Κεφάλαιο 8

Διατήρηση της Ενέργειας

ΔΥΝΑΜΗ
ΕΡΓΟ
ΕΝΕΡΓΕΙΑ – μηχανική, χημική, θερμότητα, βαρυτική, ηλεκτρική, μαγνητική, πυρηνική, ραδιοενέργεια, τριβής, κινητική, δυναμική

Περιεχόμενα Κεφαλαίου 8

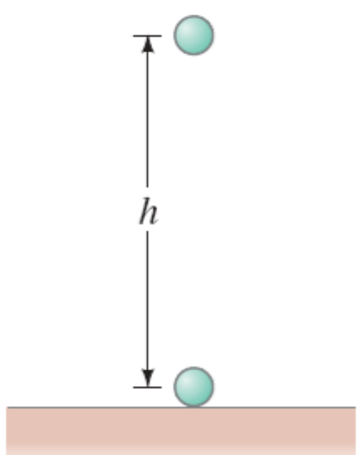
- Συντηρητικές (διατηρητικές) και μη-συντηρητικές Δυνάμεις
- Δυναμική Ενέργεια
- Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας
- Επίλυση Προβλημάτων βάση διατήρησης της Ενέργειας
- Ο Νόμος της Διατήρησης της Ενέργειας
- Διατήρηση της Ενέργειας με Συντηρητικές Δυνάμεις
- Δυναμική Ενέργεια Βαρύτητας -Ταχύτητα Διαφυγής
- Ισχύς
- Διαγράμματα Δυναμικής Ενέργειας
- Ισορροπία

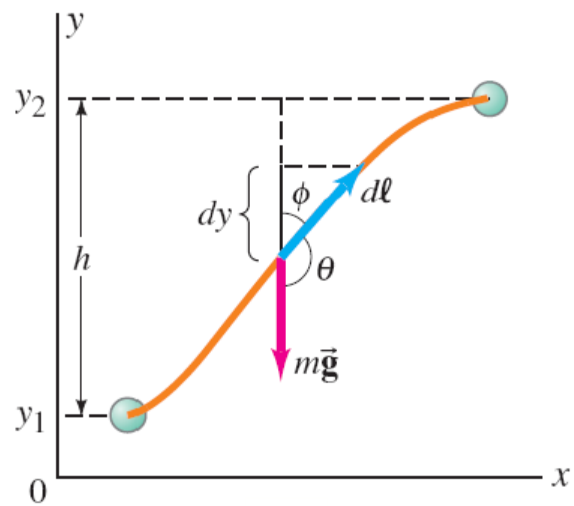
8-1 Συντηρητικές και μη-συντηρητικές δυνάμεις

Μια δύναμη είναι συντηρητική όταν:

Το** έργο **της δύναμης εξαρτάται μόνο από το τελικό και αρχικό σημείο του αντικειμένου πάνω στο οποίο δρα, είναι δηλ. ανεξάρτητο της τροχιάς που ακολουθεί.

Π.χ. : Βαρύτητα.

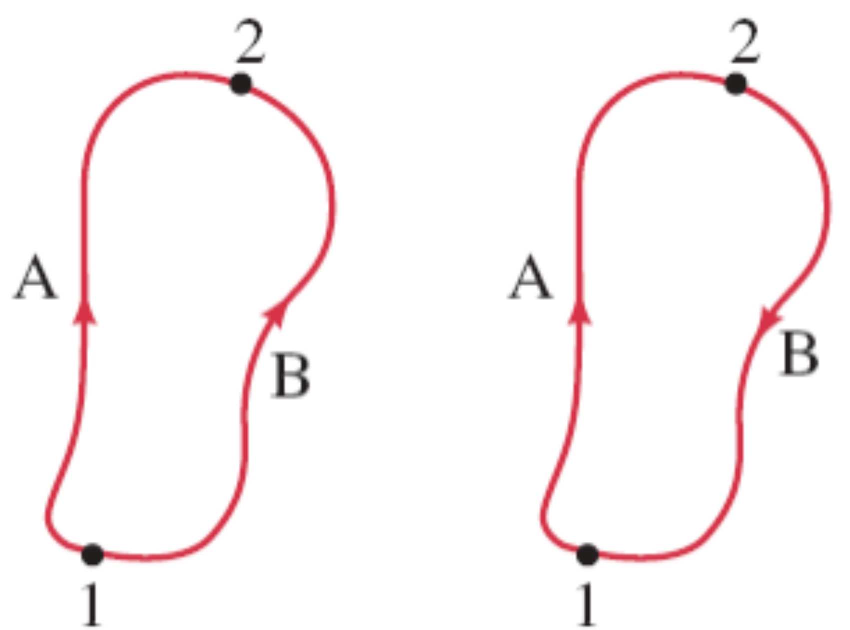




8-1 Συντηρητικές και μη-συντηρητικές δυνάμεις

Εναλλακτικός ορισμός συντηρητικής δύναμης:

Το συνολικό έργο που παράγει ή καταναλώνει μια συντηρητική δύναμη σε ένα αντικείμενο όταν αυτό διαγράψει μια κλειστή τροχιά είναι μηδέν.



Παρουσία τριβής, το έργο δεν εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση αλλά και από την τροχιά. Η τριβή είναι μια μη-συντηρητική δύναμη.

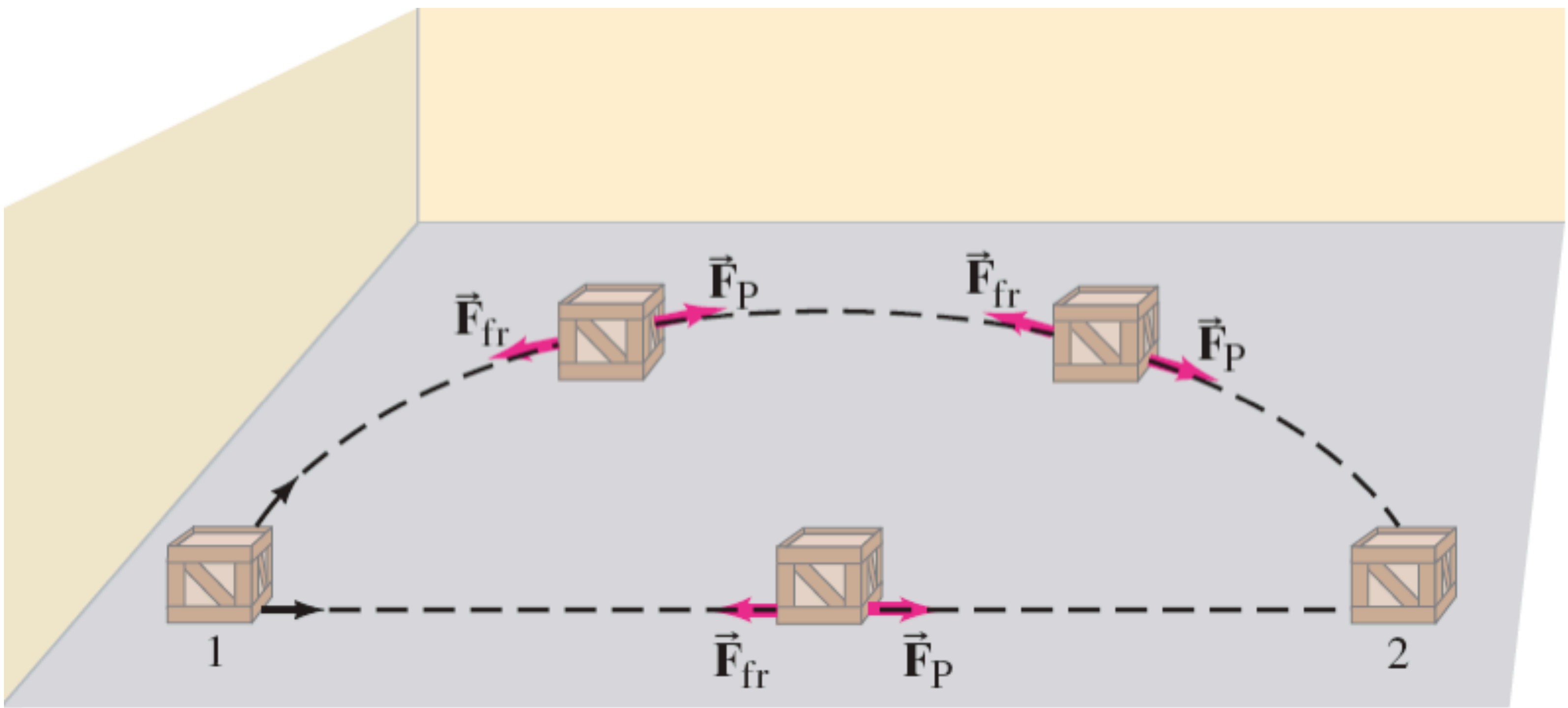


TABLE 8–1 Conservative and Nonconservative Forces

Conservative Forces	Nonconservative Forces
Gravitational	Friction
Elastic	Air resistance
Electric	Tension in cord
	Motor or rocket propulsion
	Push or pull by a person

Η δυναμική ενέργεια ορίζεται ΜΟΝΟ για συντηρητικές δυνάμεις.

8-2 Δυναμική Ενέργεια

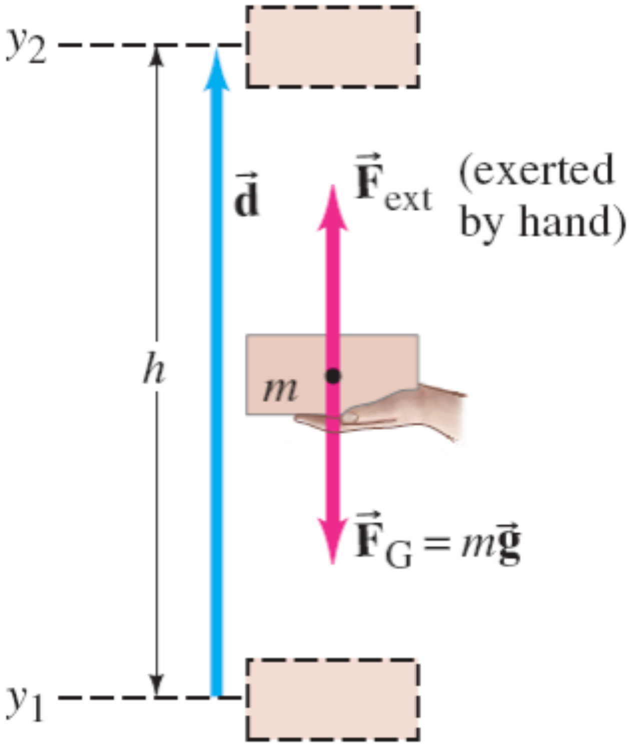
Ένα σύστημα χαρακτηρίζεται από τη δυναμική του ενέργεια

Παραδείγματα δυναμικής ενέργειας είναι:

• Συμπιεσμένο ελατήριο

• Τεντωμένο λάστιχο

• Ένα αντικείμενο σε κάποιο ύψος πάνω από το έδαφος



Το έργο που εκτελεί μια δύναμη κατά την ανύψωση μιας μάζας *m* σε ύψος *h*,

$$W_{ext} = \vec{\mathbf{F}}_{ext} \cdot \vec{\mathbf{d}} = mgh\cos 0^\circ$$

$$= mgh = mg(y_2 - y_1).$$

Ορίζουμε το δυναμικό της βαρύτητας σε ύψος *y* από το σημείο αναφοράς ως:

$$U_{grav} = mgy.$$

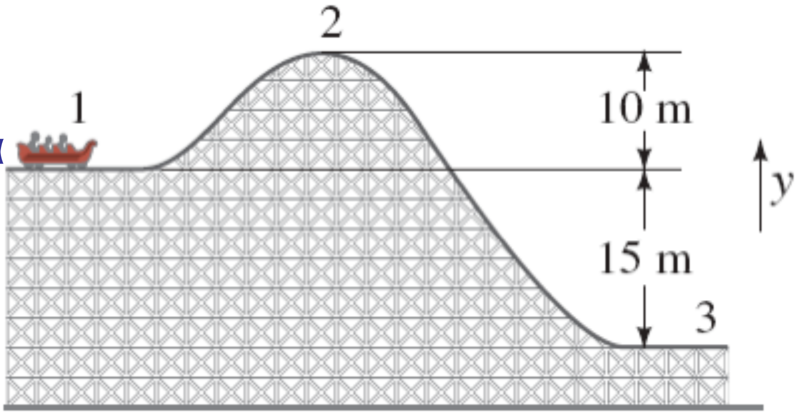
Κατά την πτώση ενός αντικειμένου έχουμε μετατροπή δυναμικής ενέργειας σε κινητική.

Η δυναμική ενέργεια είναι ιδιότητα του συστήματος και όχι μόνο του αντικειμένου.

Μόνο μεταβολές στη δυναμική ενέργεια μπορούν να μετρηθούν.

Επειδή $U_{grav} = mgy$, πρέπει να είμαστε συνεπείς ως προς το σημείο $y=0$.

Ένα βαγόνι 1000-kg ξεκινά από το σημείο 1 μετά πάει στο σημείο 2 και τελικά φτάνει στο σημείο 3. (α) Ποια είναι η δυναμική ενέργεια στα τρία σημεία εάν $y = 0$ στο σημείο 1. (β) Πόσο αλλάζει η δυναμική ενέργεια μεταξύ των σημείων 2 και 3 (γ) Εάν ορίσουμε y=0 το σημείο 3, τι αλλάζει στα ερωτήματα των (α) και (β);



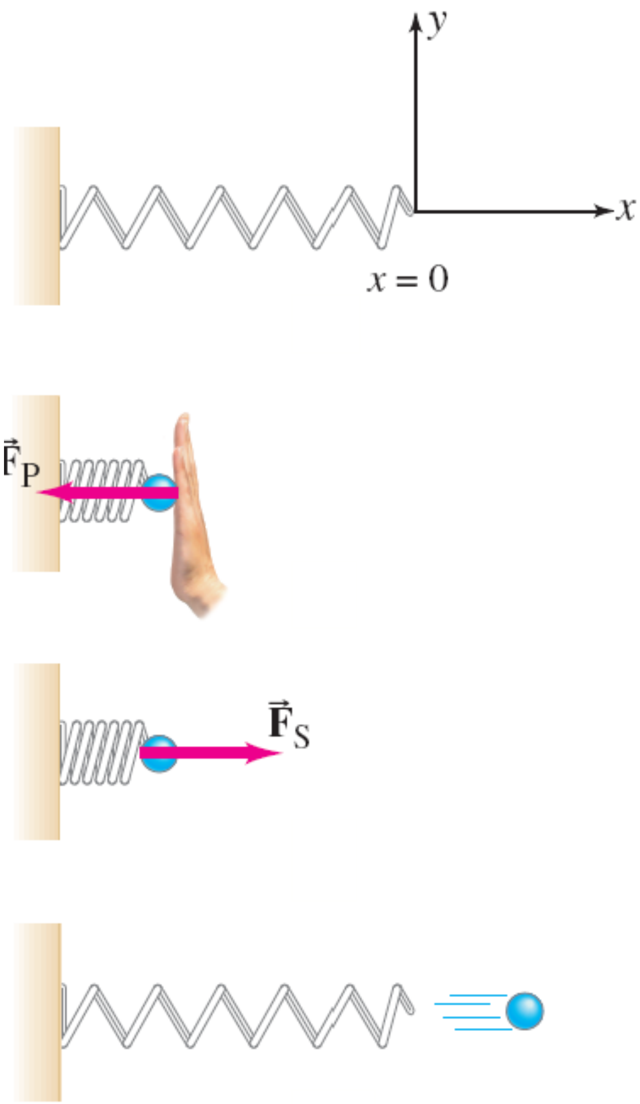
ΛΥΣΗ

Ο γενικός ορισμός της Δυναμικής ενέργειας της Βαρύτητας είναι:

$$\Delta U = -W_{\mathrm{G}} = -\int_1^2 \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{G}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}.$$

Και γενικά για συντηρητικές δυνάμεις:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -W.$$



Το ελατήριο όταν συμπιέζεται ή επιμηκύνεται έχει δυναμική ενέργεια που την ονομάζουμε ελαστικότητα. Η δύναμη που απαιτείται για τη συμπίεση ή επιμήκυνση είναι:

$$F_S = -kx,$$

όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου, και πρέπει να μετρηθεί για κάθε ελατήριο.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου επομένως είναι:

$$\Delta U = U(x) - U(0)$$

$$= -\int_1^2 \vec{\mathbf{F}}_S \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\int_0^x (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$U_{\mathrm{el}}(x) = \tfrac{1}{2}kx^2.$$

Σε μια διάσταση,

$$U(x) = -\int F(x)\,dx + C.$$

Εάν παραγωγίσουμε την εξίσωση βρίσκουμε

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

Σε τρεις διαστάσεις έχουμε:

$$\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = -\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial U}{\partial x} - \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial U}{\partial y} - \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Η δύναμης επίσης ορίζεται ως

$$\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = -\nabla U(x, y, z)$$

$$\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = -\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial U}{\partial x} - \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial U}{\partial y} - \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Απουσία μη-συντηρητικών δυνάμεων, το άθροισμα των μεταβολών της κινητικής και δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος παραμένει σταθερό.

Ορίζουμε ως Μηχανική ενέργεια:

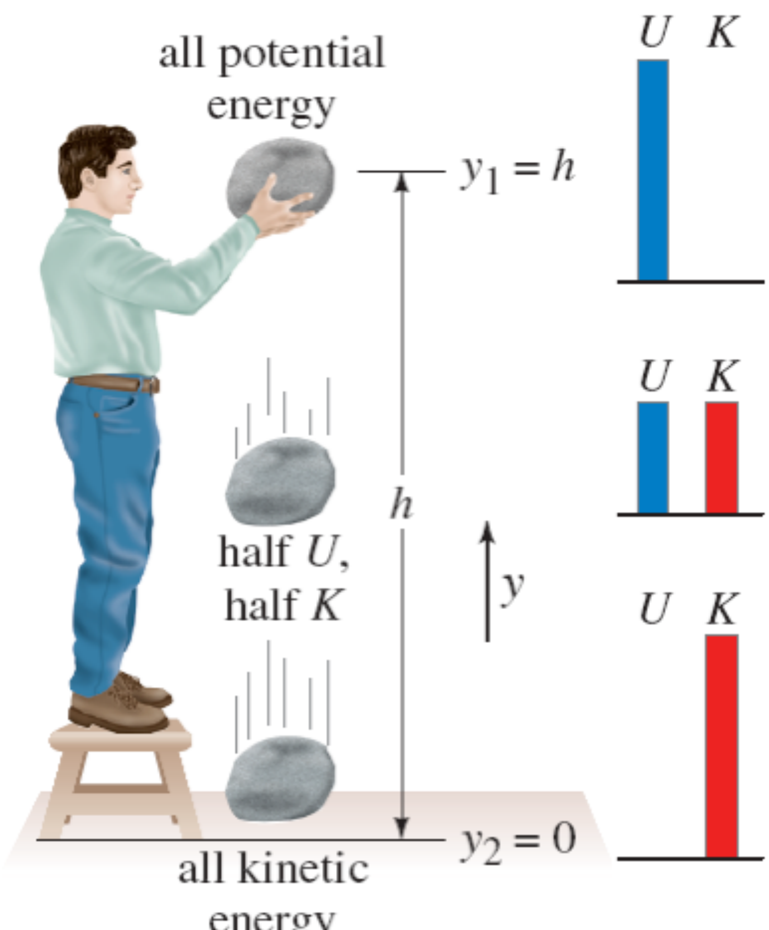
$$E = K + U.$$

Και ως διατήρηση της μηχανικής ενέργειας :

$$\boxed{K_2 + U_2 = K_1 + U_1}.$$

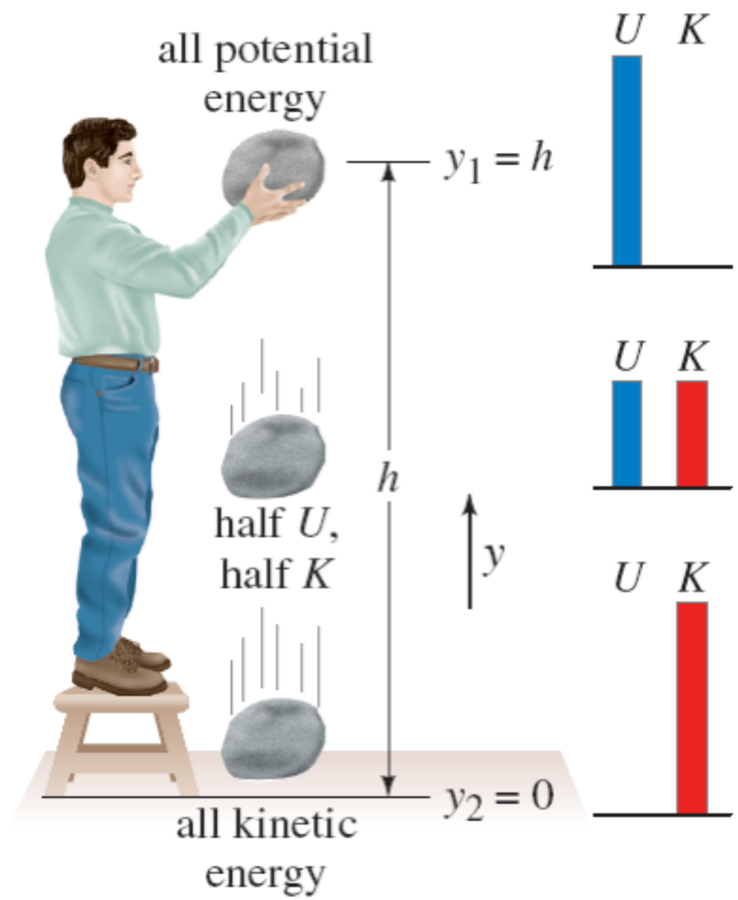
Η αρχή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας λέει:

Εάν σε ένα σύστημα δρουν μόνο συντηρητικές δυνάμεις, τότε η συνολική μηχανική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή-διατηρείται.



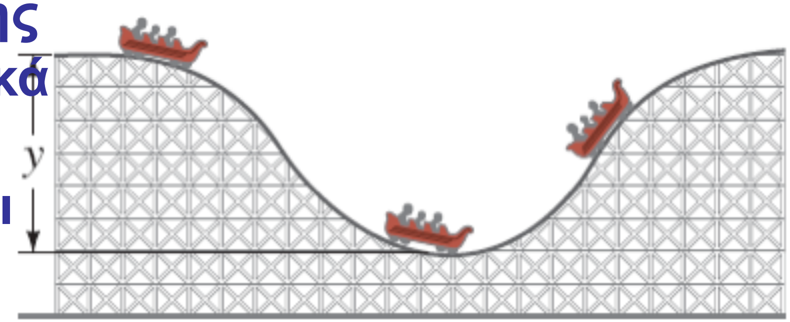
$$E = K + U$$
$$= \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy.$$

Εάν $y_1 = h = 3.0$ m, βρείτε την ταχύτητα της πέτρας 1.0 m πριν φτάσει στο έδαφος.



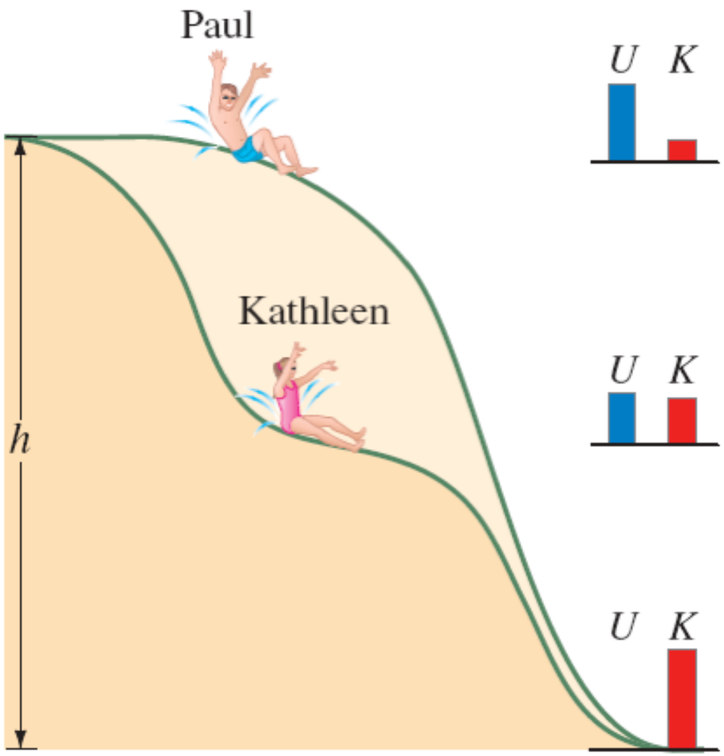
ΛΥΣΗ

Στο σχήμα που φαίνεται το μέγιστο ύψος της τροχιάς είναι 40 m, και το βαγόνι είναι αρχικά ακίνητο. Βρείτε (α) την ταχύτητα του βαγονιού στον πάτο της διαδρομής (β) Σε τι ύψος έχει την μισή ταχύτητα του (α).



ΛΥΣΗ

Δύο διαφορετικές νεροτσουλήθρες έχουν το ίδιο ύψος h. Δύο νέοι, ο Paul και η Kathleen, αρχίζουν από το ίδιο σημείο στην κορυφή. (α) Ποιος θα έχει μεγαλύτερη ταχύτητα κατά την έξοδο από τη τσουλήθρα; (β) Ποιος φτάνει πρώτος στο τέρμα της τσουλήθρας; Αγνοούμε την τριβή και υποθέτουμε ότι και οι δύο τσουλήθρες έχουν το ίδιο μήκος.

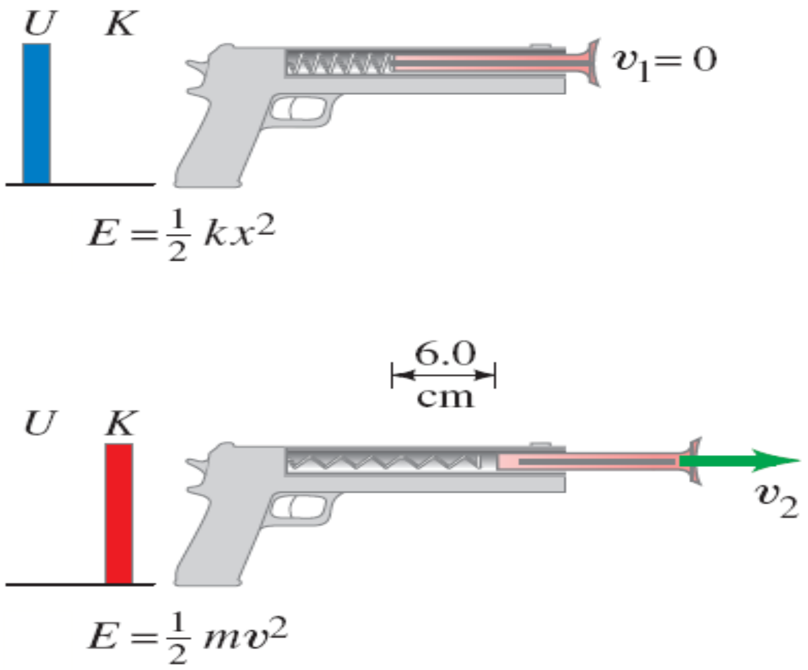


(α) Η ταχύτητα θα είναι ίδια λόγω Διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

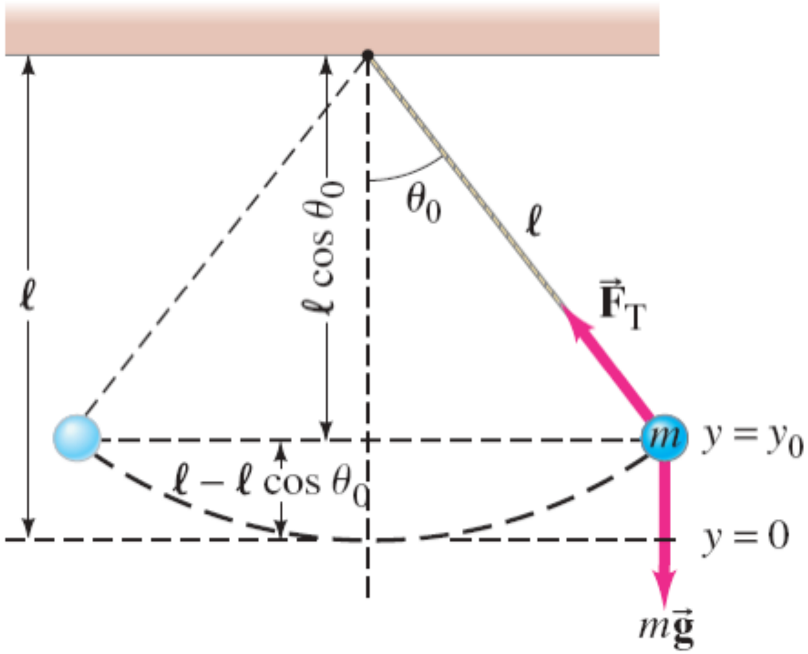
(β) Επειδή η πίστα της Kathleen είναι περισσότερο απότομη στην αρχή, η Kathleen επιταχύνει περισσότερο για το μεγαλύτερο μέρος της διαδρομής και κατά συνέπεια θα είναι πάντα πιο μπροστά από το Paul και θα φτάσει πρώτη στην έξοδο

Το «βέλος» ενός ψεύτικου όπλου ζυγίζει 0.100 kg και οπλίζει ένα ελατήριο. Η σταθερά του ελατηρίου είναι k = 250 N/m (αγνοούμε τη μάζα του) και συμπιέζεται 6.0 cm. Ποια είναι η ταχύτητα του βέλους όταν φύγει από το ελατήριο στη θέση x=0.



ΛΥΣΗ

Ένα απλό εκκρεμές αποτελείτε από ένα σφαιρίδιο μάζας m που κρέμεται από ένα σκοινί (αμελητέας μάζας) l. Η σφαίρα απελευθερώνεται στο χρόνο $t = 0$, όπου το σκοινί σχηματίζει γωνία $\theta = \theta_0$ με την κατακόρυφο.



(α) Περιγράψτε την κίνηση της σφαίρας ως προς την κινητική και δυναμική της ενέργεια, (β) στη συνέχεια προσδιορίστε την ταχύτητα της σφαίρας σαν συνάρτηση της γωνίας θ (γ) πόση είναι η ταχύτητα στο χαμηλότερο σημείο της διαδρομής (δ) πόση είναι η τάση του σκοινιού. Αγνοείστε την αντίσταση του αέρα.

ΛΥΣΗ

8-5 Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας

Μη-συντηρητικές (διατηρητικές) «δυνάμεις»:

Τριβή
Θερμότητα

Πιθανές συντηρητικές (διατηρητικές) «δυνάμεις»:

Ηλεκτρική/Μαγνητική Δύναμη
Χημική (Ενέργεια) Δύναμη
Βαρυτική Δύναμη

Για ΜΟΝΩΜΕΝΑ συστήματα ισχύει πάντα η σχέση:

ΔK + ΔU + {οποιαδήποτε άλλη μορφή μεταβολή ενέργειας} = 0

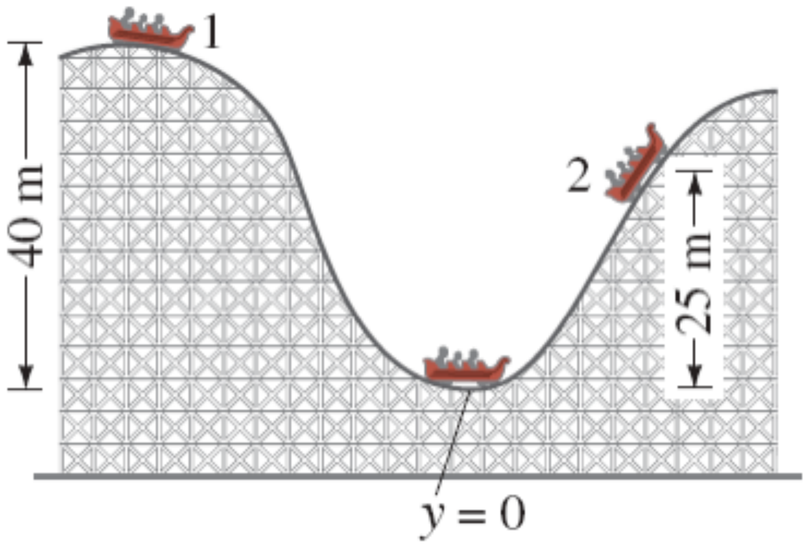
8-5 Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας

Η συνολική ενέργεια για ένα απομονωμένο (ή μονωμένο) σύστημα ούτε αυξάνεται ούτε ελαττώνεται. Ενέργεια μπορεί να μετατραπεί σε άλλη μορφή και να μεταφερθεί από αντικείμενο σε αντικείμενο αλλά η συνολική ενέργεια του (μονωμένου) συστήματος παραμένει σταθερή.

Επίλυση ασκήσεων:

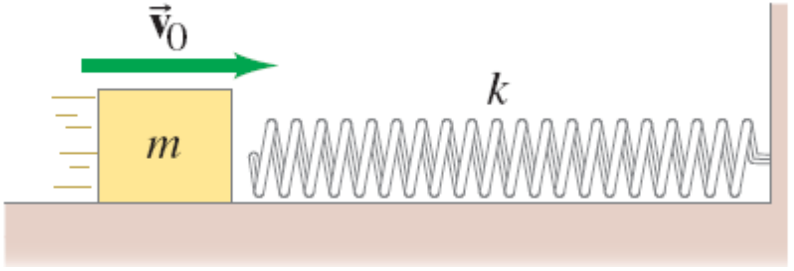
1. Διάγραμμα.
2. Προσδιορίζουμε το σύστημα.
3. Προσδιορίζουμε αρχικές και τελικές καταστάσεις ενέργειας για τα αντικείμενα που μας ενδιαφέρουν.
4. Επιλέγουμε σύστημα αναφοράς.
5. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας.
6. Λύνουμε.

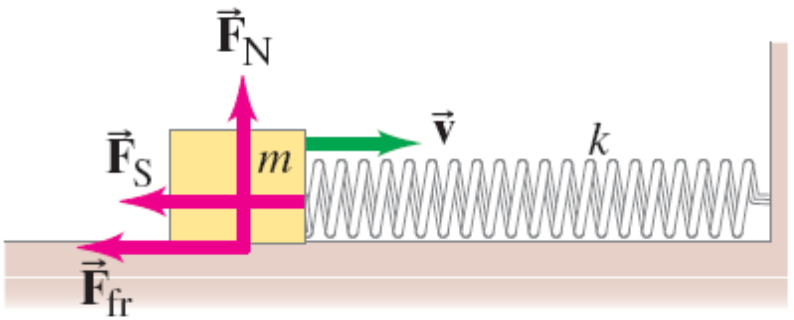
Το βαγονάκι στο δεύτερο μέρος της διαδρομής φτάνει μόνο μέχρι τα 25 m και σταματάει. Διήνυσε 400 m. Εάν η μάζα του βαγονιού είναι 1000kg βρείτε την απώλεια σε ενέργεια λόγω τριβής (θερμότητα) και την δύναμη της τριβής (υποθέστε ότι είναι περίπου σταθερή)



ΛΥΣΗ

Μια μάζα m που κινείται σε «μη λεία» οριζόντια επιφάνεια με ταχύτητα v_0 και προσκρούει σε ελατήριο (αμελητέας μάζας) το οποίο συμπιέζεται κατά X. Εάν η σταθερά του ελατηρίου είναι k, προσδιορίστε τον συντελεστή τριβής κίνησης.





ΛΥΣΗ

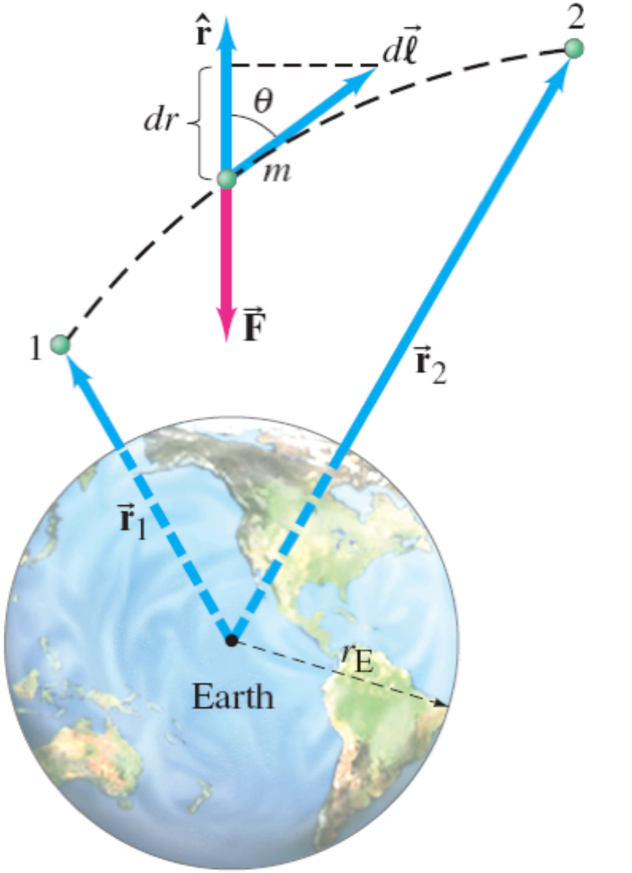
8-7 Πεδίο Βαρύτητας και Ταχύτητα Διαφυγής

Σε μεγάλες αποστάσεις από τη Γη η δύναμη της βαρύτητας είναι περίπου σταθερή:

$$\vec{\mathbf{F}} = -G\frac{mM_E}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

Το έργο ενός αντικειμένου που κινείται μέσα στο πεδίο βαρύτητας της γης είναι:

$$W = \int_1^2 \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -GmM_E\int_1^2 \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}}{r^2}.$$

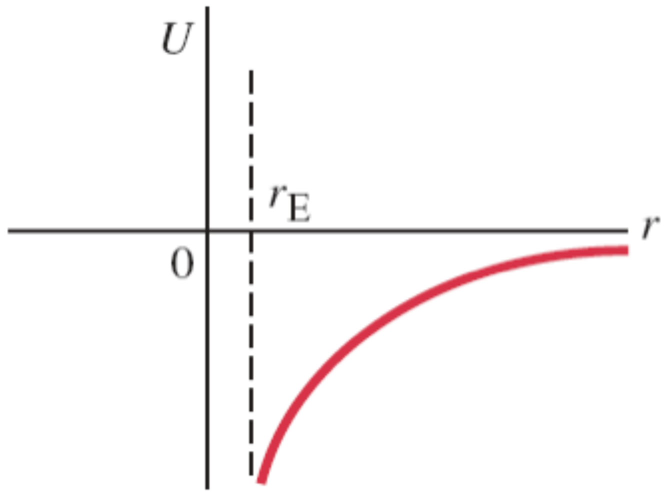


Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε:

$$W = \frac{GmM_E}{r_2} - \frac{GmM_E}{r_1}.$$

Επειδή βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο της διαδρομής, η βαρύτητα είναι συντηρητική δύναμη. Ορίζουμε το δυναμικό πεδίο της βαρύτητας ως εξής:

$$U(r) = -\frac{GmM_E}{r}.$$



Ένα κομμάτι ενός πυραύλου (πλακάκι) που κατευθύνεται προς το διάστημα ξεκολλάει και πέφτει προς τη Γη. Η ταχύτητα του πυραύλου τη στιγμή της αποκόλλησης είναι 1800 m/s και η απόσταση 1600 km από την επιφάνειας της Γης. Αγνοώντας της αντίσταση του αέρα βρείτε την ταχύτητα που έχει αναπτύξει το πλακάκι πριν πέσει στο έδαφος.

ΛΥΣΗ

Όταν η κινητική ενέργεια ενός αντικειμένου ισούται με τη δυναμική ενέργεια του πεδίου της βαρύτητας, τότε η ταχύτητα ονομάζεται ταχύτητα διαφυγής και δίδεται από τη σχέση

$$v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{2GM_{\mathrm{E}}/r_{\mathrm{E}}} = 1.12 \times 10^{4}\ \mathrm{m/s}.$$

Συγκρίνετε τις ταχύτητες διαφυγής από τη Γη και τη Σελήνη. M_{MOON} = 7.35 x 10^{22} kg and r_{M} = 1.74 x 10^{6} m, and for Earth, M_{E} = 5.98 x 10^{24} kg and r_{E} = 6.38 x 10^{6} m

(*a*) Using Eq. 8–19, the ratio of the escape velocities is

$$\frac{v_{\mathrm{esc}}(\mathrm{Earth})}{v_{\mathrm{esc}}(\mathrm{Moon})} = \sqrt{\frac{M_{\mathrm{E}}}{M_{\mathrm{M}}}\frac{r_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{E}}}} = 4.7.$$

8-8 Ισχύς

Ισχύς είναι ο ρυθμός με τον οποίο εκτελείτε το έργο.

Η Μέση Ισχύς είναι: $$\overline{P} = \frac{W}{t}.$$

Και στιγμιαία ισχύς: $$P = \frac{dW}{dt}.$$

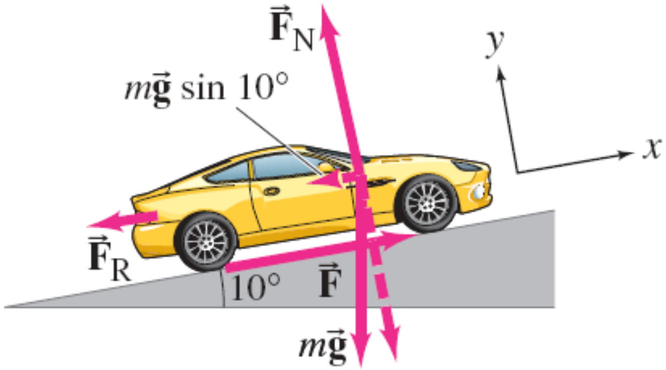
Οι μονάδες ισχύος είναι τα **watts**: $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/s}.$

Η ισχύς μπορεί επίσης να εκφραστεί σαν ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας δηλ. $$P = \frac{dE}{dt}.$$

Για σταθερές δυνάμεις, μπορούμε να εκφράσουμε την ισχύ ως προς την ταχύτητα:

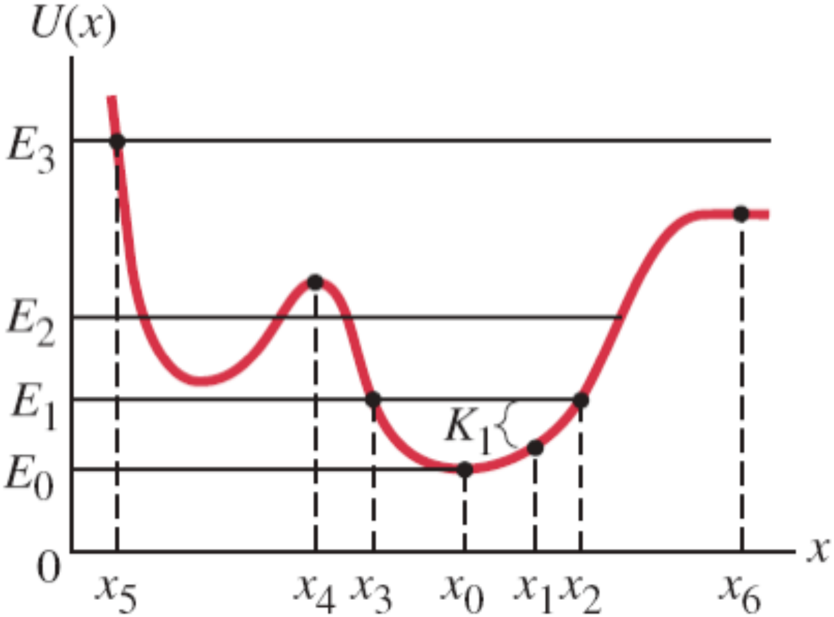
$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\vec{\boldsymbol{\ell}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}.$$

Υπολογίστε την ισχύ που απαιτείται για ένα αυτοκίνητο 1400-kg για τις ακόλουθε καταστάσεις: (α) να ανέβει ένα λόφο κλίσης 10° με σταθερή ταχύτητας 80 km/h. (β) να επιταχύνει σε οριζόντιο επίπεδο από τα 90 στα 110 km/h μέσα σε 6.0 s. Υποθέστε μια σταθερή αντίσταση F_R = 700 N παντού.



ΛΥΣΗ

8-9 Δυναμικές Ενεργειακές Επιφάνειες Ευσταθής και Ασταθής Ισορροπία



Στο διάγραμμα απεικονίζεται η δυναμική ενέργεια ενός αντικειμένου που το κινεί μια συντηρητική δύναμη. Η «αντίδραση» (συμπεριφορά του αντικειμένου προσδιορίζεται από τη συνολική ενέργειά του.

Με ενέργεια E_1, το αντικείμενο «ταλαντεύεται» μεταξύ των σημείων καμπής x_3 και x_2.

Με ενέργεια E_2 έχει τέσσερα (4) σημεία καμπής

Με ενέργεια E_0 βρίσκεται σε (σταθερή) ευσταθή ισορροπία.
Το σημείο x_4 μπορεί να είναι ένα μέγιστο ή ένα σαγματικό σημείο της Δυναμικής Ενέργειας.

Στο σημείο x_4 βρίσκεται σε ασταθή ισορροπία.

Table 1.1 Energy per Gram

Object	Calories (or watt-hours)	Joules	Compared to TNT
Bullet (at sound speed, 1000 ft/s)	0.01	40	0.015
Battery (auto)	0.03	125	0.05
Battery (rechargeable computer)	0.1	400	0.15
Flywheel (at 1 km/s)	0.125	500	0.2
Battery (alkaline flashlight)	0.15	600	0.23
TNT (the explosive trinitrotoluene)	0.65	2700	1
Modern high explosive (PETN)	1	4200	1.6
Chocolate chip cookies	5	21,000	8
Coal	6	27,000	10
Butter	7	29,000	11
Alcohol (ethanol)	6	27,000	10
Gasoline	10	42,000	15
Natural gas (methane, CH_4)	13	54,000	20
Hydrogen gas or liquid (H_2)	26	110,000	40
Asteroid or meteor (30 km/s)	100	450,000	165
Uranium-235	20 million	82 billion	30 million

Table 1.2 Cost of Energy

Fuel	Market cost	Cost per kWh (1000 Cal)	Cost if converted to electricity
Coal	$40 per ton	0.4¢	1.2¢
Natural gas	$3 per thousand cubic feet	0.9¢	2.7¢
Gasoline	$2.50 per gallon	7¢	21¢
Electricity	$0.10 per kWh	10¢	10¢
Car battery	$50 to buy battery	21¢	21¢
Computer battery	$100 to buy battery	$4.00	$4.00
AAA battery	$1.50 per battery	$1000.00	$1000.00

Table 1.3 Common Energy Units

Energy unit	Definition and equivalent
calorie (lowercase)	Heats 1 gram of water by 1°C
Calorie (capitalized), the food calorie, also called kilocalorie	Heats 1 kg of water by 1°C 1 Calorie = 4182 joules ≈ 4 kJ
Joule	1/4182 Calories
	≈ Energy to lift 1 kg by 10 cm
	≈ Energy to lift 1 lb by 9 in
Kilojoule	1000 joules = 1/4 Calorie
Megajoule	1000 kilojoules = 10^6 joules Costs about 5 cents from electric utility
Kilowatt-hour (kWh)	861 Calories ≈ 1000 Calories = 3.6 megajoules
	Costs 10 cents from electric utility
British Thermal Unit (BTU)	1 BTU = 1055 joules ≈ 1 kJ = 1/4 Calorie
Quad	A quadrillion BTUs = 10^{15} BTU = 10^{18} J
	Total U.S. energy use ≈ 100 quads per year; total world use ≈ 400 quads per year

Note: The symbol ≈ means "approximately equal to."