με ένα αβαρές σκοινί το οποίο διέρχεται από μια τροχαλία. Βρείτε τη μεταφορική επιτάχυνση.

Μοντελοποίηση

- Η σφαίρα πέφτει, η τροχαλία περιστρέφεται και ο κύβος ολισθαίνει.
- Χρησιμοποιήστε τις έννοιες της στροφορμής και της ροπής.



Σύστημα σωμάτων – Παράδειγμα (*συνέχεια*)

Κατηγοριοποίηση

- Ο κύβος, η τροχαλία, και η σφαίρα αποτελούν ένα μη απομονωμένο σύστημα.
  - Το σύστημα δέχεται μια εξωτερική ροπή την οποία δημιουργεί η βαρυτική δύναμη που ασκείται στη σφαίρα.
- Χρησιμοποιήστε έναν άξονα που συμπίπτει με τον άξονα της τροχαλίας.
- Η στροφορμή του συστήματος αποτελείται από τη στροφορμή δύο σωμάτων που εκτελούν μεταφορική κίνηση και ενός σώματος που περιστρέφεται.

Ανάλυση

- Σε κάθε χρονική στιγμή, η σφαίρα και ο κύβος έχουν κοινή ταχύτητα *v*.
- Γράψτε τις σχέσεις για τη συνολική στροφορμή και τη συνισταμένη εξωτερική ροπή.
- Λύστε την εξίσωση ως προς τη μεταφορική επιτάχυνση.

Σύστημα σωμάτων – Παράδειγμα (*τελική διαφάνεια*)

Ολοκλήρωση

- Κατά την ανάλυση θεωρήσαμε το σύστημα συνολικά ώστε να αγνοήσουμε τις εσωτερικές δυνάμεις.
- Μας ενδιαφέρουν μόνο οι *εξωτερικές δυνάμεις*.
  - Μόνο οι εξωτερικές ροπές προκαλούν μεταβολή της στροφορμής του συστήματος.

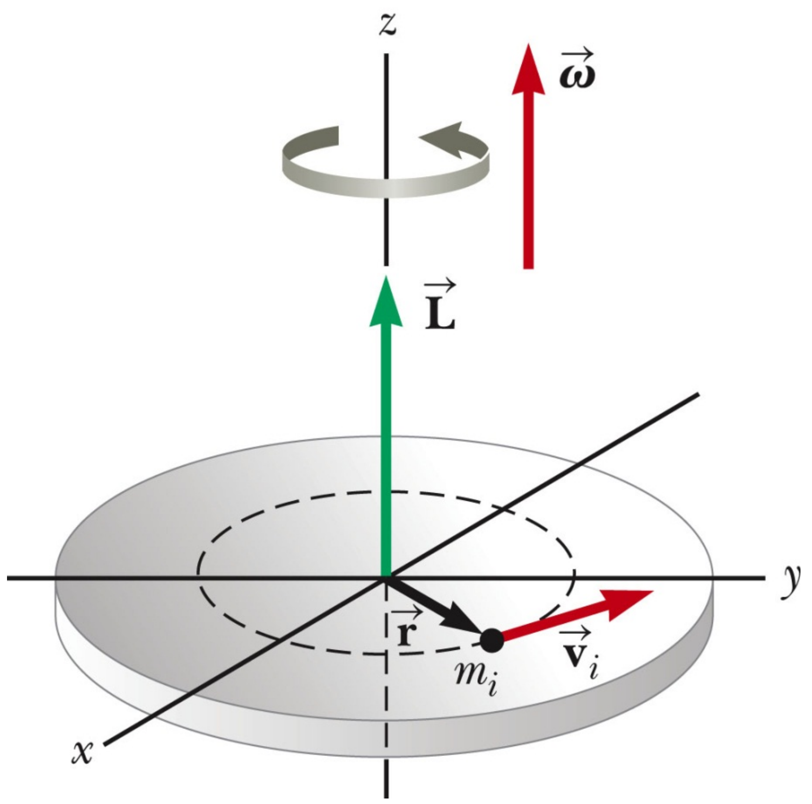
Στροφορμή περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος

Τα άκαμπτα σώματα είναι μη παραμορφώσιμα συστήματα.

Κάθε σωματίδιο του σώματος περιστρέφεται στο επίπεδο *xy* γύρω από τον άξονα *z* με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω.

Η στροφορμή ενός μεμονωμένου σωματιδίου είναι $L_i = m_i r_i^2 \omega$.

Τα $\vec{\mathbf{L}}$ και $\vec{\omega}$ έχουν τη διεύθυνση του άξονα *z*.



Στροφορμή περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος (*συνέχεια*)

Για να βρούμε τη στροφορμή ολόκληρου του σώματος, προσθέτουμε τις στροφορμές όλων των μεμονωμένων σωματιδίων.

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i \left(m_i r_i^2\right)\omega = I\omega$$

Με παραγώγιση παίρνουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφή.

$$\sum \vec{\tau}_{\text{εξωτ.}} = \frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

Η εξίσωση αυτή αναπαριστά μαθηματικά το μοντέλο ανάλυσης του άκαμπτου σώματος υπό την επίδραση ροπής.

Στροφορμή περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος (*τελική διαφάνεια*)

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφή ισχύει και για άκαμπτα σώματα που περιστρέφονται γύρω από έναν κινούμενο άξονα υπό την προϋπόθεση ότι ο άξονας αυτός:

- (1) διέρχεται από το κέντρο μάζας
- (2) είναι άξονας συμμετρίας

Αν ένα συμμετρικό σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, ισχύει η διανυσματική μορφή της εξίσωσης:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

- Όπου $\vec{L}$ είναι η συνολική στροφορμή του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής.

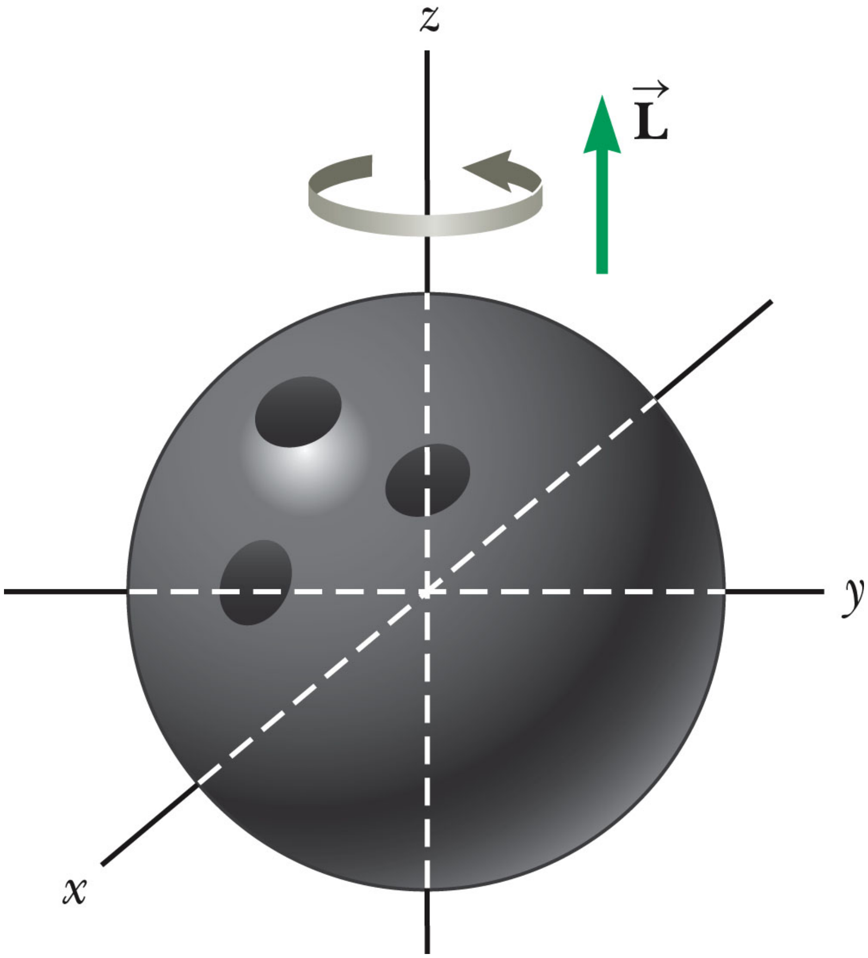
Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφή ισχύει για οποιοδήποτε σώμα, ανεξάρτητα από τη συμμετρία του, αν το $\vec{L}$ συμβολίζει τη συνιστώσα της στροφορμής κατά μήκος του άξονα περιστροφής.

Στροφορμή μιας μπάλας του μπόουλιγκ

Η ροπή αδράνειας της μπάλας είναι $2/5MR^2$.

Η στροφορμή της μπάλας είναι $L_z = I\omega$.

Το διάνυσμα της στροφορμής έχει τη θετική κατεύθυνση του άξονα z.



Διατήρηση της στροφορμής

Η συνολική στροφορμή ενός συστήματος έχει σταθερό μέτρο και κατεύθυνση αν η συνισταμένη εξωτερική ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι μηδενική.

- Συνισταμένη ροπή = 0 σημαίνει ότι το σύστημα είναι απομονωμένο.
- Σε αυτή την αρχή βασίζεται το μοντέλο του απομονωμένου συστήματος ως προς τη στροφορμή.

$\vec{\mathbf{L}}_{\text{συν.}} = \text{σταθερή}$ ή $\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f$

Για ένα σύστημα σωματιδίων,

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{συν.}} = \sum \vec{\mathbf{L}}_n = \text{σταθερή}$$

Διατήρηση της στροφορμής (*συνέχεια*)

Αν ένα απομονωμένο περιστρεφόμενο σύστημα είναι παραμορφώσιμο, δηλαδή η μάζα του ανακατανέμεται, τότε η ροπή αδράνειας του συστήματος μεταβάλλεται.

- Για να διατηρηθεί η στροφορμή απαιτείται μια αντισταθμιστική μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας.
- $I_i \, \omega_i = I_f \, \omega_f$ = σταθερή
  - Η σχέση αυτή ισχύει τόσο για την περιστροφή γύρω από έναν σταθερό άξονα όσο και για την περιστροφή γύρω από έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας ενός κινούμενου συστήματος.
  - Σε κάθε περίπτωση, η συνισταμένη ροπή πρέπει να είναι μηδενική.

Αρχή διατήρησης – Σύνοψη

Για ένα απομονωμένο σύστημα,

(1) Διατήρηση της ενέργειας:

- $E_i = E_f$
- Αν δεν μεταφέρεται ενέργεια μέσω του ορίου του συστήματος.

(2) Διατήρηση της ορμής:

- $\vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f$
- Αν η συνισταμένη εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι μηδενική.

(3) Διατήρηση της στροφορμής:

- $\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f$
- Αν η συνισταμένη εξωτερική ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι μηδενική.

Αρχές διατήρησης – Σημειώσεις

Ένα σύστημα μπορεί να είναι απομονωμένο ως προς ένα από αυτά τα μεγέθη, αλλά όχι ως προς κάποιο άλλο.

- Για παράδειγμα, ένα σύστημα το οποίο δεν είναι απομονωμένο ως προς την ορμή, συχνά δεν είναι απομονωμένο και ως προς την ενέργεια επειδή σε αυτό ασκείται μια συνισταμένη δύναμη ή ροπή.
- Υπάρχουν συστήματα που δεν είναι απομονωμένα ως προς την ενέργεια, αλλά είναι απομονωμένα ως προς την ορμή.
- Συχνά, οι κρούσεις είναι απομονωμένες ως προς την ορμή αλλά δεν είναι απομονωμένες ως προς την ενέργεια.

Διατήρηση της στροφορμής: Το καρουσέλ

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ισούται με τη ροπή αδράνειας της πλατφόρμας συν τη ροπή αδράνειας του ανθρώπου.

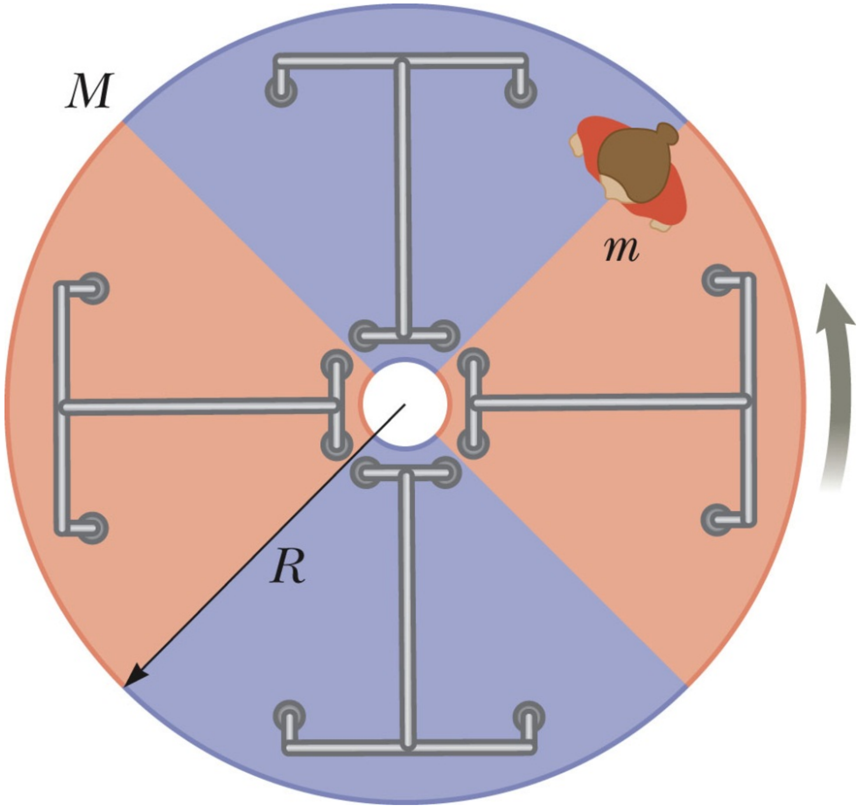
- Μοντελοποιούμε τον άνθρωπο ως σωματίδιο.

Καθώς ο άνθρωπος περπατά προς το κέντρο της περιστρεφόμενης πλατφόρμας, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος αυξάνεται.

- Έτσι, η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

Το σύστημα είναι απομονωμένο ως προς τη στροφορμή.

- Το σύστημα είναι απομονωμένο ως προς την ενέργεια, αλλά δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική.



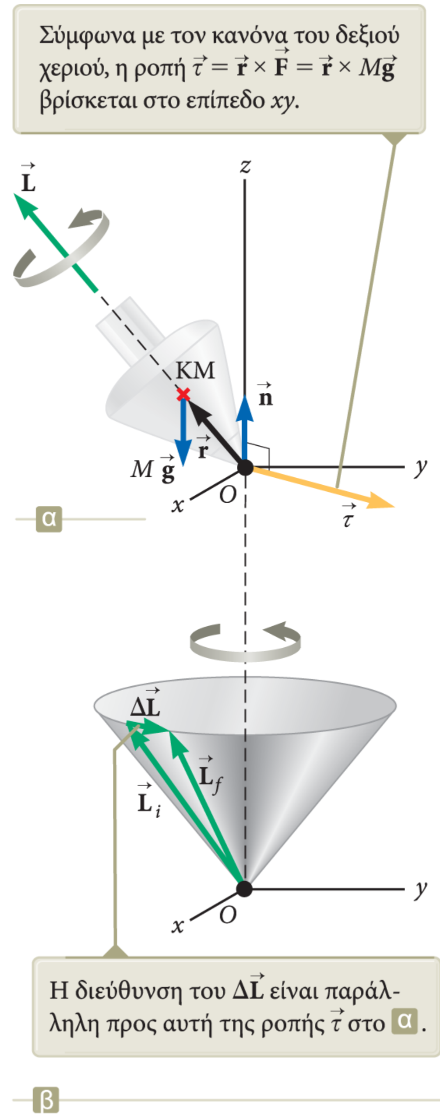
Γυροσκοπική κίνηση

Οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται η σβούρα είναι η κάθετη δύναμη και η βαρυτική δύναμη.

Η στροφορμή έχει τη διεύθυνση του άξονα συμμετρίας.

Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, το διάνυσμα της ροπής βρίσκεται στο επίπεδο *xy*.

$$\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times M\vec{\mathbf{g}}$$



Γυροσκοπική κίνηση (*συνέχεια*)

Η συνισταμένη ροπή και η στροφορμή συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$\sum \vec{\tau}_{\text{εξωτ.}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

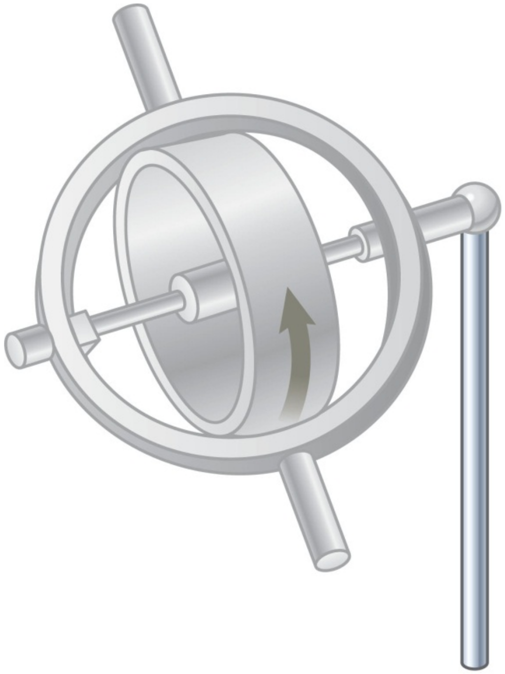
- Η ροπή προκαλεί μεταβολή της στροφορμής.
- Η μεταβολή της στροφορμής προκαλεί μετάπτωση ως προς τον άξονα *z*.
- Η διεύθυνση του διανύσματος της στροφορμής μεταβάλλεται.
- Η **μεταπτωτική κίνηση** είναι η κίνηση του άξονα συμμετρίας ως προς την κατακόρυφο.
- Η κίνηση αυτή είναι συνήθως αργή σε σχέση με την περιστροφική κίνηση της σβούρας.

Γυροσκόπιο

Μπορούμε να δούμε τη μεταπτωτική κίνηση μελετώντας ένα γυροσκόπιο.

Η βαρυτική δύναμη προκαλεί ροπή ως προς το σημείο περιστροφής, με διεύθυνση κάθετη στον άξονα του γυροσκοπίου.

Η κάθετη δύναμη δεν προκαλεί ροπή.



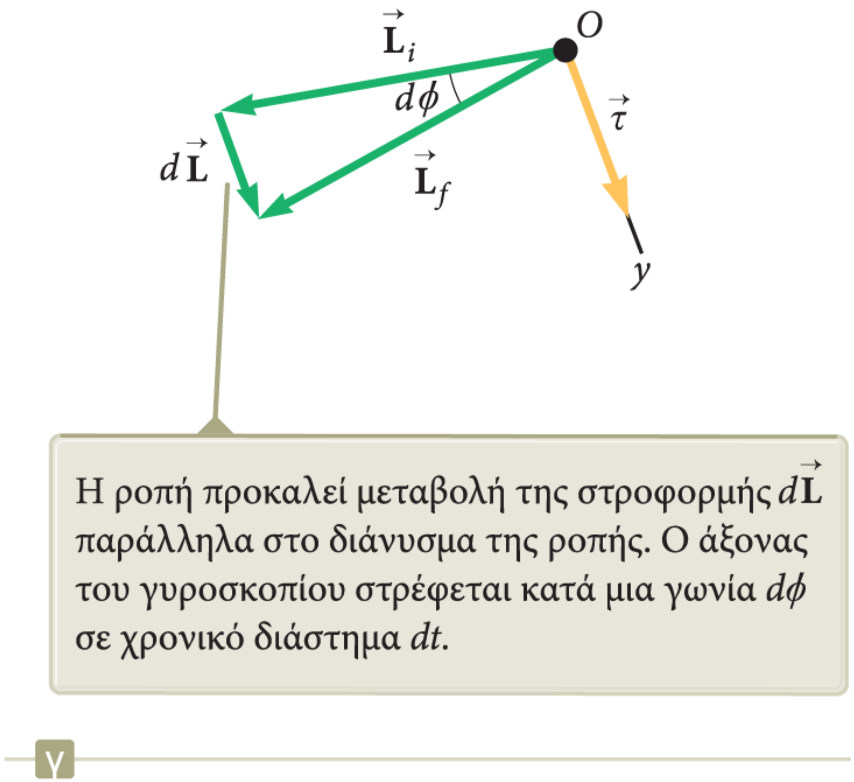
Γυροσκόπιο (*συνέχεια*)

Η ροπή προκαλεί μεταβολή της στροφορμής σε μια διεύθυνση κάθετη στον άξονα του γυροσκοπίου.

- Ο άξονας στρέφεται κατά μια γωνία $d\phi$ σε χρονικό διάστημα dt.

Δεν μεταβάλλεται το μέτρο του διανύσματος της στροφορμής αλλά η διεύθυνσή του.

Το γυροσκόπιο εκτελεί μεταπτωτική κίνηση.



Γυροσκόπιο (*τελική διαφάνεια*)

Για να απλοποιήσουμε την περιγραφή, υποθέτουμε ότι η στροφορμή που οφείλεται στην κίνηση του κέντρου μάζας γύρω από το σημείο περιστροφής είναι μηδενική.

- Άρα, η συνολική στροφορμή προκαλείται μόνο από την περιστροφή.
- Αυτή η προσέγγιση είναι καλή όταν η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ έχει μεγάλη τιμή.

Συχνότητα μετάπτωσης

Από το τρίγωνο των διανυσμάτων στην Εικ. M11.14γ, μπορούμε να βρούμε ότι ο άξονας του γυροσκοπίου περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα με

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgr_{\mathrm{KM}}}{I\omega}$$

- Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω_p ονομάζεται **συχνότητα μετάπτωσης**.
  - Αυτό ισχύει μόνο όταν $\omega_p \ll \omega$.

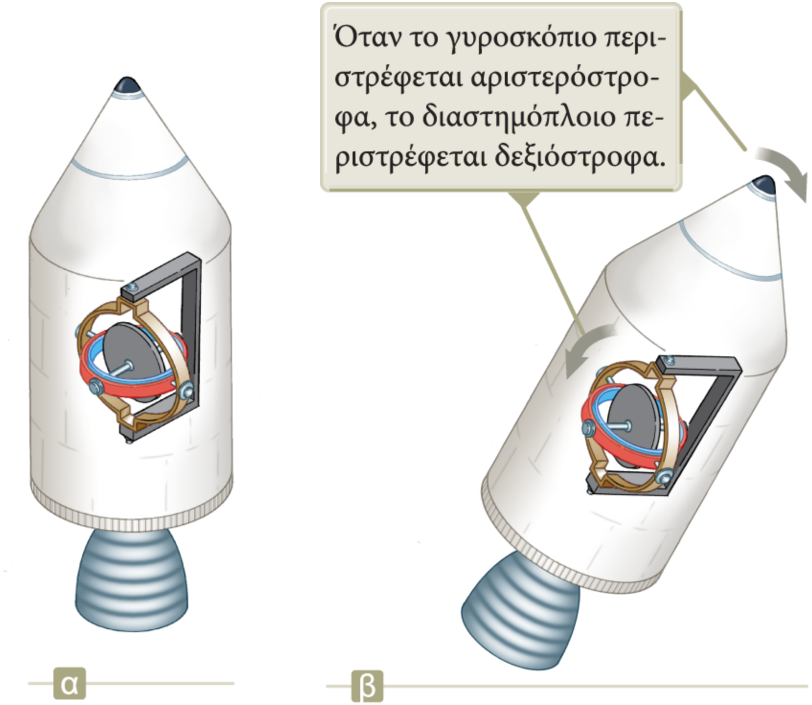
Γυροσκόπια σε διαστημόπλοια

Η στροφορμή του διαστημοπλοίου ως προ τος κέντρο μάζας του είναι μηδενική.

Το γυροσκόπιο περιστρέφεται, με αποτέλεσμα η στροφορμή του διαστημοπλοίου να μην είναι πλέον μηδενική.

Το διαστημόπλοιο περιστρέφεται με κατεύθυνση αντίθετη από αυτή του γυροσκοπίου.

Έτσι, η συνολική στροφορμή του συστήματος παραμένει μηδενική.

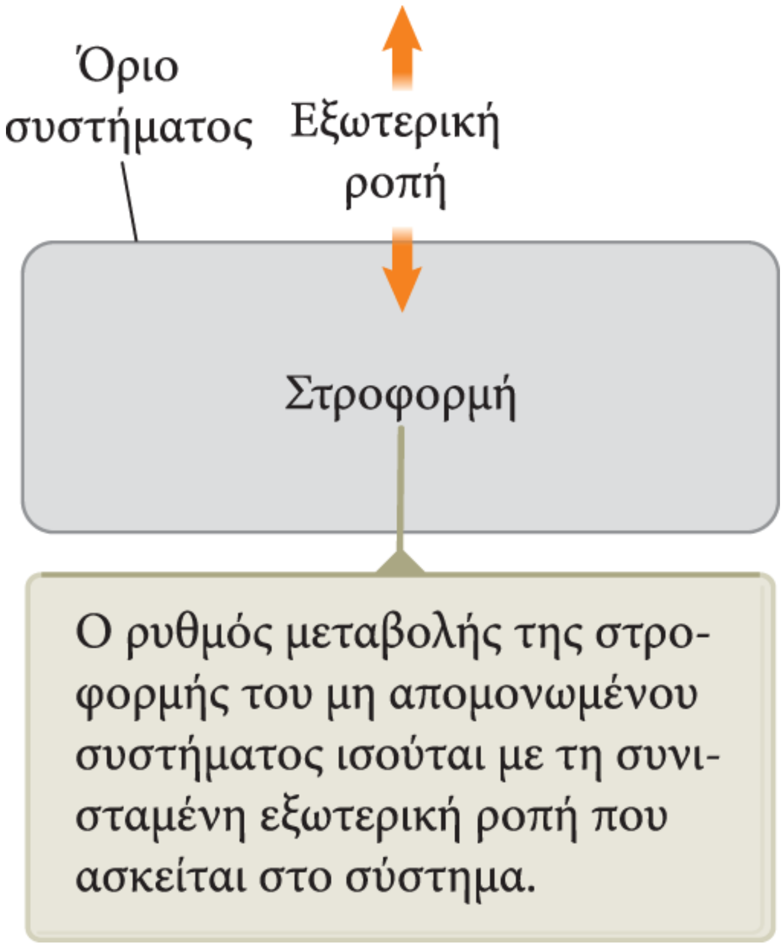


Νέο μοντέλο ανάλυσης – Μη απομονωμένο σύστημα

Μη απομονωμένο σύστημα ως προς τη στροφορμή

- Αν ένα σύστημα αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του, με την έννοια ότι ασκείται μια εξωτερική ροπή σε αυτό, τότε η συνισταμένη εξωτερική ροπή που ασκείται στο σύστημα ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του:

$$\sum \vec{\tau}_{\text{εξωτ.}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{συν.}}}{dt}$$



Νέο μοντέλο ανάλυσης – Απομονωμένο σύστημα

Απομονωμένο σύστημα ως προς τη στροφορμή

- Αν σε ένα σύστημα δεν ασκείται εξωτερική ροπή από το περιβάλλον, τότε η συνολική στροφορμή του συστήματος διατηρείται.

  $\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f$

Η εφαρμογή της αρχής διατήρησης της στροφορμής σε ένα σύστημα με μεταβαλλόμενη ροπή αδράνειας δίνει

- $I_i\omega_i = I_f\omega_f =$ σταθερή