Κεφάλαιο M10

Περιστροφή άκαμπτου σώματος γύρω από σταθερό άξονα

CENGAGE Learning™

Άκαμπτο σώμα

Τα μοντέλα ανάλυσης που παρουσιάσαμε μέχρι τώρα δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση όλων των κινήσεων.

Μπορούμε να αναλύσουμε την κίνηση ενός μη σημειακού σώματος μοντελοποιώντας το ως σύστημα πολλών σωματιδίων.

- Η ανάλυση απλοποιείται αν υποθέσουμε ότι το σώμα είναι **άκαμπτο**.

Ένα άκαμπτο σώμα δεν είναι παραμορφώσιμο.

- Οι σχετικές θέσεις όλων των σωματιδίων που αποτελούν το σώμα παραμένουν σταθερές.
- Όλα τα πραγματικά σώματα παραμορφώνονται σε κάποιο βαθμό, αλλά το μοντέλο του άκαμπτου σώματος είναι χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις όπου η παραμόρφωση είναι αμελητέα.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε μία νέα κατηγορία μοντέλων ανάλυσης, τα οποία βασίζονται στο μοντέλο του άκαμπτου σώματος.

Γωνιακή θέση

Ο άξονας περιστροφής είναι το κέντρο του δίσκου.

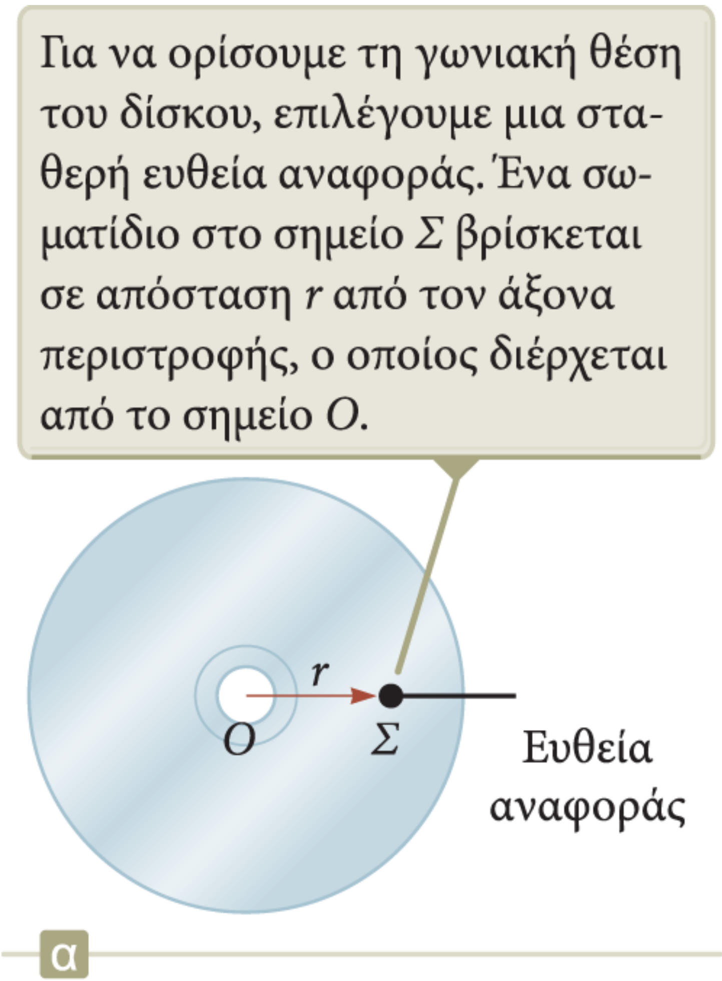
Επιλέγουμε μια σταθερή ευθεία αναφοράς.

Το σημείο *Σ* βρίσκεται σε σταθερή απόσταση *r* από την αρχή των συντεταγμένων.

- Μοντελοποιούμε ένα μικρό στοιχείο του δίσκου ως σωματίδιο στο σημείο *Σ*.

Μας διευκολύνει να προσδιορίσουμε τη θέση του *Σ* (ή οποιουδήποτε άλλου σημείου) χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες.

Το *Σ* έχει συντεταγμένες (r, θ), όπου *r* είναι η απόσταση του *Σ* από την αρχή των αξόνων και η γωνία θ μετριέται αριστερόστροφα από μια ευθεία αναφοράς σταθερή στον χώρο.



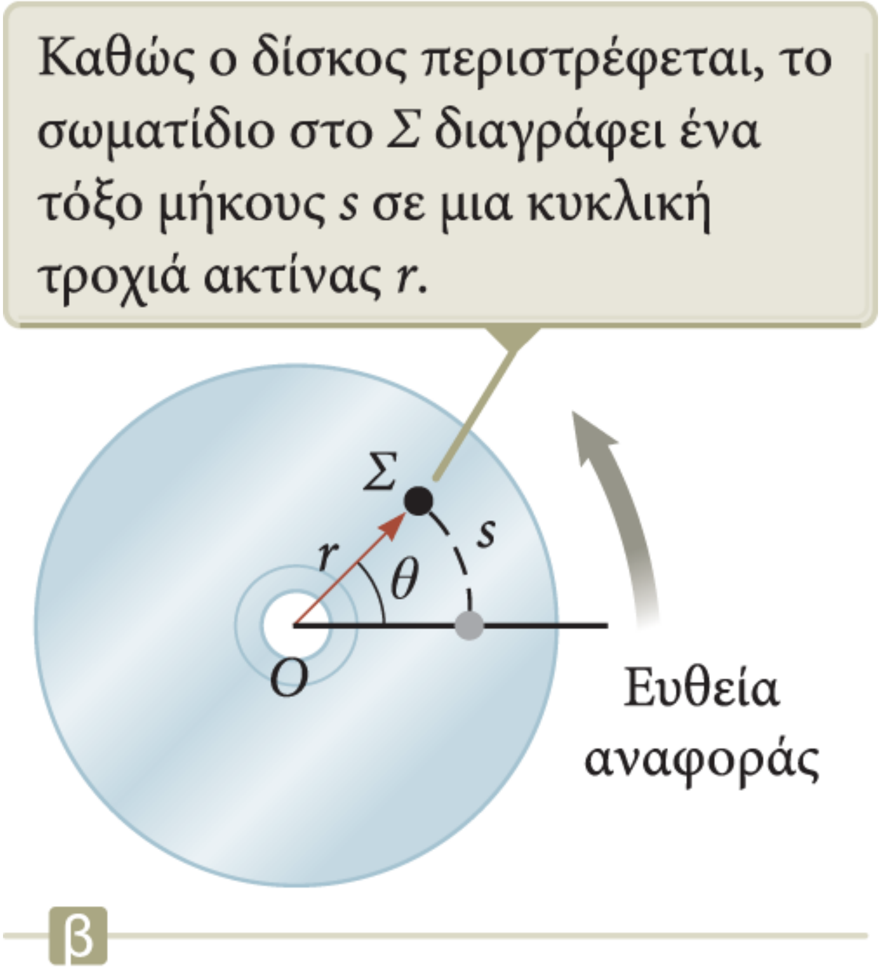
Γωνιακή θέση (*συνέχεια*)

Καθώς το σωματίδιο κινείται, μεταβάλλεται μόνο η συντεταγμένη θ.

Καθώς το σωματίδιο κινείται κυκλικά σαρώνοντας γωνία θ, διαγράφει τόξο μήκους *s*.

Το μήκος του τόξου και η απόσταση *r* συνδέονται μέσω της σχέσης

- $s = \theta r$



Ακτίνιο

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφτεί ως:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Η γωνία θ είναι αδιάστατος αριθμός, αλλά συνηθίζουμε να τη μετράμε σε ακτίνια.

Το ένα ακτίνιο είναι η επίκεντρος γωνία που αντιστοιχεί σε ένα τόξο κύκλου το οποίο έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου.

Στις εξισώσεις της περιστροφικής κίνησης, πρέπει να χρησιμοποιείτε γωνίες μετρημένες σε ακτίνια.

Μετατροπές

Σύγκριση μοιρών με ακτίνια

$$1\ rad = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.3^\circ$$

Μετατροπή μοιρών σε ακτίνια

$$\theta\left(rad\right) = \frac{\pi}{180^\circ}\,\theta\left(\text{μοίρες}\right)$$

Γωνιακή θέση (*τελική διαφάνεια*)

Μπορούμε να συσχετίσουμε τη γωνία θ με ολόκληρο το άκαμπτο σώμα, αλλά και με ένα μεμονωμένο σωματίδιο.

- Μην ξεχνάτε ότι κάθε σωματίδιο του σώματος διαγράφει την ίδια γωνία.

Η **γωνιακή θέση** του άκαμπτου σώματος ορίζεται από τη γωνία θ που σχηματίζει η ευθεία αναφοράς που βρίσκεται στο σώμα με τη σταθερή ευθεία αναφοράς στον χώρο.

- Ως σταθερή ευθεία αναφοράς στον χώρο συχνά επιλέγεται ο άξονας x.

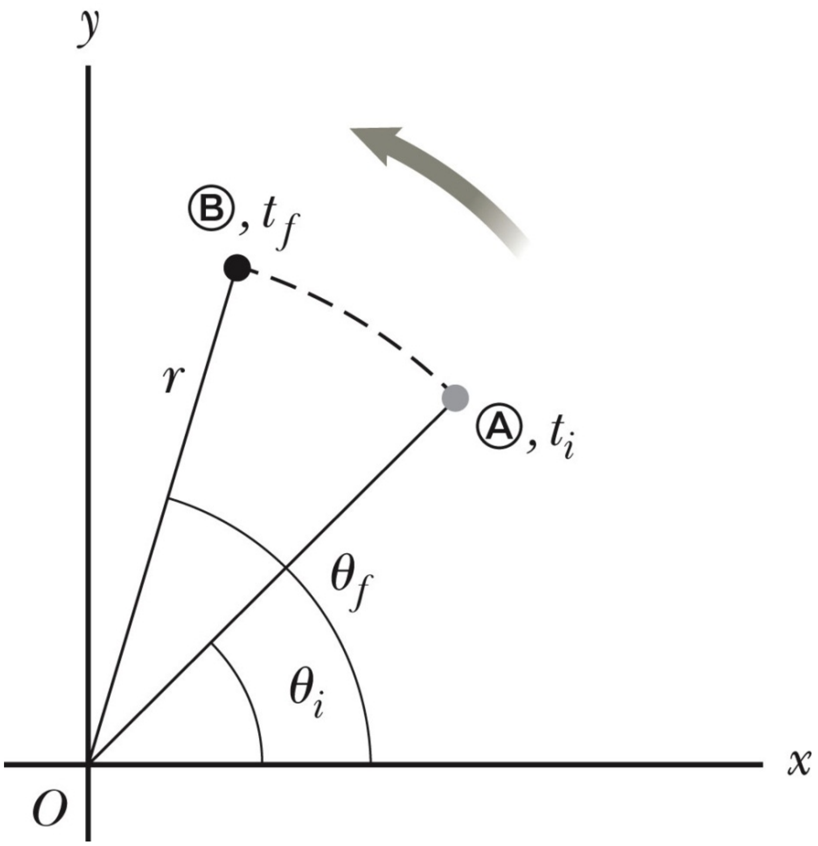
Η γωνία θ παίζει τον ίδιο ρόλο στην περιστροφική κίνηση όπως η θέση x στη μεταφορική κίνηση.

Γωνιακή μετατόπιση

Η *γωνιακή μετατόπιση* ορίζεται ως η γωνία που σαρώνει το σώμα κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος.

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

Αυτή τη γωνία σαρώνει και η ευθεία αναφοράς μήκους *r*.



Μέση γωνιακή ταχύτητα

Το *βαθμωτό μέγεθος της μέσης* γωνιακής ταχύτητας $\omega_{\text{μέση}}$ ενός περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος ορίζεται ως ο λόγος της γωνιακής μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα που απαιτήθηκε για να πραγματοποιηθεί.

$$\omega_{\text{μέση}} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Μέτρο γωνιακής ταχύτητας

Το *βαθμωτό μέγεθος της στιγμιαίας* γωνιακής ταχύτητας, ή *μέτρο γωνιακής ταχύτητας*, ορίζεται ως το όριο του βαθμωτού μεγέθους της μέσης γωνιακής ταχύτητας καθώς το Δt τείνει στο μηδέν.

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι αντίστοιχο με το βαθμωτό μέγεθος της μεταφορικής ταχύτητας (ή μέτρο ταχύτητας).

Οι μονάδες του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας είναι τα ακτίνια/δευτερόλεπτο.

- rad/s ή s^{-1} επειδή τα ακτίνια δεν έχουν διαστάσεις

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι θετικό όταν η γωνία θ αυξάνεται (αριστερόστροφη περιστροφή).

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι αρνητικό όταν η γωνία θ μειώνεται (δεξιόστροφη περιστροφή).

Μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης

Το *βαθμωτό μέγεθος της μέσης γωνιακής επιτάχυνσης* $\alpha_{\text{μέση}}$ ενός σώματος ορίζεται ως ο λόγος της μεταβολής του βαθμωτού μεγέθους της γωνιακής ταχύτητας προς το χρονικό διάστημα στο οποίο συμβαίνει η μεταβολή.

$$\alpha_{\text{μέση}} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Το *βαθμωτό μέγεθος της στιγμιαίας γωνιακής επιτάχυνσης*, ή *μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης*, ορίζεται ως το όριο του βαθμωτού μεγέθους της μέσης γωνιακής επιτάχυνσης καθώς το Δ*t* τείνει στο 0.

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης (*συνέχεια*)

Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης α είναι ανάλογο με το βαθμωτό μέγεθος της μεταφορικής επιτάχυνσης (ή μέτρο επιτάχυνσης).

Οι μονάδες του α είναι τα rad/s² ή s^{-2} επειδή τα ακτίνια δεν έχουν διαστάσεις.

Το α είναι θετικό όταν ένα σώμα που περιστρέφεται αριστερόστροφα επιταχύνει.

Το α είναι επίσης θετικό όταν ένα σώμα που περιστρέφεται δεξιόστροφα επιβραδύνει.

Περιστροφική κίνηση, γενικές σημειώσεις

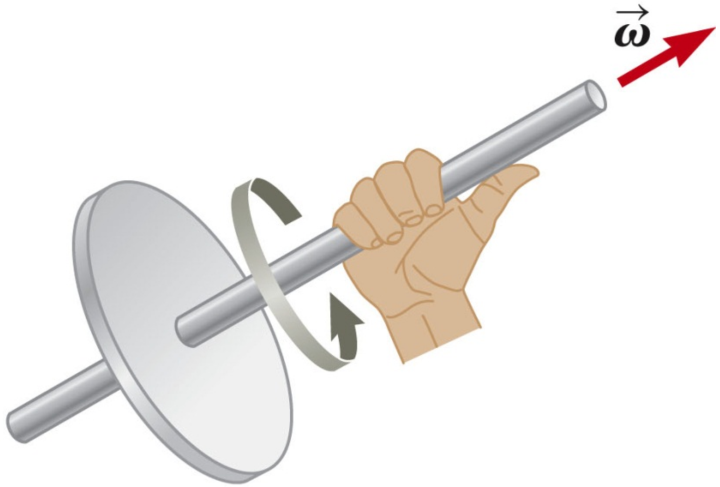
Όταν ένα άκαμπτο σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα, όλα τα σωματίδια του σώματος σαρώνουν την ίδια γωνία σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα και έχουν γωνιακή ταχύτητα ίδιου μέτρου και γωνιακή επιτάχυνση ίδιου μέτρου.

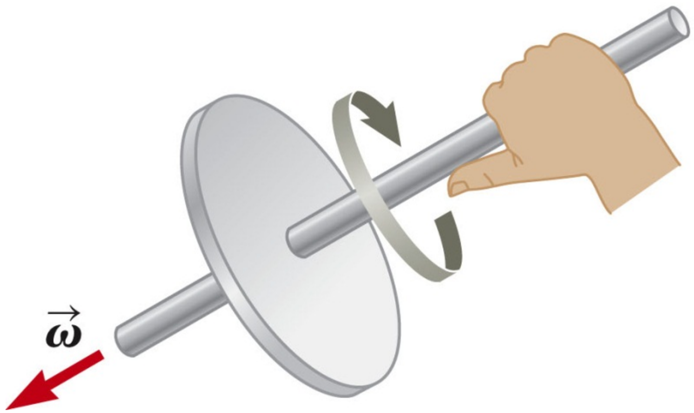
- Άρα τα μεγέθη θ, ω, και α χαρακτηρίζουν τόσο την κίνηση ολόκληρου του άκαμπτου σώματος όσο και των μεμονωμένων σωματιδίων του.

Κατευθύνσεις, λεπτομέρειες

Όπως προαναφέραμε, τα βαθμωτά μεγέθη ω και α είναι τα μέτρα των διανυσμάτων της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης αντίστοιχα.

Οι κατευθύνσεις αυτών των διανυσμάτων δίνονται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.





Υποδείξεις για την επίλυση προβλημάτων

Οι τεχνικές επίλυσης προβλημάτων είναι παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούνται στα προβλήματα μεταφορικής κίνησης.

- Για σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, οι τεχνικές είναι παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούνται για τη σταθερή μεταφορική επιτάχυνση.

Υπάρχουν κάποιες διαφορές που πρέπει να λάβουμε υπόψη.

- Στην περιστροφική κίνηση, πρέπει να ορίσουμε έναν άξονα περιστροφής.
  - Η επιλογή του άξονα είναι αυθαίρετη.
  - Κατά την επίλυση του προβλήματος πρέπει να χρησιμοποιείται πάντα ο άξονας που έχει επιλεγεί.
  - Η επίλυση μερικών προβλημάτων απλοποιείται με την επιλογή ενός φυσικού άξονα.
- Το σώμα επανέρχεται διαρκώς στον αρχικό προσανατολισμό του, οπότε μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των περιστροφών του σώματος.

Περιστροφική κινηματική

Για **σταθερή γωνιακή επιτάχυνση**, μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση του άκαμπτου σώματος χρησιμοποιώντας εξισώσεις της κινηματικής.

- Οι εξισώσεις αυτές είναι παρόμοιες με τις εξισώσεις της κινηματικής για τη μεταφορική κίνηση.
- Οι εξισώσεις της περιστροφικής κίνησης έχουν την ίδια μαθηματική μορφή με τις εξισώσεις της μεταφορικής κίνησης.

Το νέο μοντέλο είναι το **μοντέλο του άκαμπτου σώματος με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση**.

- Είναι αντίστοιχο με το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή επιτάχυνση.

Εξισώσεις της περιστροφικής κινηματικής

Οι εξισώσεις της κινηματικής για το άκαμπτο σώμα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση έχουν την ίδια μαθηματική μορφή με τις εξισώσεις για το σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση.

Οι αντιστοιχίες των μεταβλητών μεταξύ των εξισώσεων της μεταφορικής κίνησης και των εξισώσεων της περιστροφικής κίνησης είναι

- $x \rightarrow \theta$
- $v \rightarrow \omega$
- $a \rightarrow \alpha$

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\left(\theta_f - \theta_i\right)$$

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}\left(\omega_i + \omega_f\right)t$$

όπου η επιτάχυνση α είναι σταθερή

Σύγκριση εξισώσεων περιστροφικής και μεταφορικής κίνησης

ΠΙΝΑΚΑΣ Μ10.1 *Κινηματικές εξισώσεις για την περιστροφική και τη μεταφορική κίνηση*

Άκαμπτο σώμα που κινείται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση	Σωματίδιο που κινείται με σταθερή μεταφορική επιτάχυνση
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

Σχέση μεταξύ γωνιακών και γραμμικών μεγεθών

Κάθε σημείο του περιστρεφόμενου σώματος εκτελεί την ίδια περιστροφική κίνηση, αλλά **όχι** την ίδια μεταφορική κίνηση.

Μετατοπίσεις

- $s = \theta r$

Μέτρα ταχυτήτων

- $v = \omega r$

Μέτρα επιταχύνσεων

- $a = \alpha r$

Μέτρο ταχύτητας – Λεπτομέρειες

Η γραμμική ταχύτητα (velocity) εφάπτεται πάντα στην κυκλική τροχιά.

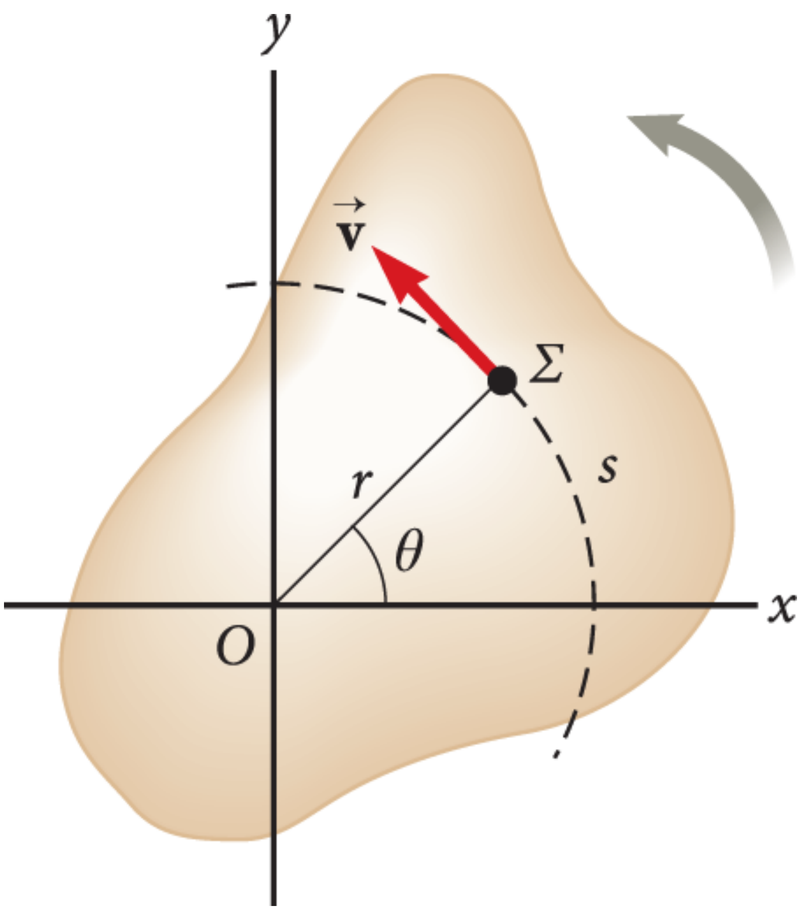
- Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται εφαπτομενική ταχύτητα.

Το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας είναι

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

Επειδή το *r* δεν είναι ίδιο για όλα τα σημεία του σώματος, το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας κάθε σημείου δεν είναι ίδιο.

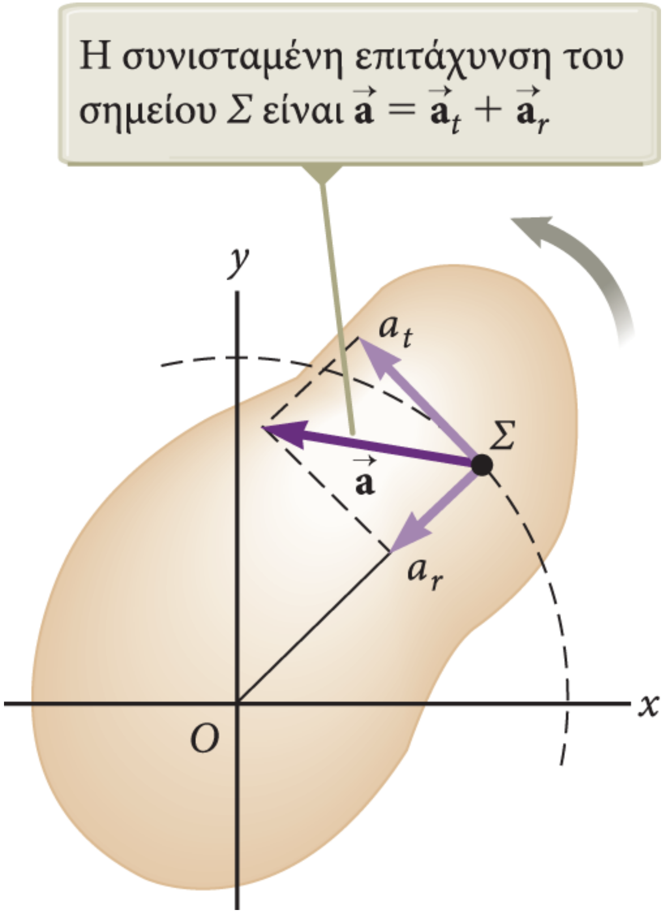
Το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας αυξάνεται όσο αυξάνεται η απόσταση από το κέντρο περιστροφής.



Επιτάχυνση – Λεπτομέρειες

Η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι η παράγωγος της εφαπτομενικής ταχύτητας.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$



CENGAGE Learning

Μέτρο ταχύτητας και επιτάχυνση – Σημείωση

Όλα τα σημεία του άκαμπτου σώματος έχουν γωνιακή ταχύτητα ίδιου μέτρου, αλλά όχι εφαπτομενική ταχύτητα ίδιου μέτρου.

Όλα τα σημεία του άκαμπτου σώματος έχουν ίδια γωνιακή επιτάχυνση, αλλά όχι ίδια εφαπτομενική επιτάχυνση.

Τα εφαπτομενικά μεγέθη εξαρτώνται από την απόσταση r, η οποία δεν είναι ίδια για όλα τα σημεία του σώματος.

Κεντρομόλος επιτάχυνση

Ένα σώμα το οποίο διαγράφει κυκλική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου έχει πάντοτε επιτάχυνση.

- Επομένως, όλα τα σημεία ενός περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος έχουν κεντρομόλο επιτάχυνση.

$$a_C = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

Συνολική επιτάχυνση

Η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης προκαλείται από τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας.

Η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης προκαλείται από τη μεταβολή της κατεύθυνσης.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνολική επιτάχυνση από αυτές τις συνιστώσες:

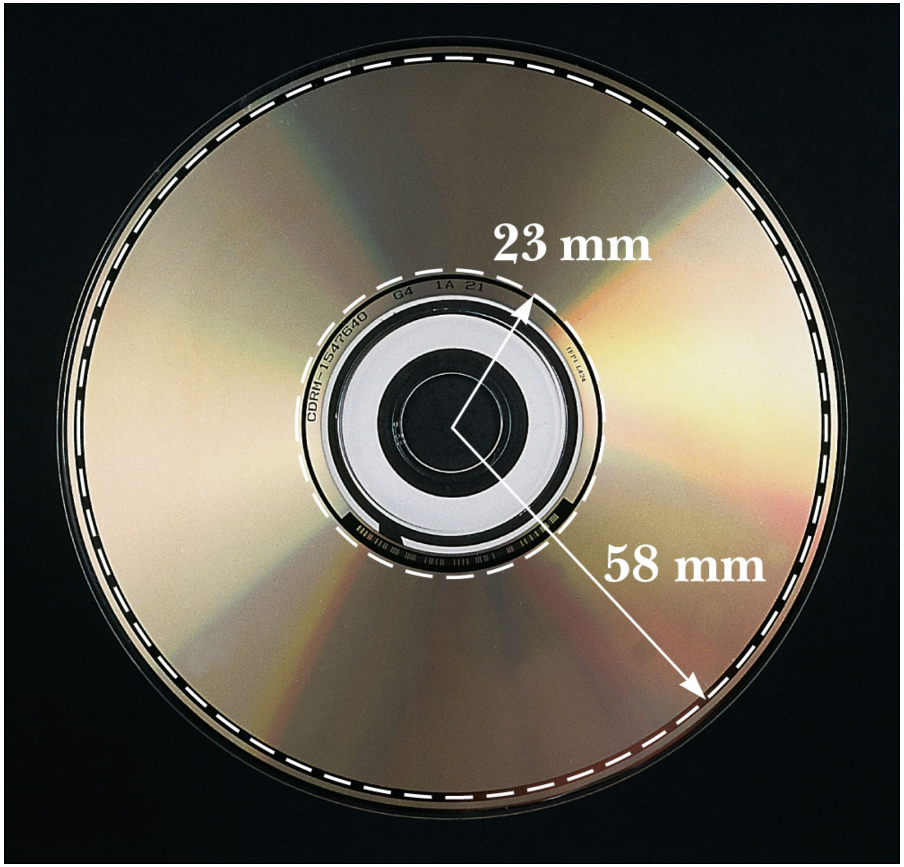
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Παράδειγμα περιστροφικής κίνησης

Για να «διαβάσει» μια συσκευή αναπαραγωγής έναν ψηφιακό δίσκο (CD), το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου πρέπει να μεταβάλλεται έτσι ώστε το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας να παραμένει σταθερό ($v_t = \omega r$).

- Τυπικά, το μέτρο ταχύτητας της επιφάνειας του δίσκου στο σημείο του συστήματος λέιζερ-φακού είναι 1.3 m/s.

Στα εσωτερικά τμήματα του δίσκου, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι μεγαλύτερο από ό,τι στα εξωτερικά.



Κινητική ενέργεια περιστροφής

Ένα σώμα που περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω έχει κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής, παρά το γεγονός ότι μπορεί να μην έχει καθόλου μεταφορική κινητική ενέργεια.

Κάθε σωματίδιο έχει κινητική ενέργεια

- $K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Εφόσον η εφαπτομενική ταχύτητα εξαρτάται από την απόσταση r από τον άξονα περιστροφής, μπορούμε να αντικαταστήσουμε $v_i = \omega_i r$.

Κινητική ενέργεια περιστροφής (*συνέχεια*)

Η συνολική κινητική ενέργεια περιστροφής ενός άκαμπτου σώματος ισούται με το άθροισμα των ενεργειών όλων των σωματιδίων του.

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K_R = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Το μέγεθος *I* ονομάζεται ροπή αδράνειας.

Κινητική ενέργεια περιστροφής (*τελική διαφάνεια*)

Υπάρχει αντιστοιχία ανάμεσα στην κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης ($K = \frac{1}{2}mv^2$) και στην κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης ($K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$).

Η κινητική ενέργεια περιστροφής δεν είναι κάποιο νέο είδος ενέργειας. Η εξίσωσή της έχει διαφορετική μορφή, επειδή η ενέργεια αυτή σχετίζεται με την περιστροφική κίνηση των σωμάτων.

Οι μονάδες της κινητικής ενέργειας περιστροφής είναι τα joule (J).

Ροπή αδράνειας

Η ροπή αδράνειας ορίζεται ως

$$I = \sum_i r_i^2 m_i$$

Οι διαστάσεις της ροπής αδράνειας είναι ML^2 και η μονάδα SI είναι το $kg{\cdot}m^2$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας ενός σώματος πιο εύκολα αν υποθέσουμε ότι αυτό αποτελείται από πολλά στοιχεία μικρής μάζας (ίσης με Δm_i).

Η μάζα είναι εγγενής ιδιότητα ενός σώματος, αλλά η ροπή αδράνειας εξαρτάται από την επιλογή του άξονα περιστροφής.

Η ροπή αδράνειας ενός σώματος είναι ένα μέτρο της τάσης που έχει το σώμα να αντιστέκεται στις μεταβολές της περιστροφικής κίνησής του, ακριβώς όπως η μάζα ενός σώματος είναι ένα μέτρο της τάσης που έχει το σώμα να αντιστέκεται στις μεταβολές της μεταφορικής κίνησής του.

- Η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τη μάζα, αλλά και από την κατανομή της μάζας γύρω από τον άξονα περιστροφής.

Ροπή αδράνειας (*συνέχεια*)

Η ροπή αδράνειας ενός συστήματος μεμονωμένων σωματιδίων μπορεί να υπολογιστεί με απλό τρόπο, από την εξίσωση ορισμού της.

Για ένα συνεχές άκαμπτο σώμα, θεωρούμε ότι το σώμα απαρτίζεται από πολλά μικρά στοιχεία, καθένα με μάζα Δm_i.

Ξαναγράφουμε τη σχέση για τη ροπή αδράνειας *I* συναρτήσει της μάζας Δm.

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

Χρησιμοποιώντας την παραδοχή των στοιχείων μικρού όγκου, παίρνουμε

$$I = \int \rho r^2 dV$$

Αν η πυκνότητα ρ είναι σταθερή, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία του σώματος. Διαφορετικά, πρέπει να γνωρίζουμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η πυκνότητα συναρτήσει της θέσης.

Σημειώσεις για τα διάφορα είδη πυκνότητας

Χωρική πυκνότητα → Μάζα ανά μονάδα όγκου:

$\rho = m/V$

Επιφανειακή πυκνότητα → Μάζα ανά μονάδα επιφάνειας μιας πλάκας σταθερού πάχους, t :

$\sigma = \rho t$

Γραμμική πυκνότητα → Μάζα ανά μονάδα μήκους μιας ράβδου με σταθερό εμβαδόν διατομής:

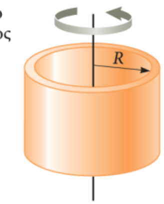
$\lambda = m/L = \rho A$

Ροπές αδράνειας διαφόρων άκαμπτων σωμάτων

ΠΙΝΑΚΑΣ Μ10.2 *Ροπές αδράνειας για ομογενή άκαμπτα σώματα διαφορετικής γεωμετρίας*

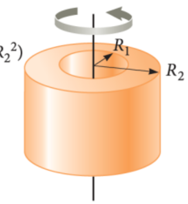
Δακτύλιος ή λεπτό κυλινδρικό κέλυφος

$I_{KM} = MR^2$



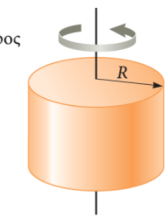
Κοίλος κύλινδρος

$I_{KM} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$



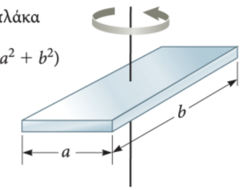
Συμπαγής κύλινδρος ή δίσκος

$I_{KM} = \frac{1}{2}MR^2$



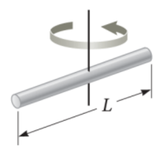
Ορθογώνια πλάκα

$I_{KM} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



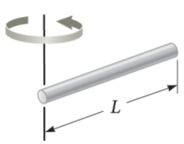
Επιμήκης λεπτή ράβδος με άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο της

$I_{KM} = \frac{1}{12}ML^2$



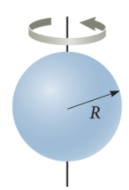
Επιμήκης λεπτή ράβδος με άξονα περιστροφής που διέρχεται από το άκρο της

$I = \frac{1}{3}ML^2$



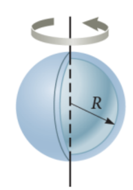
Συμπαγής σφαίρα

$I_{KM} = \frac{2}{5}MR^2$



Λεπτό σφαιρικό κέλυφος

$I_{KM} = \frac{2}{3}MR^2$



Ενότητα Μ10.5

Ροπή αδράνειας ομογενούς άκαμπτης ράβδου

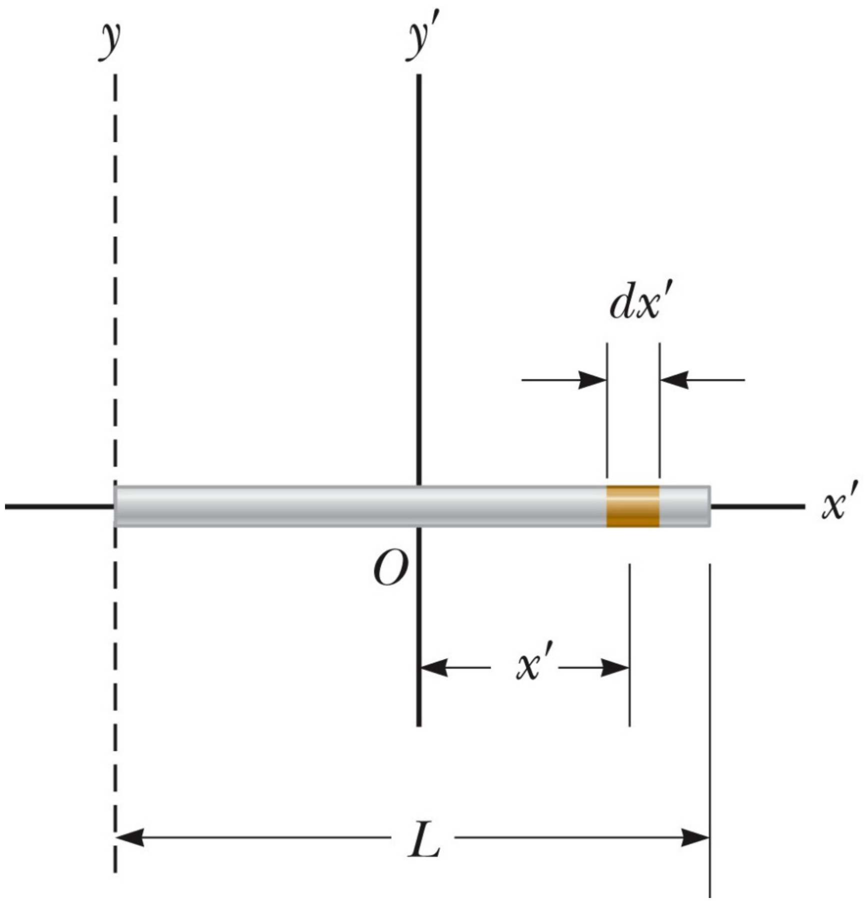
Η σκιασμένη περιοχή έχει μάζα

- $dm = \lambda dx$

Τότε, η ροπή αδράνειας είναι

$$I_y = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx$$

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



Ροπή αδράνειας ομογενούς συμπαγούς κυλίνδρου

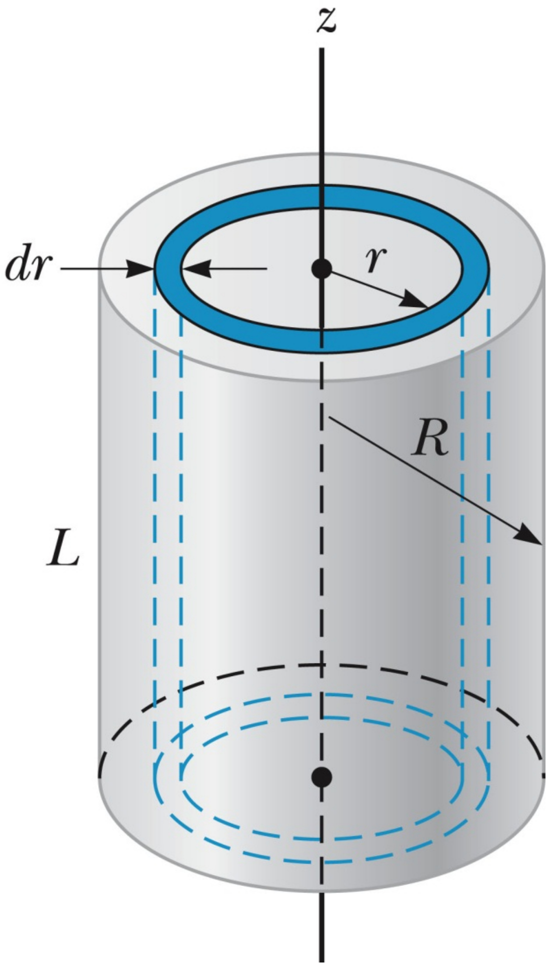
Χωρίζουμε τον κύλινδρο σε ομόκεντρα κελύφη με ακτίνα *r*, πάχος *dr* και μήκος *L*.

$dm = \rho dV = 2\pi(\rho L r)dr$

Τότε, η ροπή αδράνειας *I* είναι

$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 \left(2\pi \rho L r \; dr\right)$$

$$I_z = \frac{1}{2} M R^2$$



Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων

Στα προηγούμενα παραδείγματα, ο άξονας περιστροφής ταυτιζόταν με τον άξονα συμμετρίας του σώματος.

Όταν επιλέγουμε έναν τυχαίο άξονα, συχνά μπορούμε να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας το θεώρημα των παράλληλων αξόνων.

Σύμφωνα με το θεώρημα των παράλληλων αξόνων: $I = I_{KM} + MD^2$.

- I είναι η ροπή αδράνειας ως προς οποιονδήποτε άξονα παράλληλο προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος.
- I_{KM} είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας.
- D είναι η απόσταση του τυχαίου άξονα από τον άξονα του κέντρου μάζας.

Ροπή αδράνειας μιας ράβδου που περιστρέφεται γύρω από το ένα άκρο της – Θεώρημα των παράλληλων αξόνων (παράδειγμα)

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο της είναι

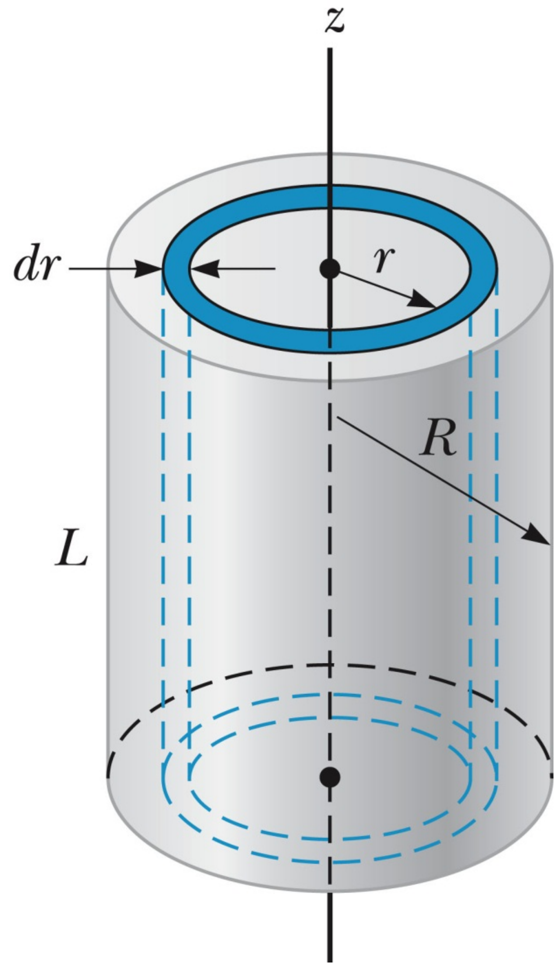
$$I_{\text{KM}} = \frac{1}{12}ML^2$$

Το D είναι ίσο με ½ L.

Άρα,

$$I = I_{\text{KM}} + MD^2$$

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$



Ροπή

Ροπή τ είναι η τάση που έχει μια δύναμη να περιστρέψει ένα σώμα γύρω από κάποιον άξονα.

- Η ροπή είναι διάνυσμα, αλλά εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με το μέτρο της:
- $\tau = rF \sin \phi = Fd$
  - F είναι η δύναμη.
  - ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει η δύναμη με την κάθετο στον άξονα περιστροφής.
  - d είναι ο μοχλοβραχίονας της δύναμης.
- Η ροπή που ασκείται σε ένα σώμα δεν έχει μοναδική τιμή.
  - Η τιμή της εξαρτάται από την επιλογή του άξονα περιστροφής.

Ροπή (*συνέχεια*)

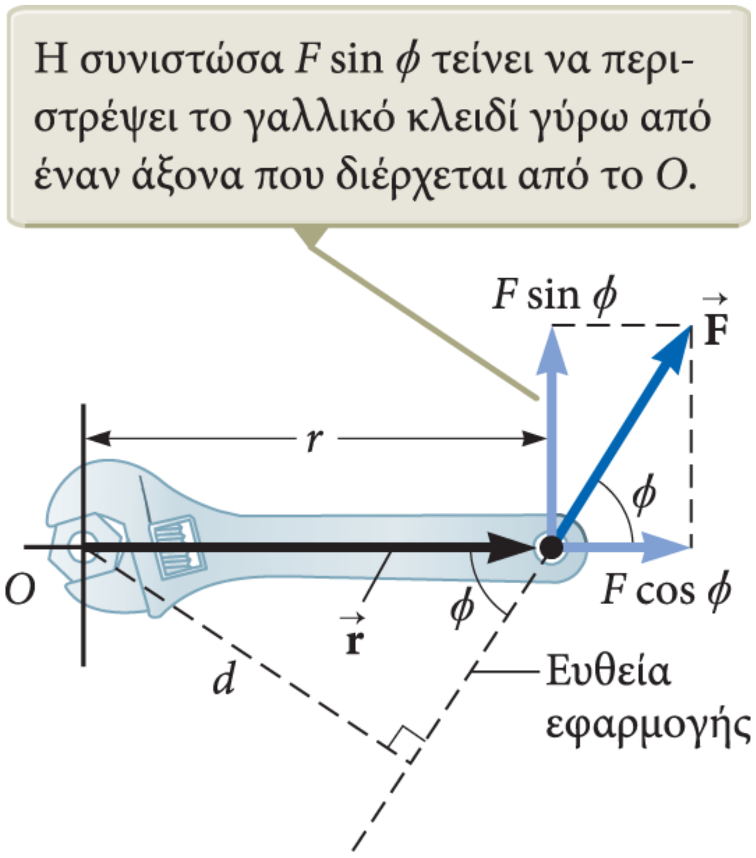
Ο μοχλοβραχίονας *d* είναι η *κάθετη* απόσταση του άξονα περιστροφής από μια ευθεία που εκτείνεται και από τις δύο πλευρές του φορέα της δύναμης.

- $d = r \sin \Phi$

Η συνιστώσα της δύναμης κατά τη διεύθυνση της καθέτου στον άξονα ($F \cos \phi$) δεν τείνει να προκαλέσει περιστροφή.

Η ροπή έχει κατεύθυνση.

- Αν η δύναμη τείνει να περιστρέψει το σώμα αριστερόστροφα, η ροπή είναι θετική.
- Αν η δύναμη τείνει να περιστρέψει το σώμα δεξιόστροφα, η ροπή είναι αρνητική.

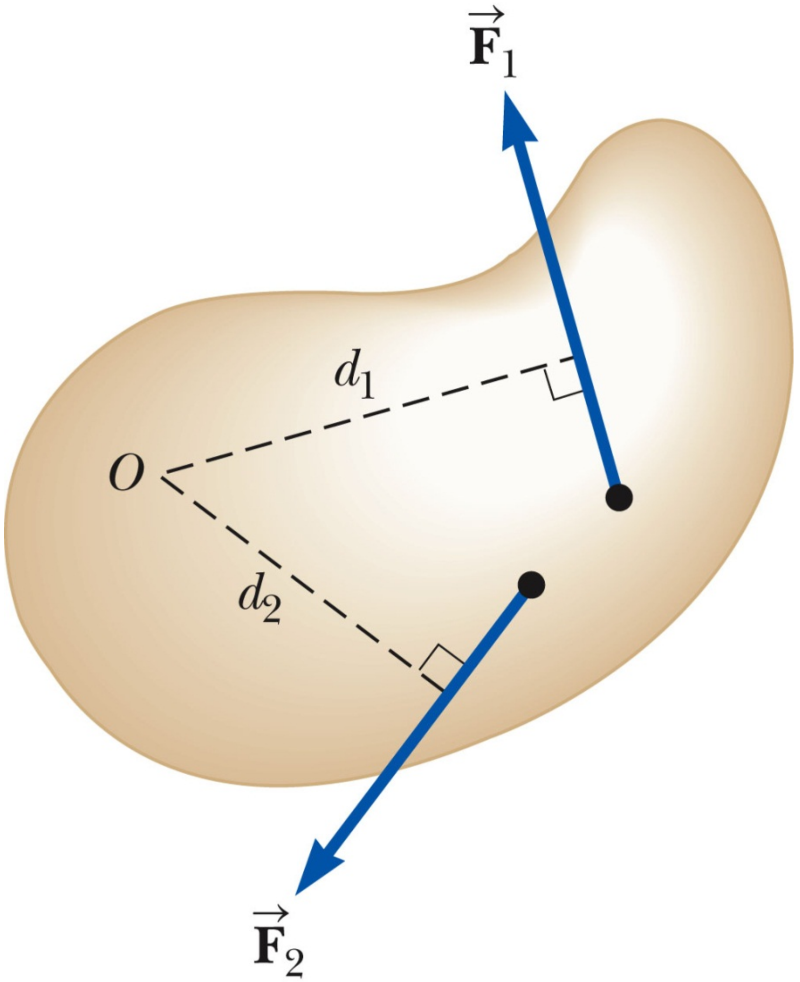


Συνισταμένη ροπή

Η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_1$ τείνει να περιστρέψει το σώμα αριστερόστροφα γύρω από το *O*.

Η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_2$ τείνει να περιστρέψει το σώμα δεξιόστροφα γύρω από το *O*.

$\Sigma\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$



CENGAGE Learning™

Ροπή *και* δύναμη

Οι δυνάμεις μπορούν να προκαλέσουν μεταβολή στη μεταφορική κίνηση.

- Η μεταβολή αυτή περιγράφεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

Οι δυνάμεις μπορούν να προκαλέσουν μεταβολή στην περιστροφική κίνηση.

- Ο βαθμός της μεταβολής εξαρτάται από το μέτρο της δύναμης και από τον μοχλοβραχίονά της.
- Η μεταβολή της περιστροφικής κίνησης εξαρτάται από τη ροπή.

Μονάδες μέτρησης της ροπής

Η μονάδα SI της ροπής είναι το N·m.

- Παρότι η ροπή είναι γινόμενο δύναμης επί απόσταση, διαφέρει σημαντικά από το έργο και την ενέργεια.
- Η ροπή μετριέται σε N·m. Οι μονάδες της δεν μετατρέπονται σε joule.

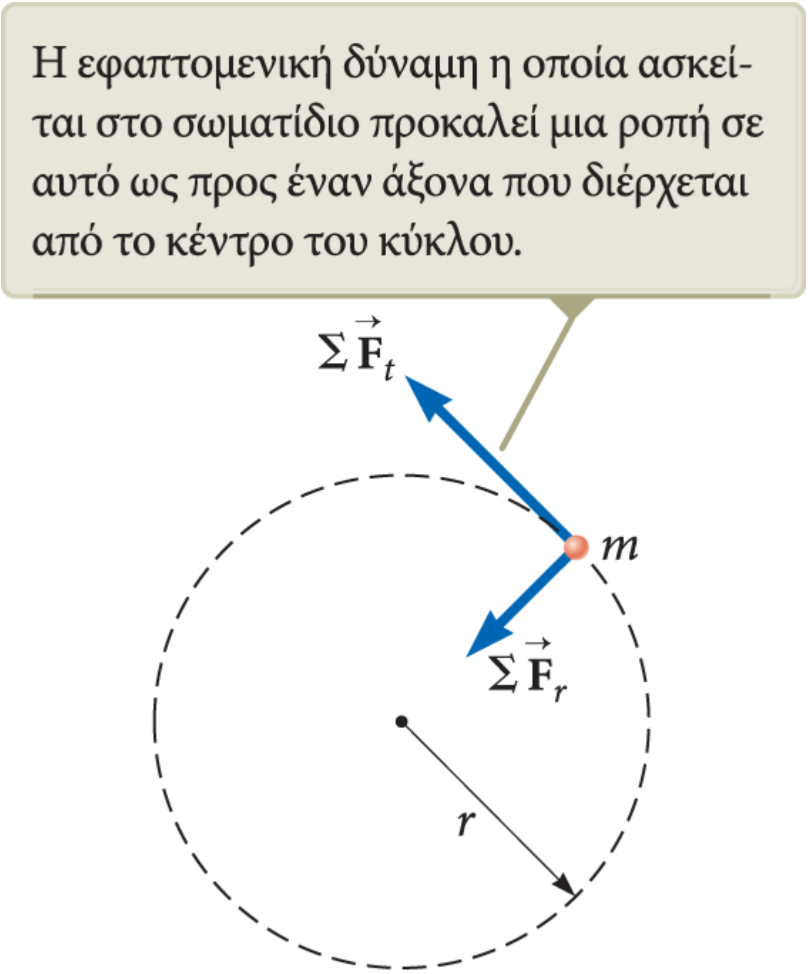
Ροπή και γωνιακή επιτάχυνση

Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας m που διαγράφει κύκλο ακτίνας r υπό την επίδραση μιας εφαπτομενικής δύναμης.

Η εφαπτομενική δύναμη προκαλεί εφαπτομενική επιτάχυνση:

- $F_t = ma_t$

Η ακτινική δύναμη αναγκάζει το σωματίδιο να κινηθεί σε κυκλική τροχιά.



Ροπή και γωνιακή επιτάχυνση, σωματίδιο (*συνέχεια*)

Το μέτρο της ροπής που προκαλεί η $\sum \vec{\mathbf{F}}_t$ σε ένα σωματίδιο ως προς έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του κύκλου είναι

- $\Sigma\tau = \Sigma F_t r = (ma_t)r$

Το μέτρο της εφαπτομενικής επιτάχυνσης συνδέεται με το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης μέσω της σχέσης

- $\Sigma\tau = (ma_t)r = (mr\alpha)r = (mr^2)\,\alpha$

Εφόσον mr^2 είναι η ροπή αδράνειας του σωματιδίου,

- $\Sigma\tau = I\alpha$
- Το μέτρο της ροπής είναι ανάλογο προς το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης και η σταθερά αναλογίας είναι η ροπή αδράνειας.

Ροπή και γωνιακή επιτάχυνση, επέκταση

Θεωρήστε ότι το σώμα αποτελείται από άπειρο πλήθος στοιχείων μάζας *dm* με απειροστό μέγεθος.

Κάθε στοιχείο μάζας διαγράφει κύκλο γύρω από την αρχή των συντεταγμένων *O*.

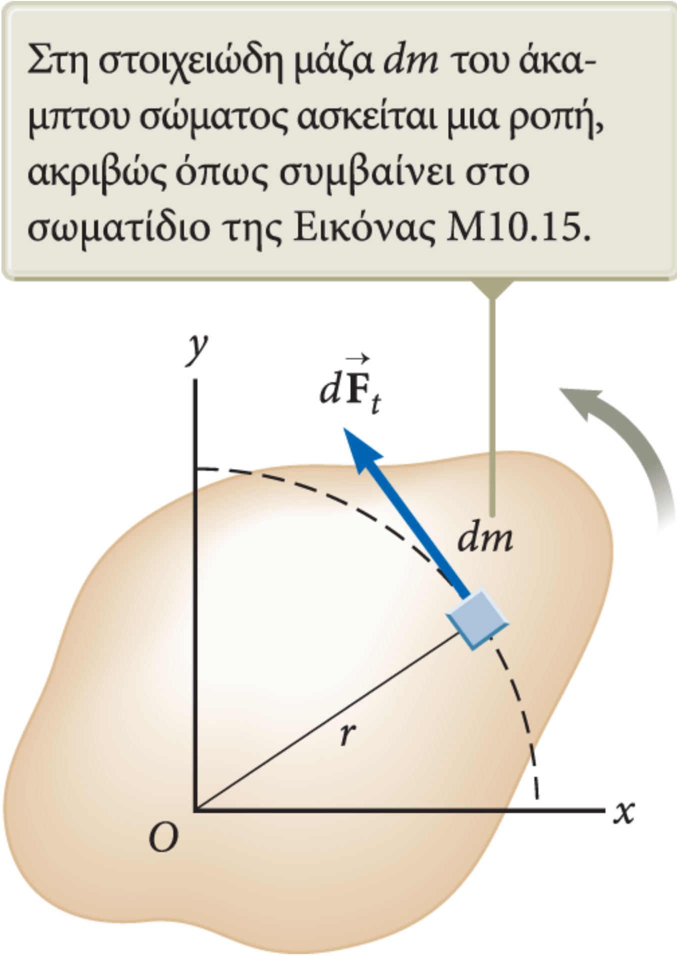
Κάθε στοιχείο μάζας έχει εφαπτομενική επιτάχυνση.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

- $dF_t = (dm)a_t$

Από τη ροπή που προκαλεί η δύναμη και από τη γωνιακή επιτάχυνση, προκύπτει ότι

- $d\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = rdF_t = a_t r dm = \alpha r^2 dm$



Ροπή και γωνιακή επιτάχυνση, επέκταση (*συνέχεια*)

Η συνολική ροπή είναι

- $\sum \tau_{\text{εξωτ.}} = \int \alpha r^2 dm = \alpha \int r^2 dm$
- Αυτή η σχέση γίνεται $\Sigma\tau = I\alpha$.

Πρόκειται για την ίδια σχέση την οποία χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση του σωματιδίου.

Είναι η μαθηματική αναπαράσταση του μοντέλου ανάλυσης ενός **άκαμπτου σώματος υπό την επίδραση ροπής**.

Η σχέση ισχύει επίσης όταν οι δυνάμεις έχουν ακτινικές συνιστώσες.

- Η ευθεία εφαρμογής (φορέας) των ακτινικών συνιστωσών πρέπει να διέρχεται από τον άξονα περιστροφής.
- Αυτές οι συνιστώσες προκαλούν μηδενική ροπή ως προς τον συγκεκριμένο άξονα.

Πτώση καμινάδας – Παράδειγμα

Όταν καταρρέει μια ψηλή καμινάδα, συχνά σπάει σε κάποιο σημείο της πριν καν φτάσει στο έδαφος.

Κατά την πτώση της καμινάδας, κάθε ψηλότερο τμήμα της έχει μεγαλύτερη εφαπτομενική επιτάχυνση συγκριτικά με τα τμήματα που βρίσκονται χαμηλότερα.

Στα ψηλότερα σημεία της καμινάδας, η εφαπτομενική επιτάχυνση προκαλεί διατμητική τάση μεγαλύτερη από τη διατμητική αντοχή της καμινάδας.

Έτσι, η καμινάδα σπάει.

Ροπή και γωνιακή επιτάχυνση – Το παράδειγμα του τροχού

Σε αυτό το παράδειγμα πρέπει να εφαρμόσουμε δύο μοντέλα ανάλυσης:

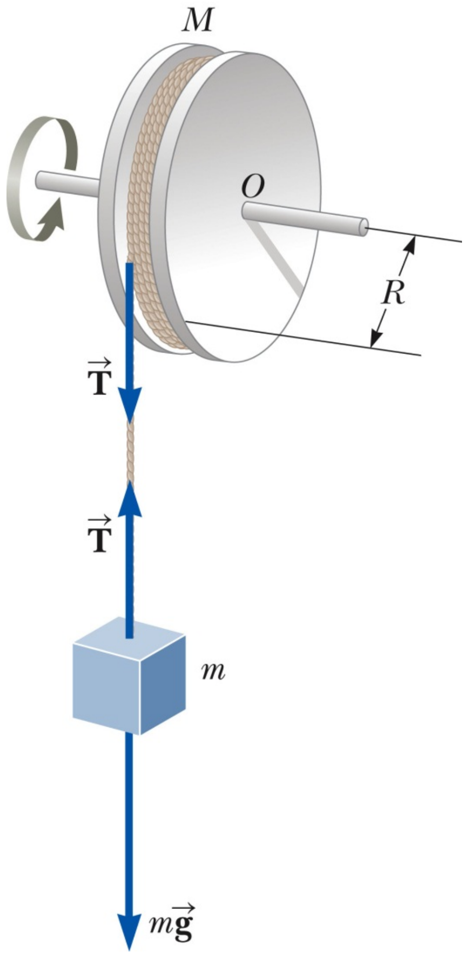
- Το σώμα μοντελοποιείται ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης.
- Ο τροχός μοντελοποιείται ως άκαμπτο σώμα υπό την επίδραση ροπής.

Εφόσον ο τροχός περιστρέφεται, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση $\Sigma\tau = I\alpha$.

- Η τάση παρέχει την εφαπτομενική δύναμη.

Η μάζα κινείται ευθύγραμμα, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

- $\Sigma F_y = ma_y = mg - T$



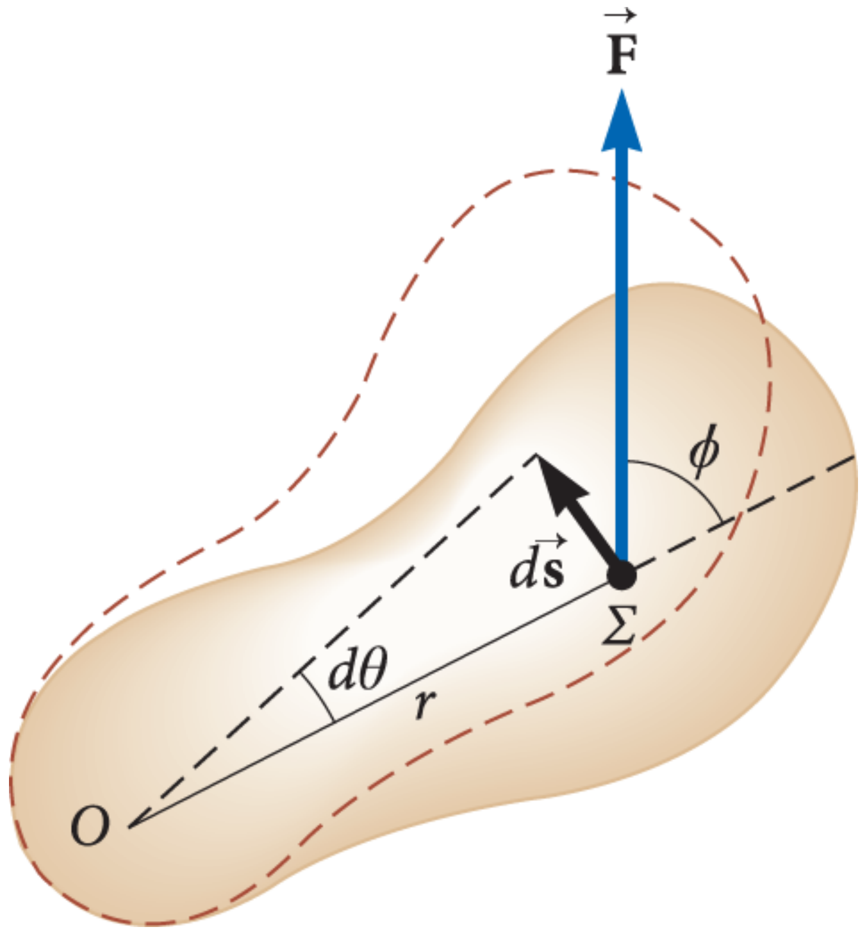
Το έργο στην περιστροφική κίνηση

Βρείτε το έργο που παράγει στο σώμα το διάνυσμα $\vec{\mathbf{F}}$ καθώς το σώμα περιστρέφεται κατά απειροστή απόσταση $ds = r\,d\theta$.

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

$$= \left(F \sin\phi\right) r\,d\theta$$

Η ακτινική συνιστώσα της δύναμης δεν παράγει έργο επειδή είναι κάθετη προς τη μετατόπιση.



CENGAGE Learning™

Η ισχύς στην περιστροφική κίνηση

Ο ρυθμός παραγωγής έργου σε χρονικό διάστημα *dt* είναι

$$\text{Ισχύς} = P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

Η εξίσωση είναι αντίστοιχη με τη σχέση $P = Fv$ για ένα γραμμικό σύστημα.

Το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας στην περιστροφική κίνηση

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για την περιστροφική κίνηση, *το συνολικό έργο που παράγεται από εξωτερικές δυνάμεις κατά την περιστροφή ενός συμμετρικού άκαμπτου σώματος γύρω από έναν σταθερό άξονα ισούται με τη μεταβολή στην ενέργεια περιστροφής του σώματος*.

$$\sum W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega \, d\omega = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2$$

Το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας, γενικά

Συνδυάζοντας το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για την περιστροφική κίνηση με το αντίστοιχο θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για τη μεταφορική κίνηση, συμπεραίνουμε ότι *το συνολικό έργο που παράγουν οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή στη* ***συνολική*** *κινητική ενέργεια του σώματος, η οποία είναι ίση με το άθροισμα της μεταφορικής και της περιστροφικής κινητικής ενέργειάς του*.

Χρήσιμες εξισώσεις – Σύνοψη

ΠΙΝΑΚΑΣ M10.3 *Χρήσιμες σχέσεις στην περιστροφική και στη μεταφορική κίνηση*

Περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα	**Μεταφορική κίνηση**
Μέτρο γωνιακής ταχύτητας $\omega = d\theta/dt$	Μέτρο μεταφορικής ταχύτητας $v = dx/dt$
Μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης $\alpha = d\omega/dt$	Μέτρο μεταφορικής επιτάχυνσης $a = dv/dt$
Μέτρο συνισταμένης ροπής $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau} = I\alpha$	Μέτρο συνισταμένης δύναμης $\Sigma F = ma$
Αν $\alpha =$ σταθερό $\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$	Αν $a =$ σταθερό $\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$
Έργο $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, d\theta$	Έργο $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$
Κινητική ενέργεια $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	Κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2}mv^2$
Ισχύς $P = \tau\omega$	Ισχύς $P = Fv$
Στροφορμή $L = I\omega$	Ορμή $p = mv$
Μέτρο συνισταμένης ροπής $\Sigma\tau = dL/dt$	Μέτρο συνισταμένης δύναμης $\Sigma F = dp/dt$

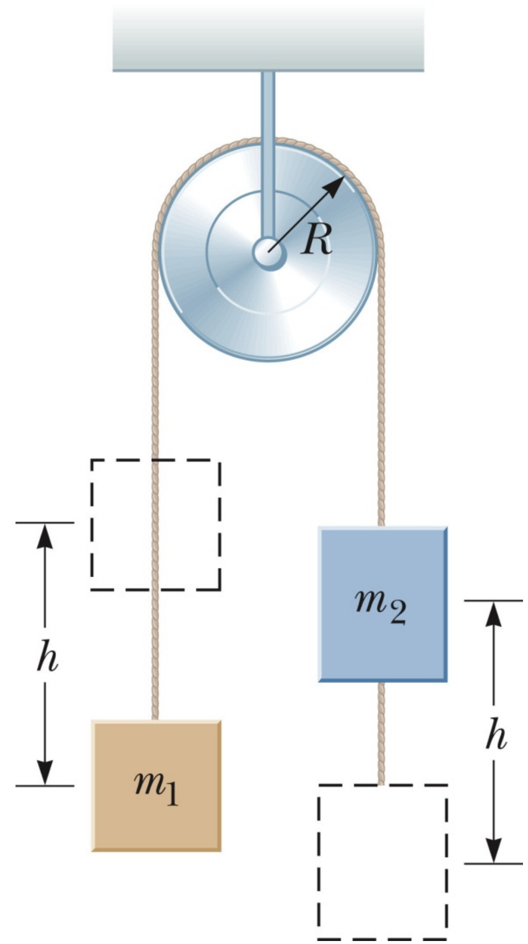
Η ενέργεια και η μηχανή του Atwood – Παράδειγμα

Το σύστημα που αποτελείται από τους δύο κύβους, την τροχαλία, και τη Γη είναι ένα απομονωμένο ως προς την ενέργεια σύστημα, στο οποίο δεν δρουν μη συντηρητικές δυνάμεις.

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.

Η κινητική ενέργεια της μεταφορικής κίνησης των κύβων και η βαρυτική δυναμική ενέργειά τους μεταβάλλονται.

Η κινητική ενέργεια περιστροφής τής τροχαλίας μεταβάλλεται.



CENGAGE Learning

Κυλιόμενο σώμα

Η κόκκινη καμπύλη δείχνει την τροχιά που διαγράφει ένα σημείο που βρίσκεται στην περιφέρεια του σώματος.

- Η τροχιά αυτή ονομάζεται ***κυκλοειδής καμπύλη***.

Η πράσινη ευθεία δείχνει την τροχιά που ακολουθεί το κέντρο μάζας του σώματος.

Στην περίπτωση που το σώμα εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση, η περιστροφική και τη μεταφορική κίνησή του συνδέονται με μια απλή σχέση.

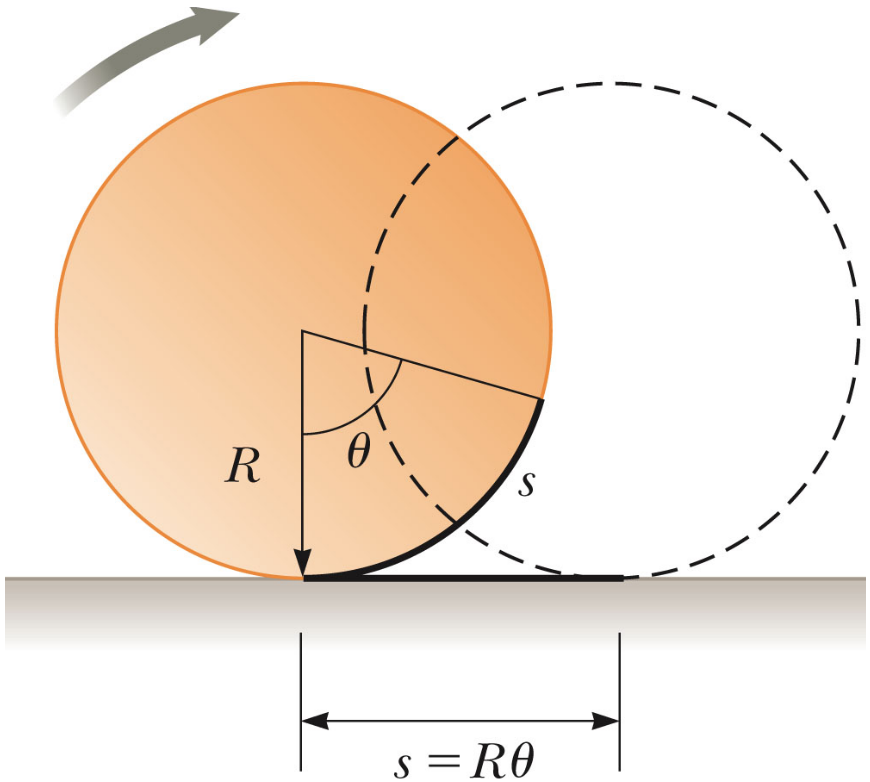
Κύλιση χωρίς ολίσθηση, κέντρο μάζας του σώματος

Η μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας έχει μέτρο

$$v_{KM} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

Η μεταφορική επιτάχυνση του κέντρου μάζας έχει μέτρο

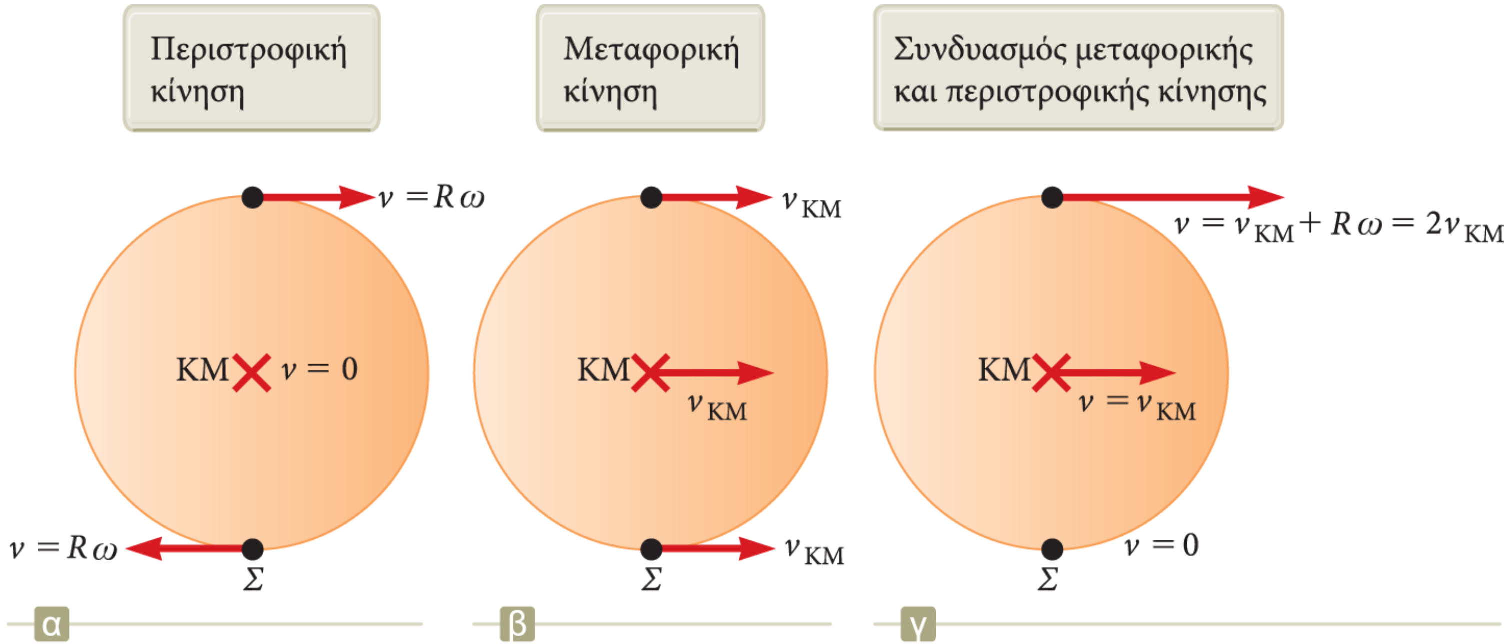
$$a_{KM} = \frac{dv_{KM}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$



Κύλιση, (*συνέχεια*)

Η κίνηση ενός κυλιόμενου σώματος μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένας συνδυασμός μετατόπισης και περιστροφής.

Το σημείο επαφής μεταξύ της επιφάνειας και του κυλίνδρου έχει μεταφορική ταχύτητα μηδενικού μέτρου (γ).



Συνολική κινητική ενέργεια ενός κυλιόμενου σώματος

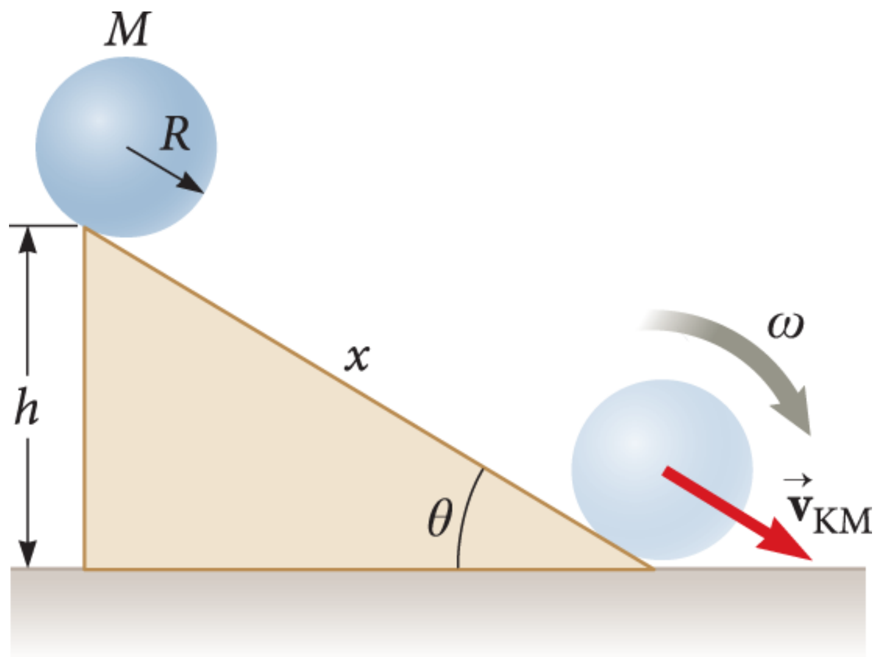
Η συνολική κινητική ενέργεια ενός κυλιόμενου σώματος ισούται με την κινητική ενέργεια της μετατόπισης του κέντρου μάζας του συν την κινητική ενέργεια της περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας του.

- $K = ½I_{KM}\omega^2 + ½Mv_{KM}^2$
  - Ο όρος $½I_{KM}\omega^2$ αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια του κυλίνδρου λόγω της περιστροφικής κίνησής του γύρω από το κέντρο μάζας του.
  - Ο όρος $½Mv^2$ αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια του κυλίνδρου λόγω της μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας του.

Συνολική κινητική ενέργεια – Παράδειγμα

Η επιταχυνόμενη κύλιση είναι εφικτή μόνο αν υπάρχει δύναμη τριβής μεταξύ της σφαίρας και του επιπέδου.

- Η τριβή παράγει την απαιτούμενη ροπή για την περιστροφή.
- Δεν υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας επειδή το σημείο επαφής είναι ακίνητο ως προς την επιφάνεια σε κάθε χρονική στιγμή.
- Στην πραγματικότητα, η τριβή κύλισης προκαλεί μετατροπή μηχανικής ενέργειας σε εσωτερική ενέργεια.
  - Η τριβή κύλισης προκαλείται από τις παραμορφώσεις της επιφάνειας και του κυλιόμενου σώματος.



Συνολική κινητική ενέργεια – Παράδειγμα (*συνέχεια*)

Εφαρμόστε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

- Έστω ότι $U = 0$ στη βάση του επιπέδου
- $K_f + U_f = K_i + U_i$
- $K_f = \frac{1}{2}(I_{KM}/R^2)v_{KM}^2 + \frac{1}{2}Mv_{KM}^2 \qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{KM}}{R^2} + M\right)v_{KM}^2$
- $U_i = Mgh$
- $U_f = K_i = 0$

Λύστε ως προς *v*

$$v_{KM} = \left[\frac{2gh}{1 + \left(I_{KM}/MR^2\right)}\right]^{1/2}$$

Κύλιση σφαίρας σε κεκλιμένο επίπεδο – Παράδειγμα

Μοντελοποίηση

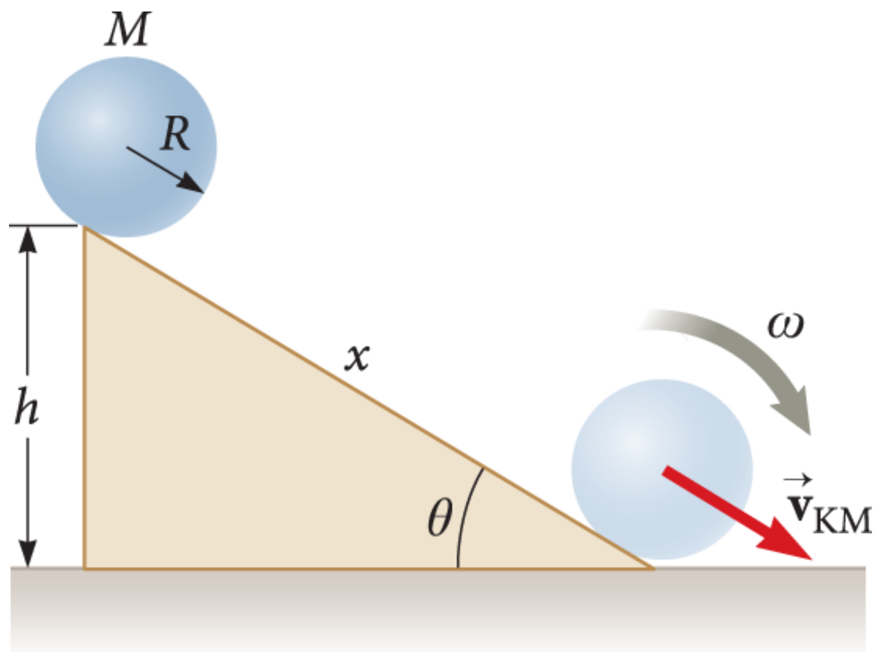
- Μια σφαίρα κυλάει σε ένα κεκλιμένο επίπεδο.

Κατηγοριοποίηση

- Μοντελοποιήστε τη σφαίρα και τη Γη ως απομονωμένο σύστημα ως προς την ενέργεια.
- Στο σύστημα δεν δρουν μη συντηρητικές δυνάμεις.

Ανάλυση

- Χρησιμοποιήστε την εξίσωση διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να βρείτε το μέτρο *v* της ταχύτητας.



CENGAGE Learning

Κύλιση σφαίρας σε κεκλιμένο επίπεδο – Παράδειγμα (*συνέχεια*)

Ανάλυση, (*συνέχεια*)

- Λύστε ως προς την επιτάχυνση του κέντρου μάζας.

Ολοκλήρωση

- Το μέτρο της ταχύτητας και το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας είναι ανεξάρτητα από τη μάζα και την ακτίνα της σφαίρας.

Γενίκευση

- *Όλες οι ομογενείς συμπαγείς σφαίρες αναπτύσσουν επιτάχυνση ίδιου μέτρου και ταχύτητα ίδιου μέτρου σε ένα συγκεκριμένο κεκλιμένο επίπεδο.*
  - Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν για σώματα με διαφορετικά σχήματα.