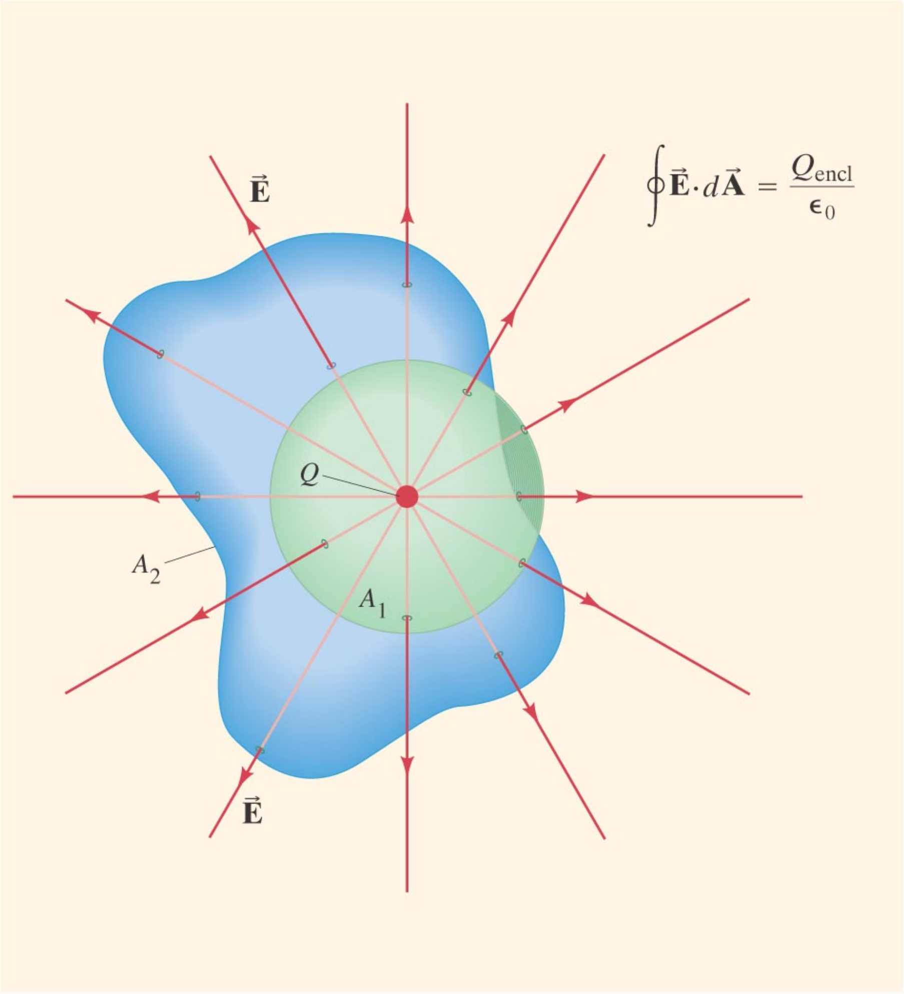
Κεφάλαιο 22
Νόμος του Gauss



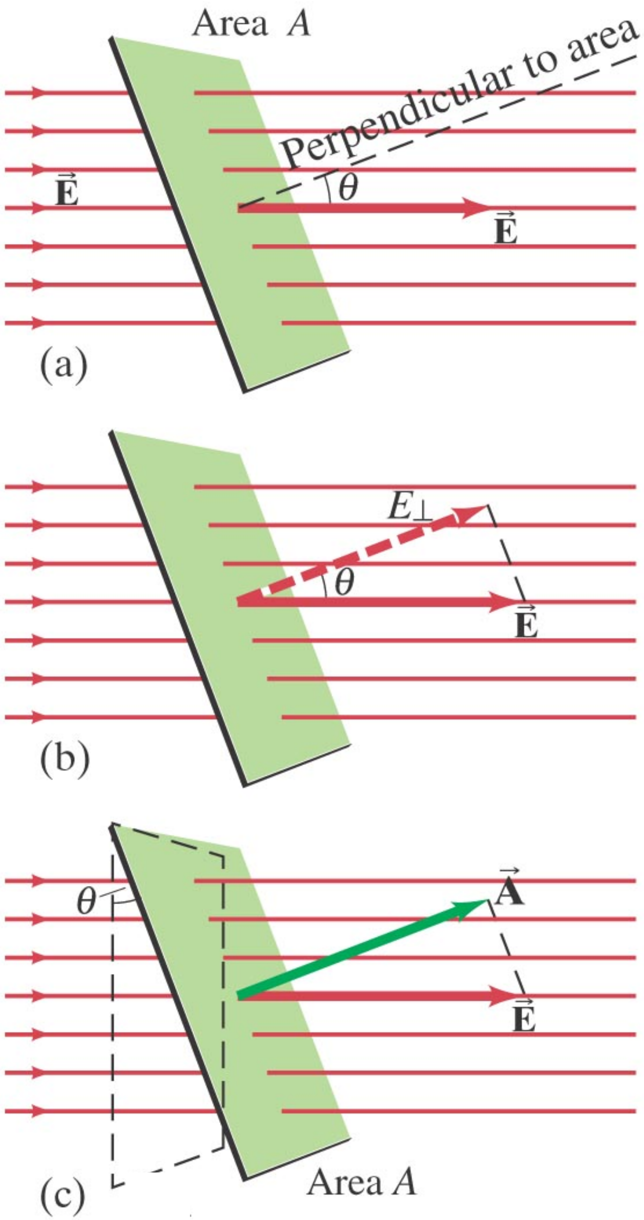
Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

Περιεχόμενα Κεφαλαίου 22

- Ηλεκτρική Ροή
- Ο Νόμος του Gauss
- Εφαρμογές του Νόμου του Gauss
- Πειραματικές επιβεβαιώσεις για τους Νόμους των Gauss και Coulomb

Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

22-1 Ηλεκτρική Ροή



Ηλεκτρική Ροή:

$$\Phi_E = E_\perp A = E A_\perp = EA\cos\theta, \qquad [\vec{\mathbf{E}} \text{ uniform}]$$

$$\Phi_E = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}}. \qquad [\vec{\mathbf{E}} \text{ uniform}]$$

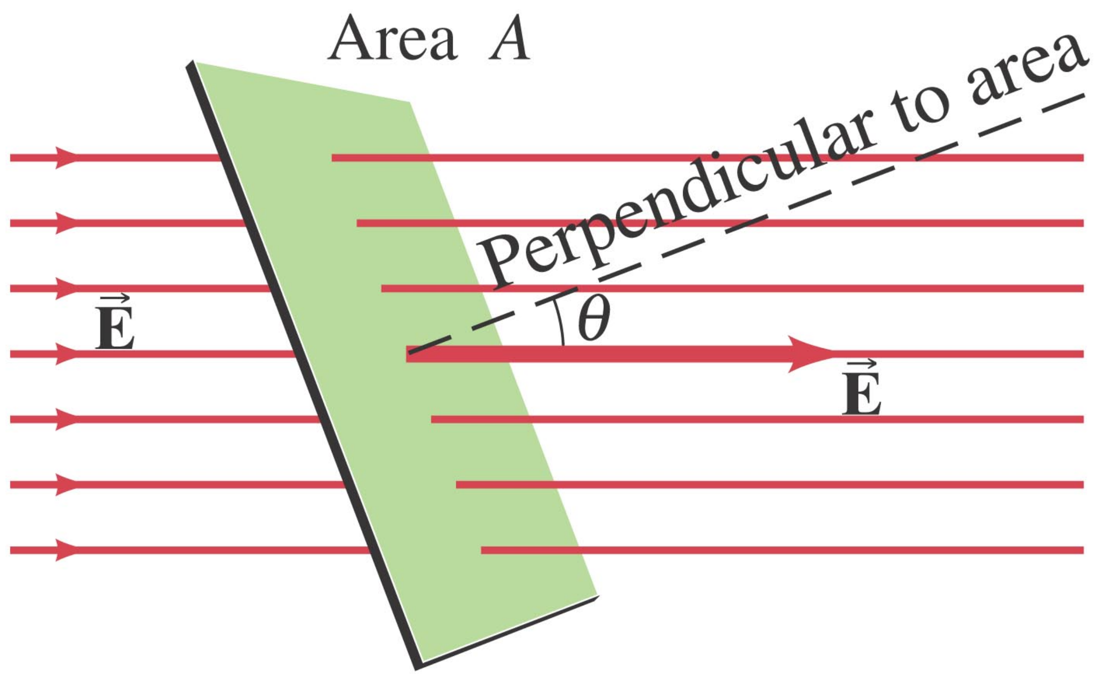
Η Ηλεκτρική Ροή είναι ανάλογη με τον αριθμό των ηλεκτρικών γραμμών που διέρχονται μέσα από μια επιφάνεια.

Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

22-1 Ηλεκτρική Ροή

Βρείτε την ηλεκτρική ροή μέσα από ένα παραλληλόγραμμο διαστάσεων 10 cm επί 20 cm. Το πεδίο είναι ομογενές με ένταση 200 N/C, και η γωνία θ είναι 30°.

ΛΥΣΗ



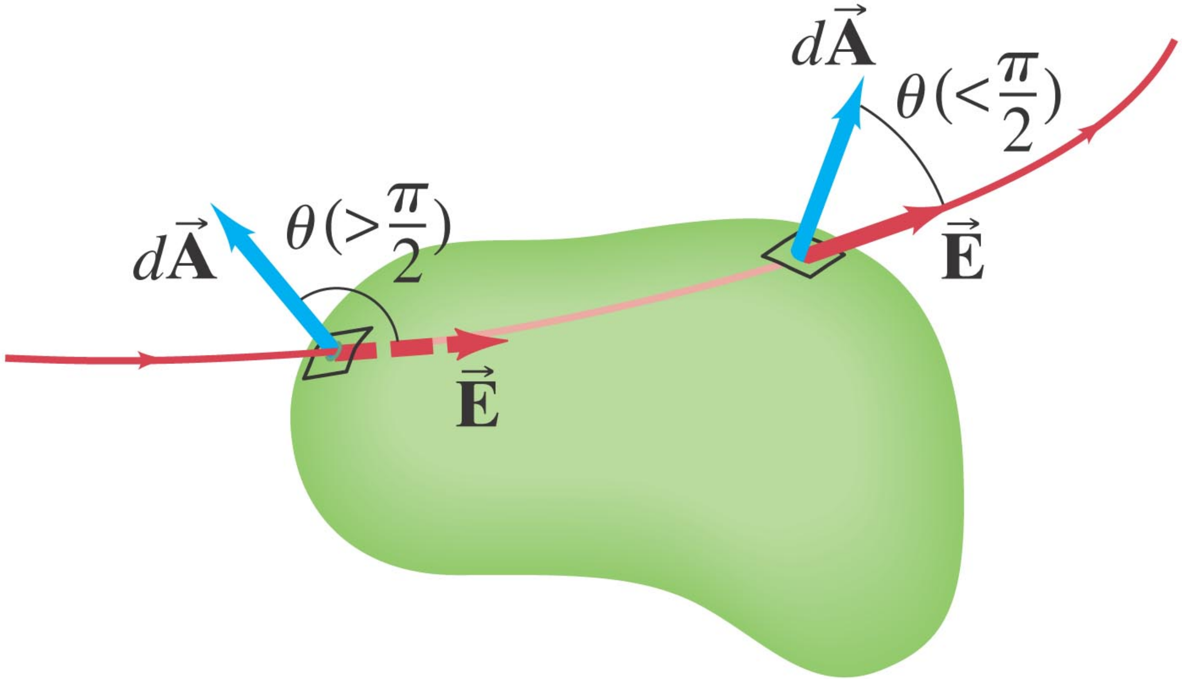
Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

22-1 Ηλεκτρική Ροή

Η ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι:

$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}_i .$$

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}.$$



Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

22-2 Ο Νόμος του Gauss

Ο Νόμος του Gauss: Ο συνολικός αριθμός των ηλεκτρικών γραμμών που περνούν από μια επιφάνεια (*ηλεκτρ κή ροή*) είναι ανάλογη με το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που είναι εγκλωβισμένο από την επιφάνεια:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0}.$$

Για περιπτώσεις με υψηλή συμμετρία ο νόμος αυτός μας διευκολύνει στην εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου.

Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

22-2 Ο Νόμος του Gauss

Για σημειακό φορτίο (Νόμος Coulomb),

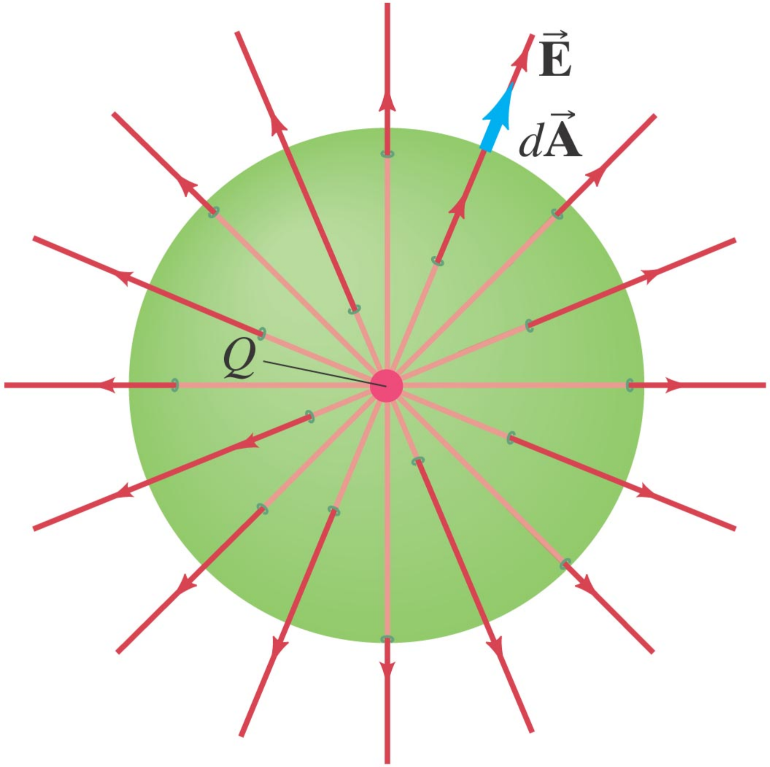
$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E\,dA = E\oint dA = E(4\pi r^2).$$

Επομένως

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(4\pi r^2).$$

Εάν λύσουμε E βρίσκουμε το νόμο του:

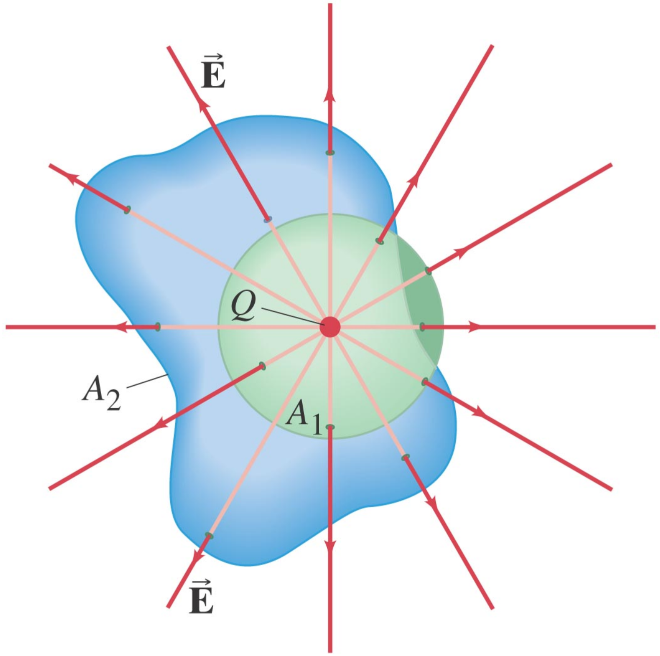
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$



Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

22-2 Ο Νόμος του Gauss

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Coulomb υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα του πεδίου ενός σημειακού φορτίου για επιφάνεια A_1 που περικλείει το φορτίο :



$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Βλέπουμε ότι για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια A_2, που περικλείει το φορτίο, η ροή είναι ίδια με αυτήν της A_1, και **επομένως το αποτέλεσμα είναι γενικό.**

Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

22-2 Ο Νόμος του Gauss

Για πολλά σημειακά φορτία επεκτείνουμε το αποτέλεσμα και βρίσκουμε :

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint \left(\Sigma \vec{\mathbf{E}}_i\right) \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \Sigma \frac{Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0}.$$

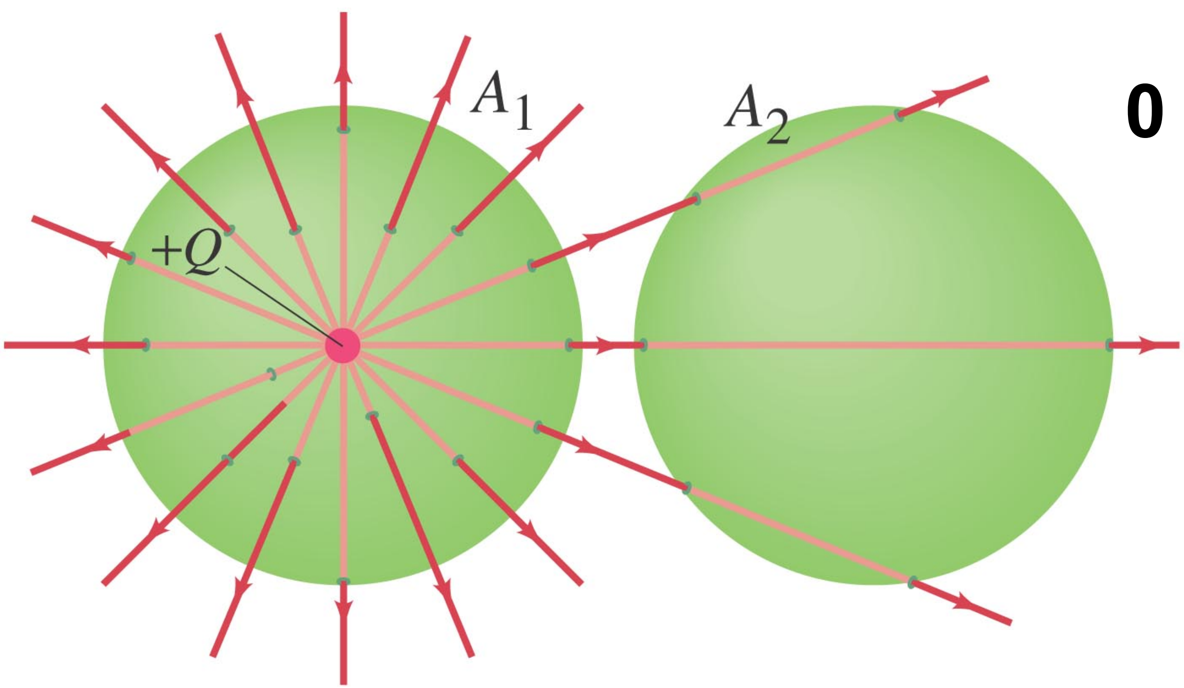
Επομένως ο Νόμος του Gauss ισχύει για οποιαδήποτε κατανομή φορτίου. ΠΡΟΣΟΧΗ, απευθυνόμαστε πάντα στο πεδίο που δημιουργούν τα φορτία που βρίσκονται μέσα στην επιφάνεια. ***Φορτ α εκτός επ φάνε ας επ σης θα συνε σφέρουν στο συνολ κό πεδ ο.***

Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

22-2 Ο Νόμος του Gauss

Θεωρείστε δύο επιφάνειας Gauss, A_1 και A_2, του σχήματος. Το μοναδικό φορτίο είναι το Q στο κέντρο της επιφάνειας A_1. Ποια είναι η συνολική ροή μέσα από τις δύο επιφάνειες;

Q/ε_0

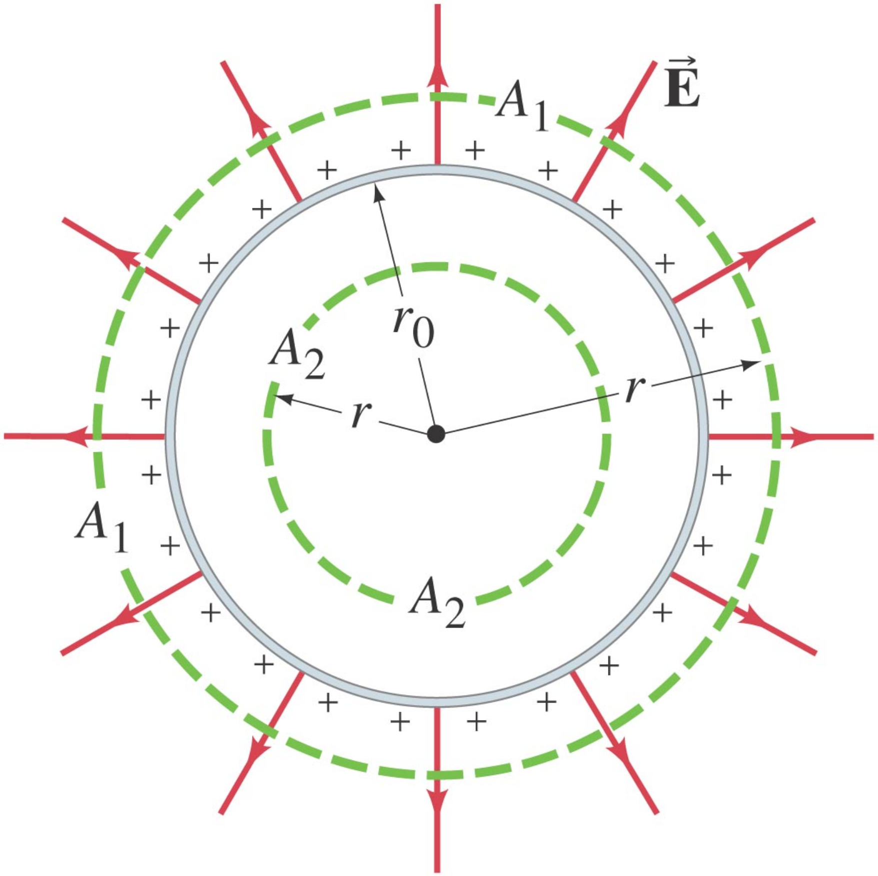


0

Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

22-3 Εφαρμογές του Νόμου του Gauss

Ένας λεπτός σφαιρικός φλοιός με ακτίνα r_0 έχει συνολικό φορτίο Q κατανεμημένο ομοιόμορφα. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία (α) εκτός του φλοιού, (β) εντός του φλοιού (γ) τι θα συνέβαινε εάν ο φλοιός ήταν μεταλλικός

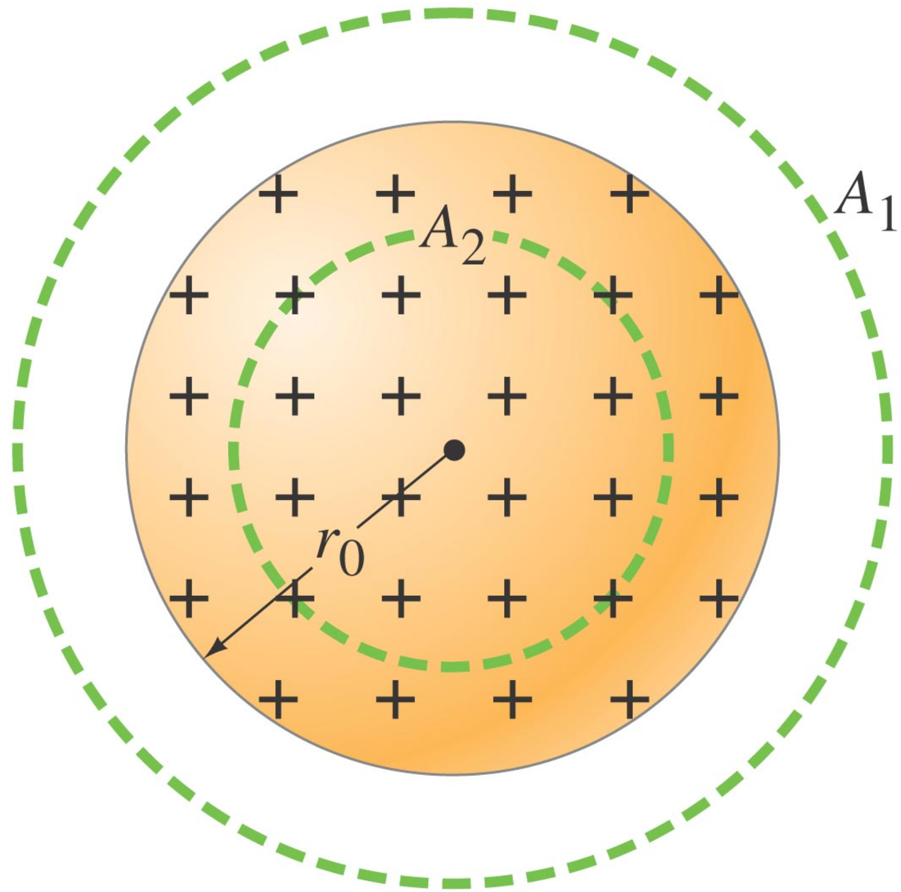


ΛΥΣΗ

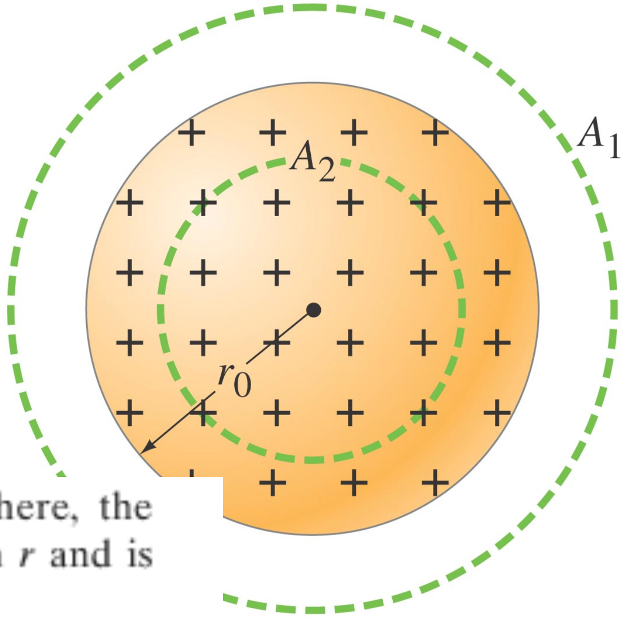
Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

22-3 Εφαρμογές του Νόμου του Gauss

Ηλεκτρικό φορτίο Q είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα σε διηλεκτρική σφαίρα (μονωτής) με ακτίνα r_0. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο (α) εκτός της σφαίρας ($r > r_0$) και (β) εντός της σφαίρας ($r < r_0$).



Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.



APPROACH Since the charge is distributed symmetrically in the sphere, the electric field at all points must again be symmetric. $\vec{\mathbf{E}}$ depends only on r and is directed radially outward (or inward if $Q < 0$).

SOLUTION (*a*) For our gaussian surface we choose a sphere of radius r $(r > r_0)$, labeled A_1 in Fig. 22–12. Since E depends only on r, Gauss's law gives, with $Q_{\text{encl}} = Q$,

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

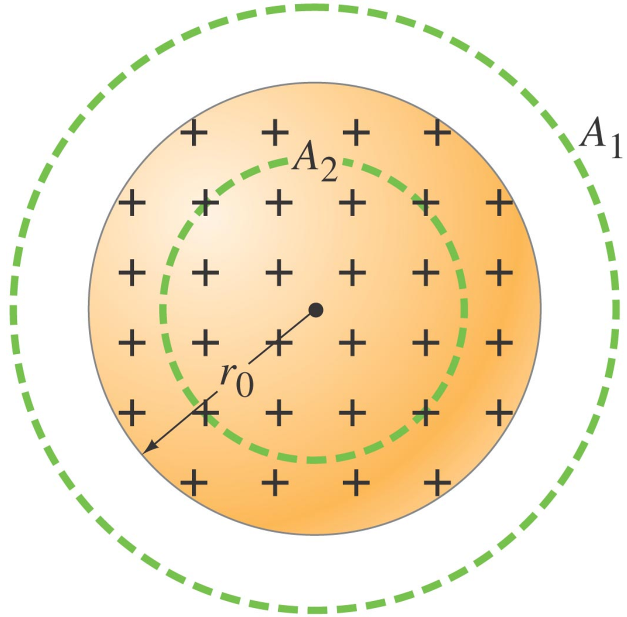
or

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Again, the field outside a spherically symmetric distribution of charge is the same as that for a point charge of the same magnitude located at the center of the sphere.

(*b*) Inside the sphere, we choose for our gaussian surface a concentric sphere of radius r $(r < r_0)$, labeled A_2 in Fig. 22–12. From symmetry, the magnitude of $\vec{\mathbf{E}}$ is the same at all points on A_2, and $\vec{\mathbf{E}}$ is perpendicular to the surface, so

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(4\pi r^2).$$



We must equate this to $Q_{\text{encl}}/\epsilon_0$ where Q_{encl} is the charge enclosed by A_2. Q_{encl} is not the total charge Q but only a portion of it. We define the **charge density**, ρ_E, as the charge per unit volume $(\rho_E = dQ/dV)$, and here we are given that ρ_E = constant. So the charge enclosed by the gaussian surface A_2, a sphere of radius r, is

$$Q_{\text{encl}} = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_E}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_E}\right) Q = \frac{r^3}{r_0^3} Q.$$

Hence, from Gauss's law,

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} = \frac{r^3}{r_0^3}\frac{Q}{\epsilon_0}$$

or

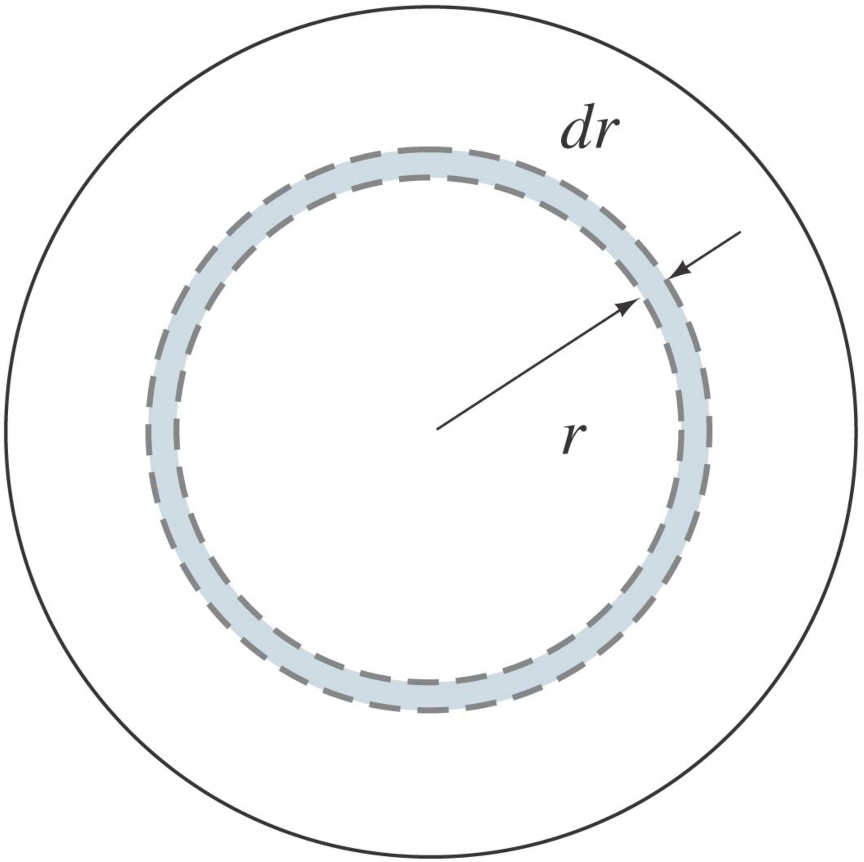
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_0^3} r. \qquad [r < r_0]$$

Thus the field increases linearly with r, until $r = r_0$. It then decreases as $1/r^2$, as plotted in Fig. 22–13.

Copyright © 2009 Pe

22-3 Εφαρμογές του Νόμου του Gauss

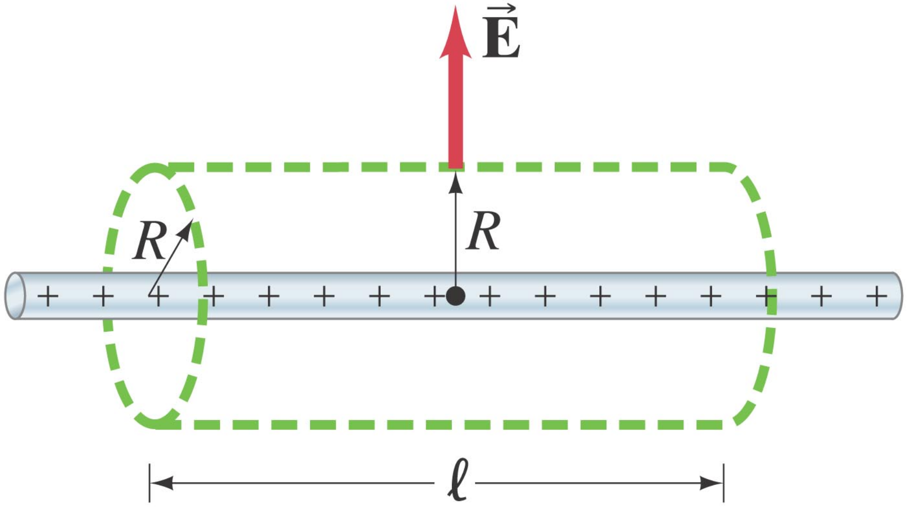
Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα του φορτίου μιας συμπαγούς σφαίρας είναι $\rho_E = \alpha r^2$, όπου α είναι μια σταθερά. (α) Βρείτε το α σαν συνάρτηση του φορτίου Q στην επιφάνεια της σφαίρας και της ακτίνας r_0. (β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο εντός της σφαίρας σαν συνάρτηση του r.



ΛΥΣΗ

Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

Ένα πολύ μακρύ καλώδιο έχει ομοιόμορφο θετικό φορτίο ανά μονάδα μήκους, *λ*. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο πλησίον του καλωδίου (αλλά εκτός αυτού) και μακριά από τα άκρα.



SOLUTION For our chosen gaussian surface Gauss's law gives

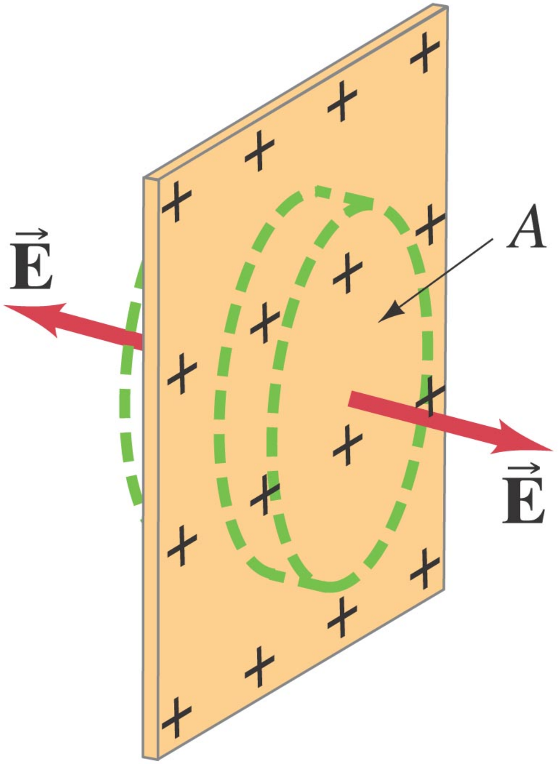
$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(2\pi R\ell) = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0},$$

where ℓ is the length of our chosen gaussian surface ($\ell \ll$ length of wire), and $2\pi R$ is its circumference. Hence

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}.$$

Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

Η ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου για μια μεγάλη λεπτή επίπεδη διηλεκτρική επιφάνεια είναι σ (σ = φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας = dQ/dA). Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο κοντά στην επιφάνεια.



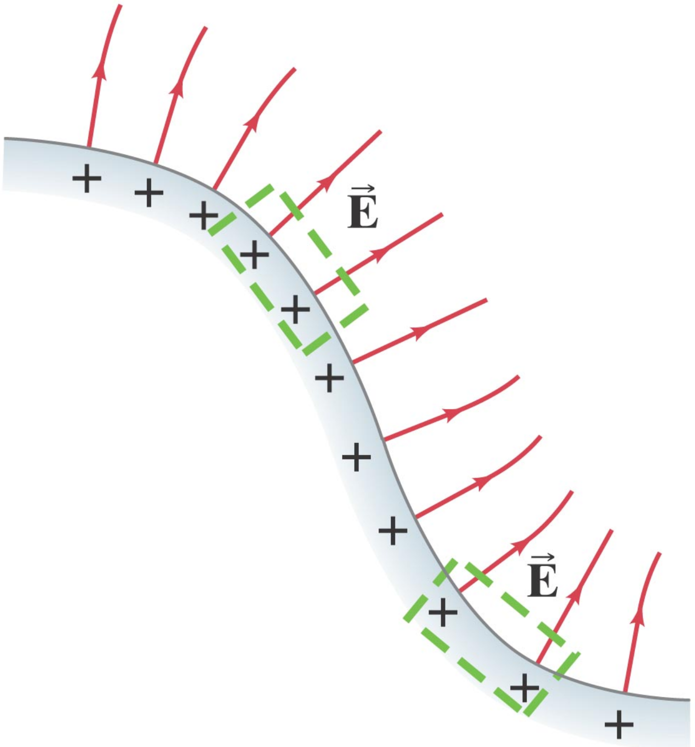
ΛΥΣΗ

Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

Δείξτε ότι το πεδίο μόλις στο εξωτερικό της επιφάνειας ενός αγωγού είναι

$$E = \sigma/\varepsilon_0$$

Όπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου το αγωγού σε οποιοδήποτε σημείο.



ΛΥΣΗ

Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

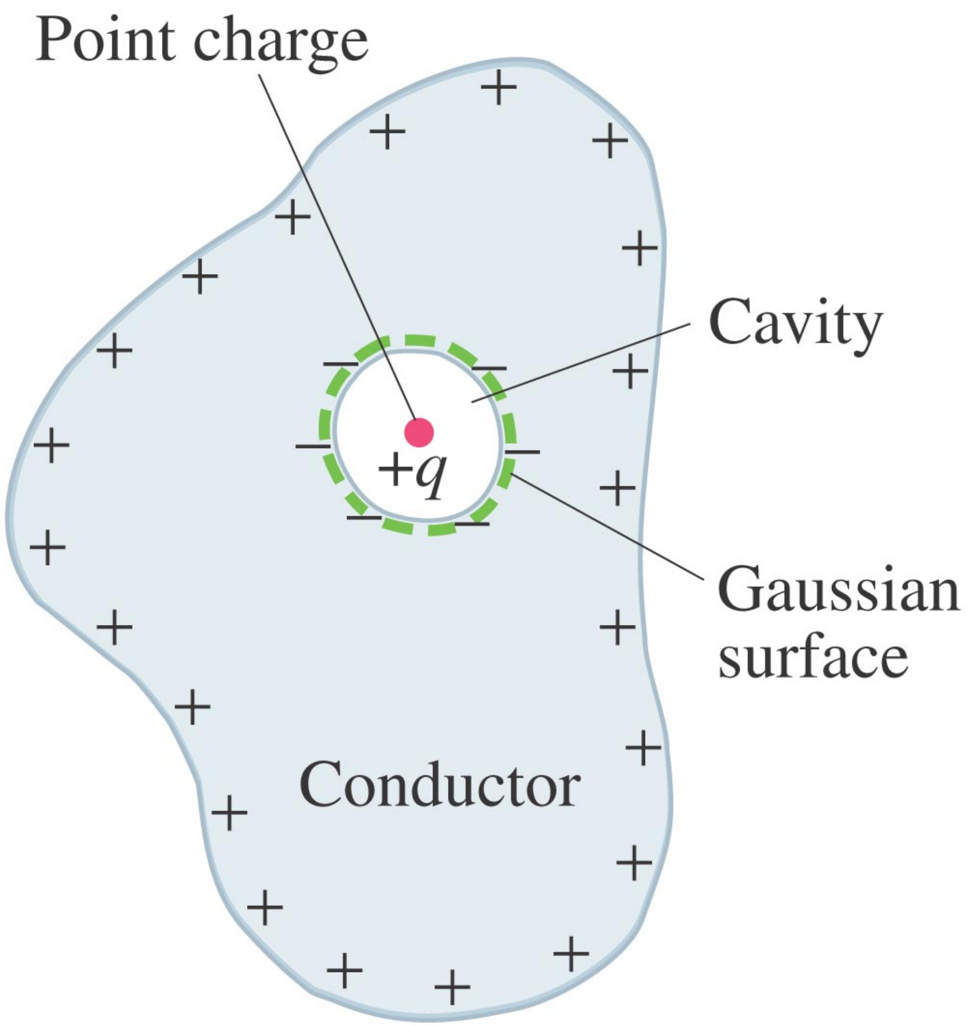
Η διαφορά μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου πλησίον αλλά έξω από μια φορτισμένη αγώγιμη επιφάνεια και μια φορτισμένη επιφάνεια μονωτή έχει δύο όψεις:

1. Αφού το πεδίο εντός του αγωγού είναι ΜΗΔΕΝ, όλη η ηλεκτρική ροή περνάει από την μια πλευρά

2. Η επιφάνεια του μονωτή έχει πυκνότητα σ, ενώ αυτή του αγωγού σ για κάθε πλευρά της επιφάνειας και επομένως διπλάσια πυκνότητα

Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

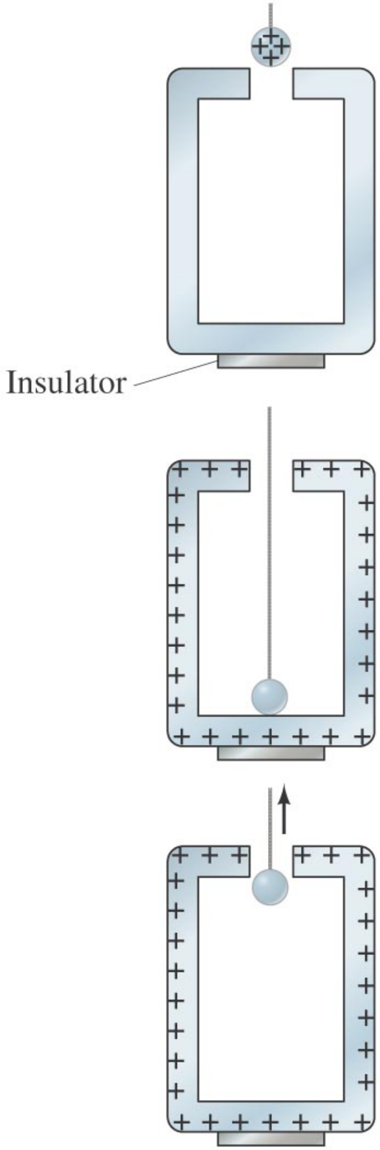
Υποθέτουμε ότι ένας αγωγός φέρει φορτίο +Q και έχει μια κοιλότητα στο εσωτερικό του που περιέχει ένα φορτίο +q. Σχολιάστε τις κατανομές των φορτίων στις εσωτερικές και εξωτερικές επιφάνειας του αγωγού.



Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.

22-4 Πειραματική επιβεβαίωση των νόμων Gauss και Coulomb

Σε αυτό το πείραμα ο νόμος του, Gauss’ s προβλέπει ότι ΟΛΟ το φορτίο της σφαίρας περνάει στον κύλινδρο μόλις έρθουν σε επαφή.



Copyright © 2009 Pearson Education, Inc.