

Κεφάλαιο 7

Έργο και Ενέργεια



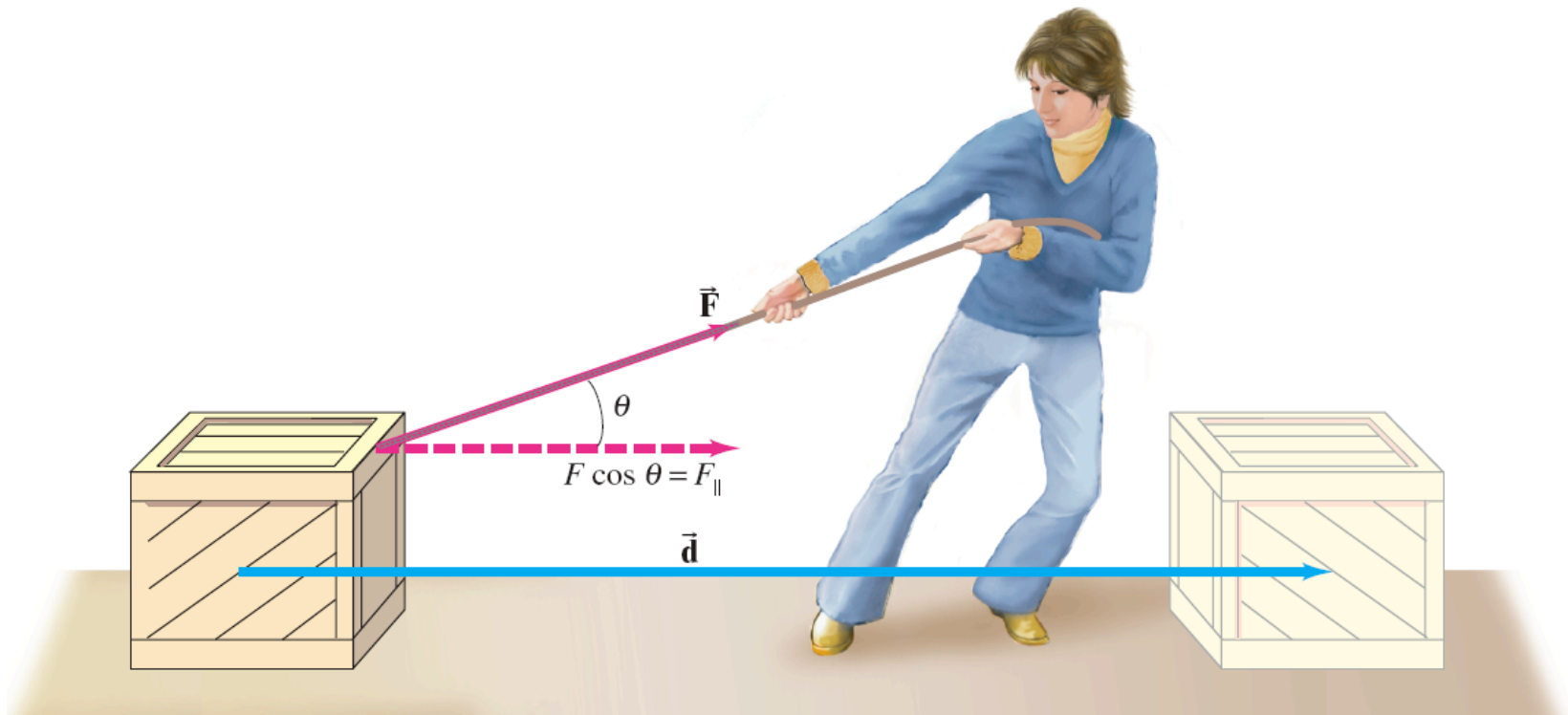
Περιεχόμενα Κεφαλαίου 7

- Το έργο σταθερής δύναμης
- Εσωτερικό Γινόμενο δύο διανυσμάτων
- Έργο μεταβλητής δύναμης
- Σχέση Ενέργειας και έργου

7-1 Το έργο σταθερής δύναμης

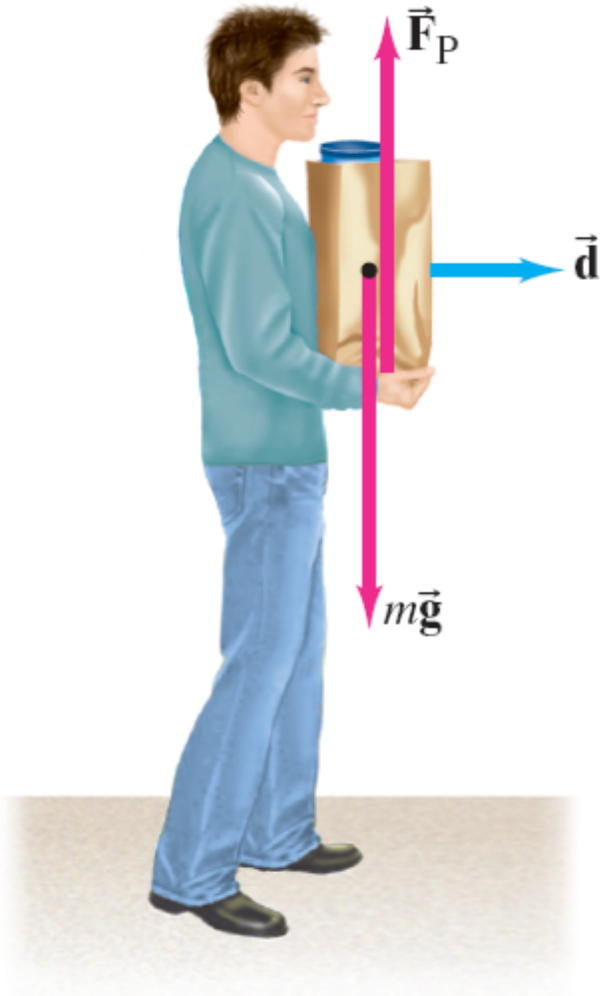
Το έργο που εκτελείτε από σταθερή δύναμη ορίζεται ως το γινόμενο της απόστασης που διανύθηκε με τη συνιστώσα της δύναμης στην κατεύθυνση της μετατόπισης

$$W = Fd \cos \theta.$$



7-1 Το έργο σταθερής δύναμης

Στο σύστημα SI, η μονάδα είναι το **joule**:



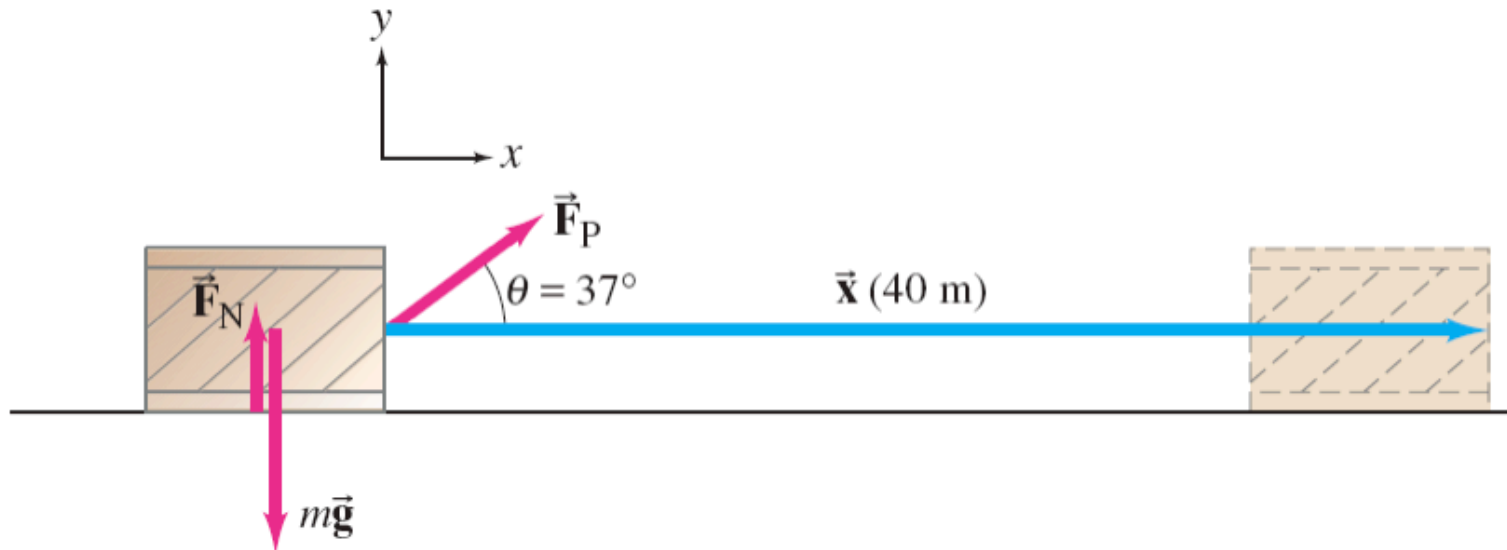
$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Ο κύριος που μεταφέρει τα «μαναβικά» δεν ασκεί έργο εφόσον δεν μετακινήσει τη σακούλα **πάνω ή κάτω**. Δεν υπάρχει έργο εάν δεν υπάρχει συνιστώσα της δύναμης στην κατεύθυνση της μετατόπισης.

7-1 Το έργο σταθερής δύναμης

ΑΣΚΗΣΗ 7.1

Ένα κιβώτιο 50-kg μεταφέρεται 40 m οριζοντίως με δύναμη $F_P = 100$ N, που δρα σε γωνία 37° όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Δεν υπάρχουν τριβές. Βρείτε (α) Το έργο που παράγει η δύναμη αυτή στο κιβώτιο (β) το συνολικό έργο του κιβωτίου.

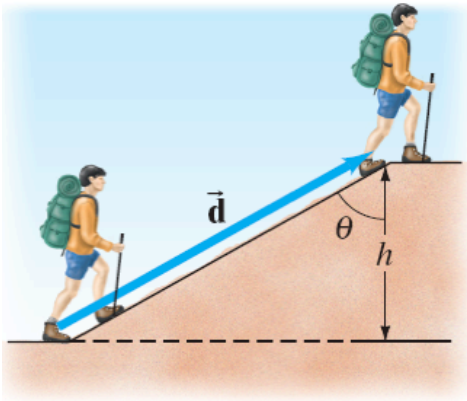


ΛΥΣΗ

Επίλυση προβλημάτων έργου:

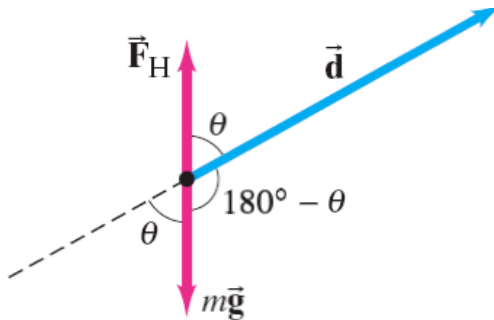
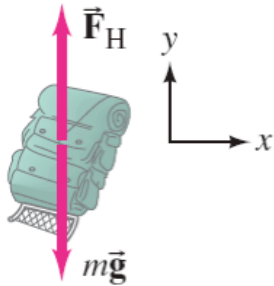
1. Διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος.
2. Διαλέγουμε σύστημα συντεταγμένων.
3. Εφαρμόζουμε το Νόμο του Νεύτωνα για να βρούμε όλες τις δυνάμεις, και τη συνολική δύναμη.
4. Βρίσκουμε το έργο της κάθε δύναμης και της συνολικής.

ΑΣΚΗΣΗ 7.2



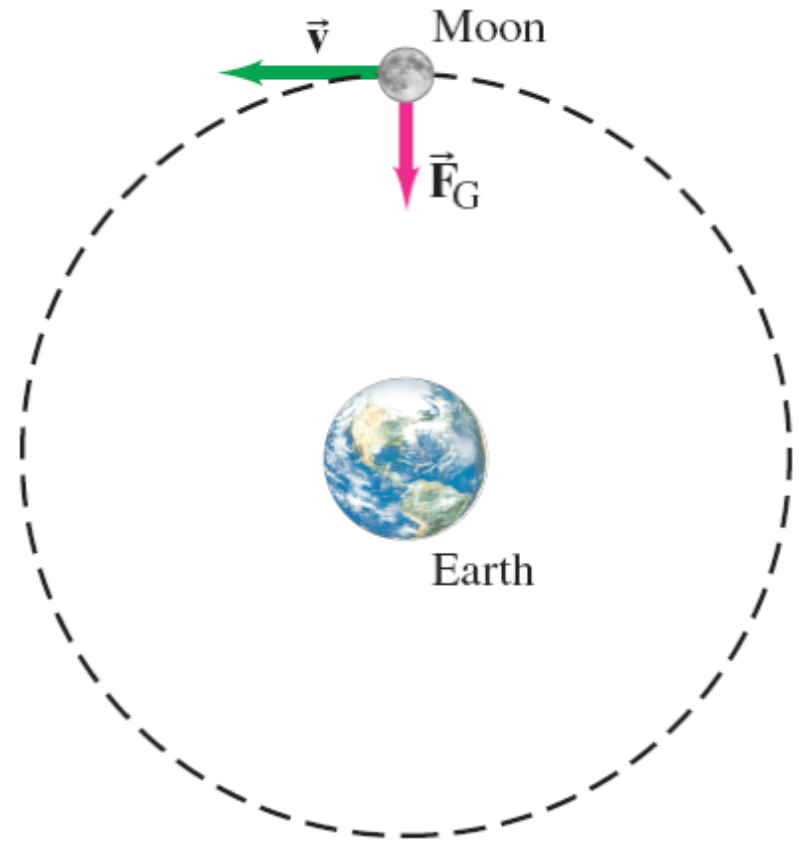
(α) Βρείτε το έργο ενός ορειβάτη που κουβαλάει ένα σακίδιο 15.0-kg σε ύψος $h = 10.0$ m. Βρείτε επίσης (β) το έργο που ασκεί η βαρύτητα στο σακίδιο (γ) το συνολικό έργο στο σακίδιο. Υποθέστε ότι η ανάβαση είναι ομαλή (σταθερή ταχύτητα και μηδενική επιτάχυνση)

ΛΥΣΗ



Ασκή έργο πάνω στο Φεγγάρι η Γη;

ΌΧΙ....Δεν υπάρχει έργο μιας και η κεντρομόλος δύναμη είναι πάντα κάθετη στην τροχιά!

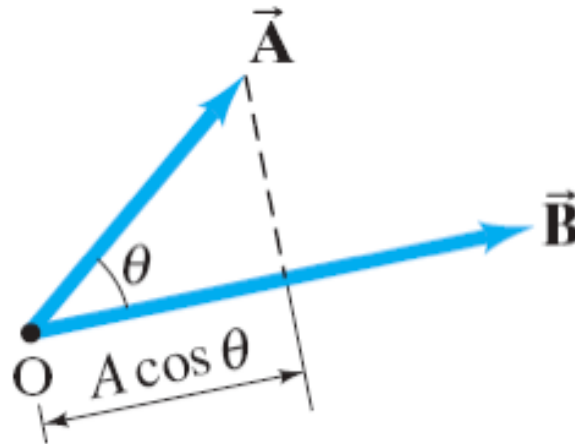


7-2 Εσωτερικό γινόμενο Διανυσμάτων

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB \cos \theta$$

Και επομένως

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = Fd \cos \theta.$$



ΑΣΚΗΣΗ 7.3

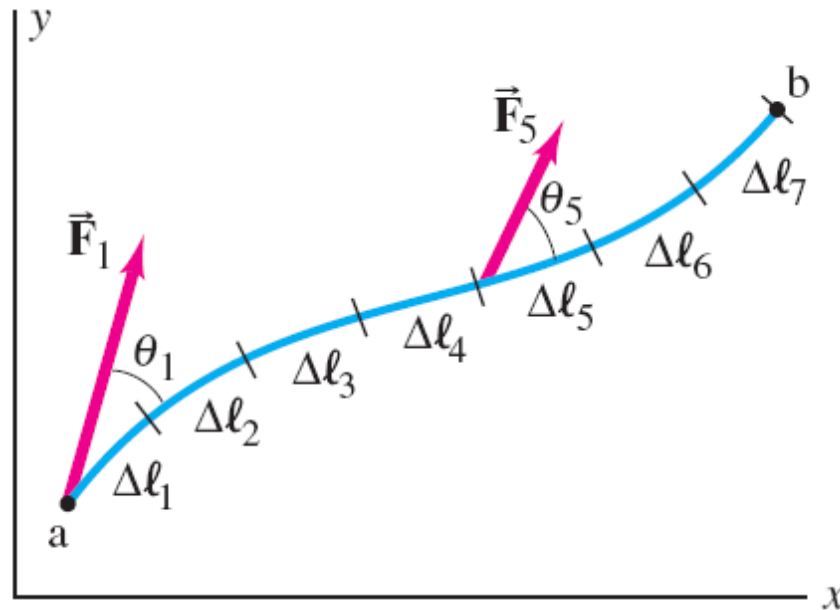
Η δύναμη του διαγράμματος έχει μέτρο $F_P = 20\text{ N}$ και γωνία 30° με το οριζόντιο έδαφος. Βρείτε το έργο της δύναμης χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο όταν το βαγονάκι σύρεται 100 m κατά μήκος του εδάφους.



ΛΥΣΗ

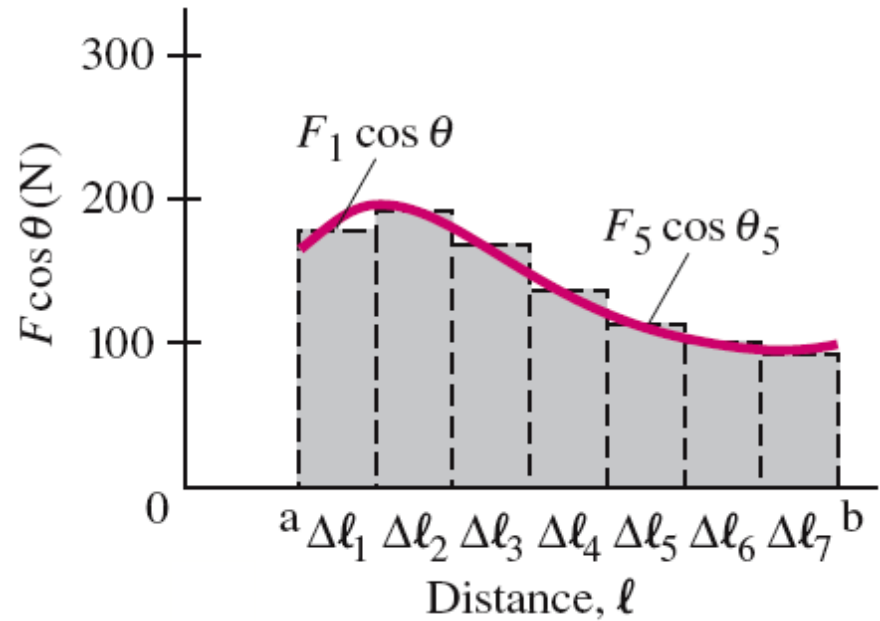
7-3 Έργο μεταβλητής Δυναμης

Μια μεταβλητή δύναμη ασκείται πάνω σε ένα αντικείμενο. Στην περίπτωση αυτή το γινόμενο $\vec{F} \cdot \vec{d}$ δεν είναι σταθερό



Για μεταβλητές δυνάμεις, για να βρούμε το έργο κατά προσέγγιση, χωρίζουμε το διάστημα σε μικρά διαστήματα και υποθέτουμε ότι σε κάθε μικρό διάστημα η δύναμη είναι σταθερή.

$$W \approx \sum_{i=1}^7 F_i \cos \theta_i \Delta \ell_i$$

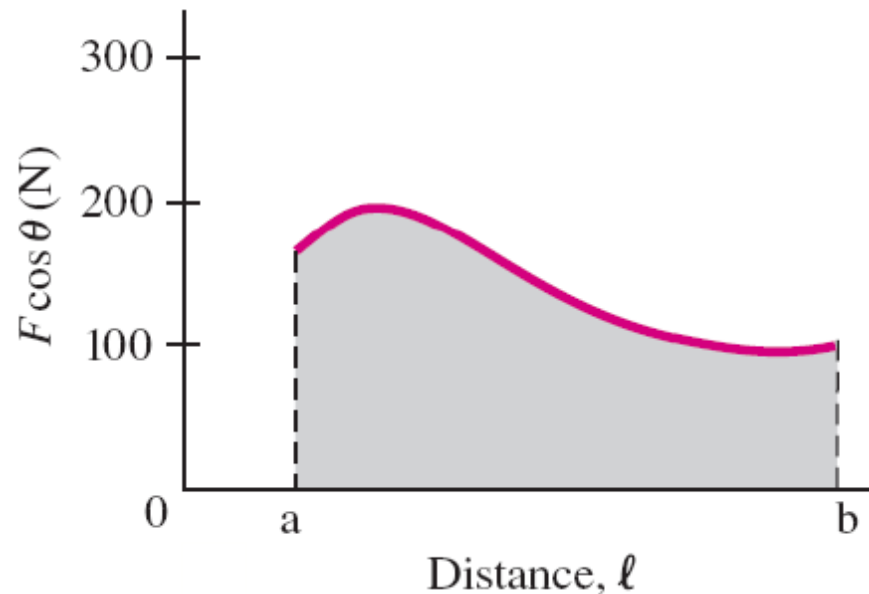


Εάν τα επιμέρους διαστήματα γίνουν απειροελάχιστα, το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα:

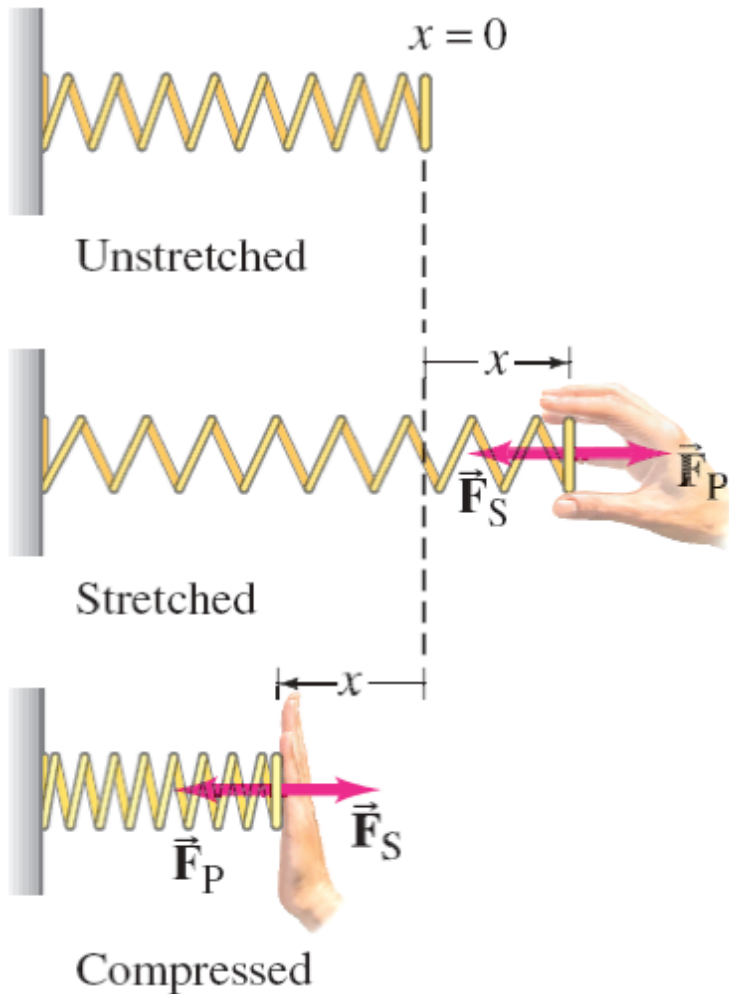
$$W = \lim_{\Delta \ell_i \rightarrow 0} \sum F_i \cos \theta_i \Delta \ell_i = \int_a^b F \cos \theta \, d\ell.$$

δηλ:

$$W = \int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\ell}.$$



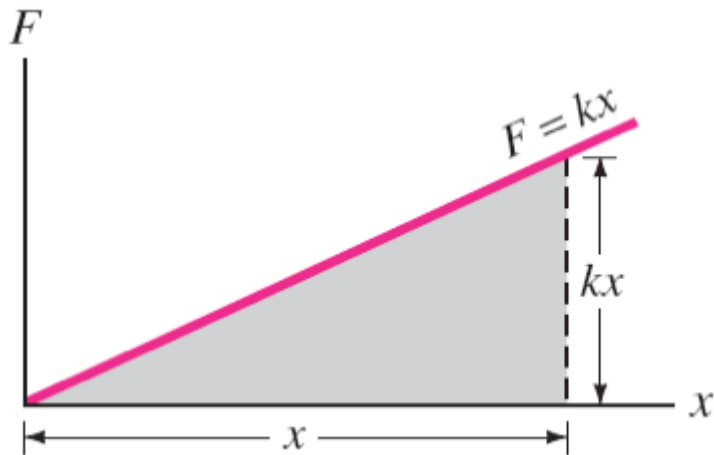
Το έργο ενός ελατηρίου:



Η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο είναι:

$$F_S = -kx.$$

Η δύναμη που ασκεί το χέρι μας είναι: $F_p = kx$



Η γραφική παράσταση της δύναμης του ελατηρίου είναι ευθεία ως προς τη μετατόπιση

$$W_P = \int_{x_a=0}^{x_b=x} [F_P(x) \hat{\mathbf{i}}] \cdot [dx \hat{\mathbf{i}}] = \int_0^x F_P(x) dx$$

$$= \int_0^x kx dx = \left. \frac{1}{2} kx^2 \right|_0^x = \frac{1}{2} kx^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 7.4

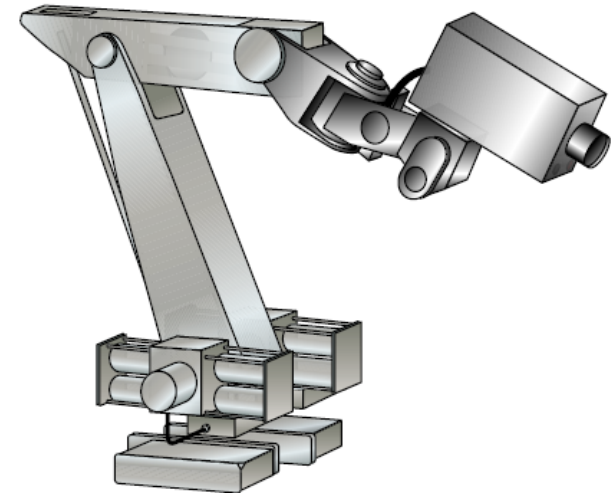
(α) Ένας φοιτητής τεντώνει ένα ελατήριο κατά 3.0 cm, με δύναμη 75 N. Πόσο έργο «έκανε»; (β) Εάν συμπιέζει το ελατήριο κατά 3.0 cm, τώρα πόσο έργο κάνει;

ΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 7.5

Η δύναμη που ελέγχει μια ρομποτική κάμερα παρακολούθησης δίδεται από την σχέση

$$F(x) = F_0 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{x^2}{x_0^2} \right),$$



Όπου $F_0 = 2.0 \text{ N}$, $x_0 = 0.0070 \text{ m}$, και x είναι η θέση της άκρης του βραχίονα. Εάν ο βραχίονας μετατοπιστεί από $x_1 = 0.010 \text{ m}$ στο $x_2 = 0.050 \text{ m}$, πόσο έργο έκανε το μοτέρ;

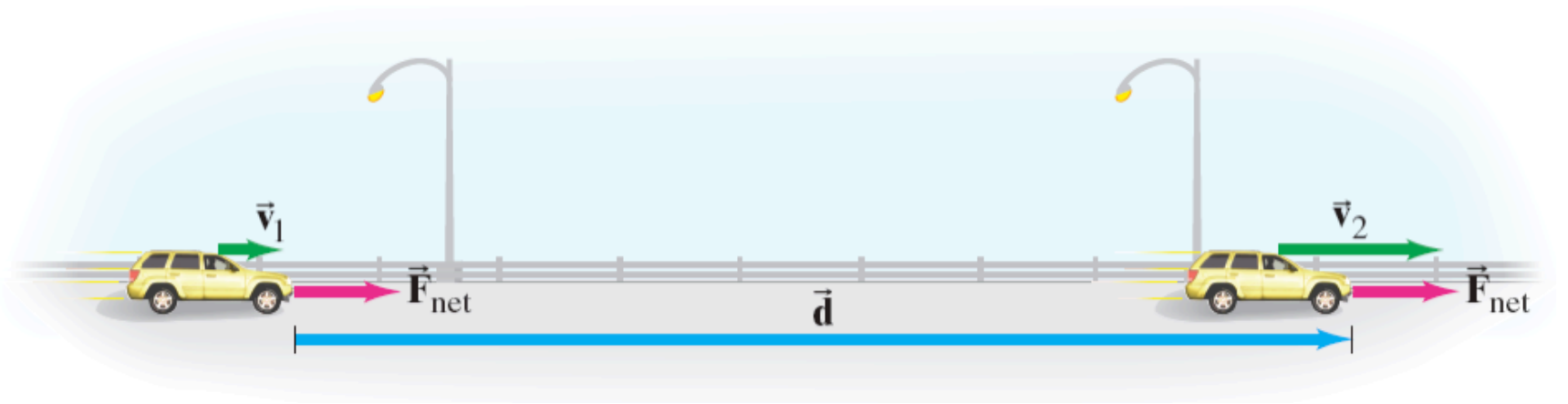
ΛΥΣΗ

7-4 Κινητική Ενέργεια, σχέση ενέργειας και έργου

Η **Ενέργεια** ορίζεται παραδοσιακά ως η ικανότητα να παραχθεί **έργο**. Βέβαια είδαμε ότι όλες οι δυνάμεις δεν παράγουν έργο (;). Όταν όμως αναφερόμαστε σε μηχανική ενέργεια, τότε ο παραπάνω ορισμός ισχύει.

Η Κινητική ενέργεια ορίζεται

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

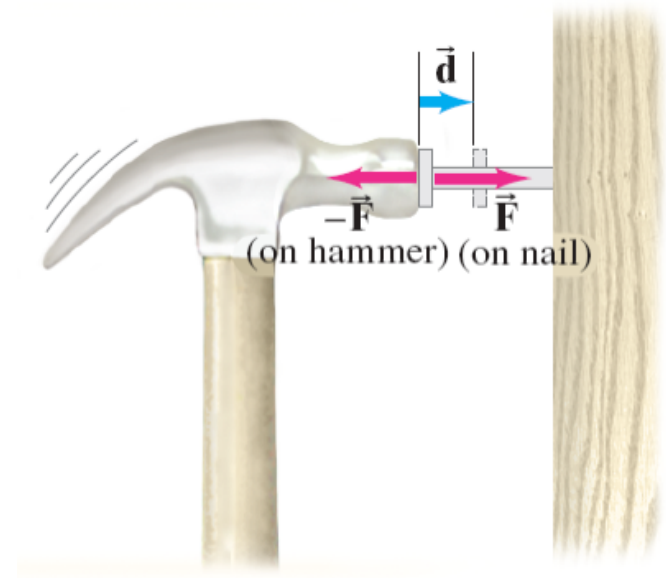


Το έργο είναι ίσο με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια:

$$W_{\text{net}} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

- **Θετικό έργο:** αύξηση της Κινητικής Ενέργειας
- **Αρνητικό έργο:** Μείωση της Κινητικής Ενέργειας

Οι μονάδες ενέργειας είναι ίδιες με τις μονάδες έργου δηλ. Joules



ΑΣΚΗΣΗ 7.6

Πετάμε ένα τόπι 145-g με ταχύτητα 25 m/s. (α) Πόση είναι η κινητική του ενέργεια (β) Πόσο έργο χρειάστηκε για την ρίψη;

ΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 7.7

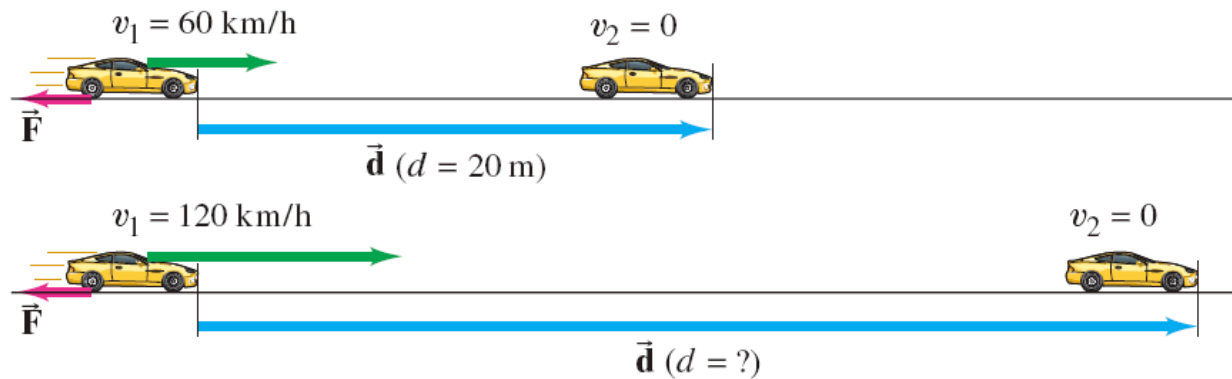
Πόσο έργο απαιτείται για να επιταχύνει ένα αυτοκίνητο 1000-kg από τα 20 m/s στα 30 m/s;



ΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 7.8

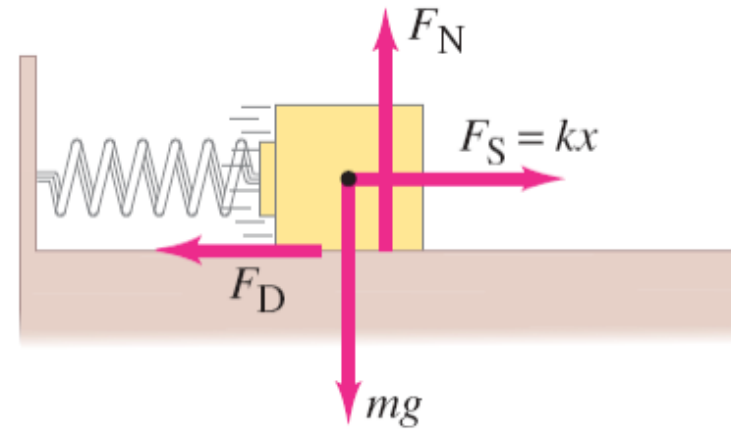
Ένα αυτοκίνητο ταξιδεύει με 60 km/h φρενάρει μέχρι ακινησίας απόσταση $d=20$ m. Εάν το αυτοκίνητο κινείται με διπλάσια ταχύτητα πόση απόσταση χρειάζεται για να σταματήσει; (υποθέτουμε ότι η απόδοση των φρένων είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα).



ΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 7.9

Το ελατήριο του σχήματος έχει σταθερά $k = 360 \text{ N/m}$. (α) Πόσο έργο απαιτείται για να συμπιεστεί το ελατήριο, από την κατάσταση ηρεμίας ($x = 0$) στα $x = 11.0 \text{ cm}$; (β) Εάν φορτώσουμε το συμπιεσμένο ελατήριο με «βόλι» 1.85-kg πόση ταχύτητα θα έχει το βόλι στη θέση $x = 0$; (αγνοούμε την τριβή). (γ) Επαναλαμβάνουμε το (β) αλλά υποθέτοντας ότι υπάρχει μια δύναμη αντίστασης (τριβής) $F_D = 7.0 \text{ N}$



ΛΥΣΗ