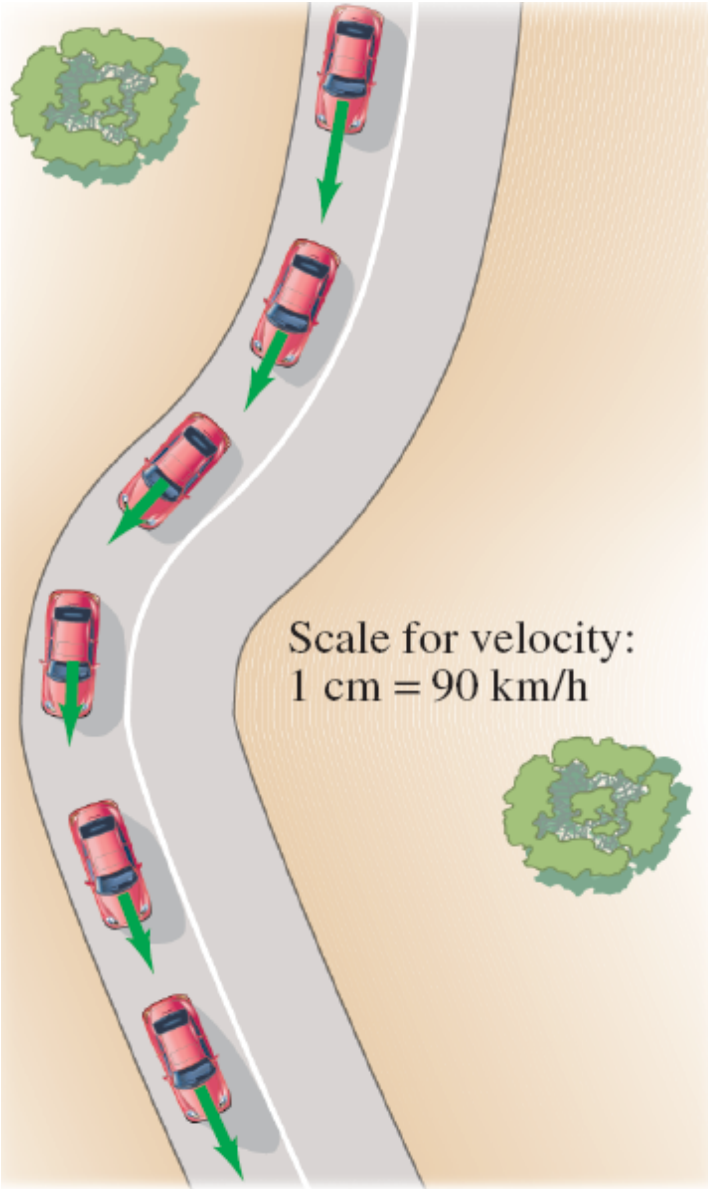
Κεφάλαιο 3

Κίνηση σε 2 και 3 διαστάσεις, Διανύσματα

Περιεχόμενα 3

- Διανύσματα και Βαθμωτές ποσότητες
- Πράξεις Διανυσμάτων –Γραφικές Παραστάσεις
- Μοναδιαία διανύσματα
- Κινηματική διανυσμάτων
- Κίνηση Βλημάτων
- Επίλυση κίνησης Βλημάτων
- Σχετική Ταχύτητα

3-1 Διανύσματα και Βαθμωτές Ποσότητες



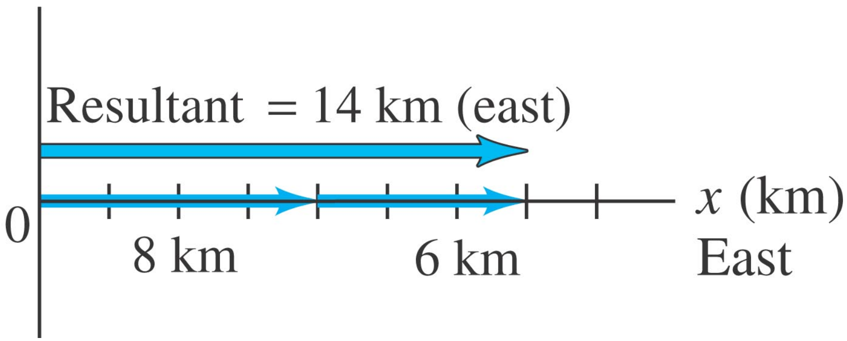
Το διάνυσμα έχει και μέγεθος (μέτρο) και διεύθυνση.

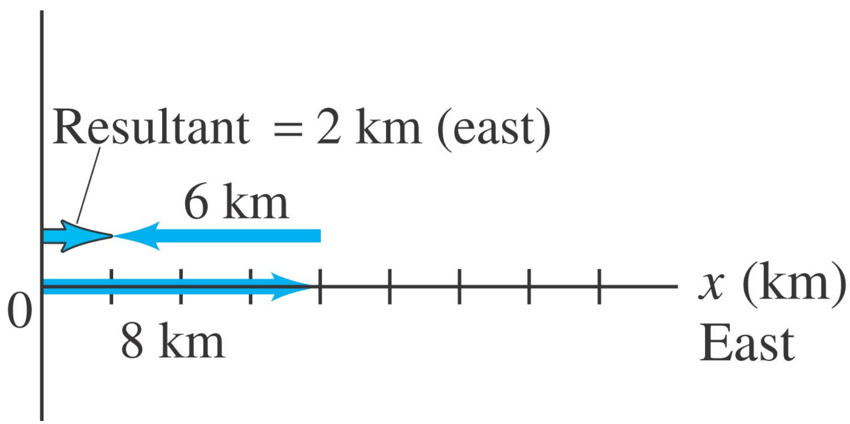
Ορισμένες Διανυσματικές Ποσότητες: μετατόπιση, ταχύτητα, δύναμη, ορμή.

Η βαθμωτή ποσότητα είναι ένας πραγματικός αριθμός – θετικός, μηδέν, αρνητικός.

Ορισμένες Βαθμωτές ποσότητες: μάζα, χρόνος, θερμοκρασία.

3-2 Πράξεις διανυσμάτων





Για μία διάσταση, πρόσθεση και αφαίρεση είναι οι μόνες πράξεις.

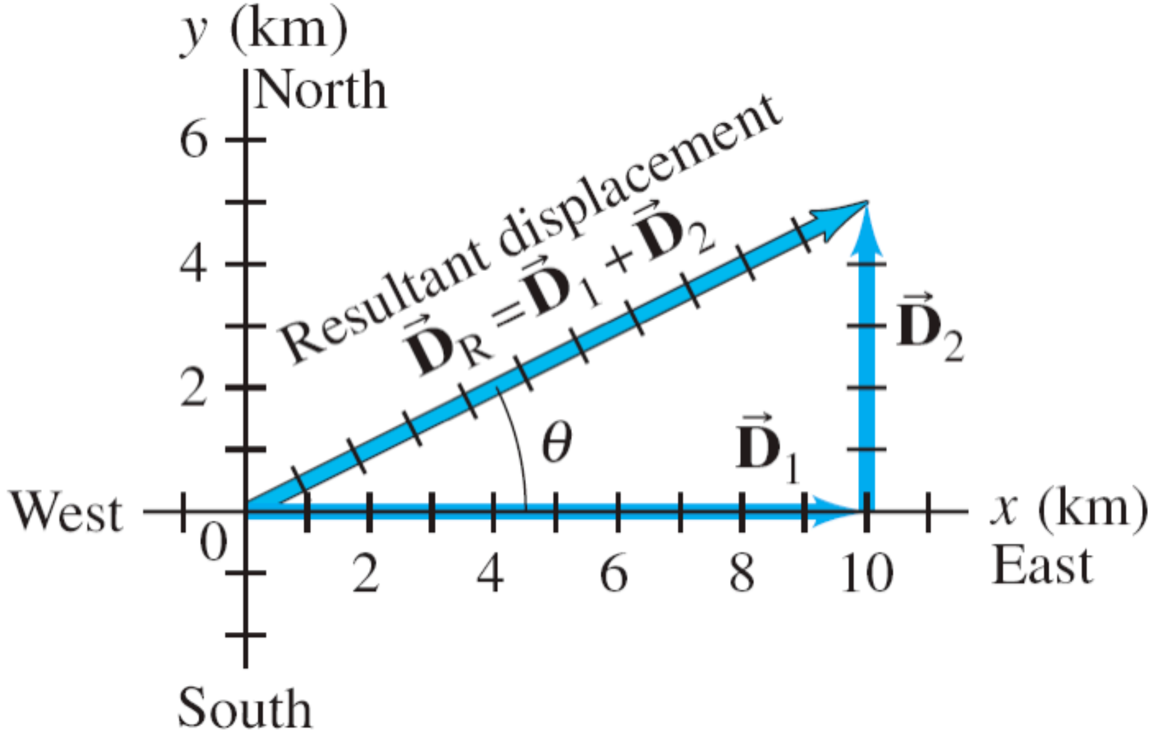
Προσοχή στο πρόσημο.

3-2 Πράξεις διανυσμάτων

Για 2 και 3 διαστάσεις το πρόβλημα γίνεται πιο σύνθετο.

Για κάθετα διανύσματα π.χ. κάνουμε χρήση του θεωρήματος του Πυθαγόρα.

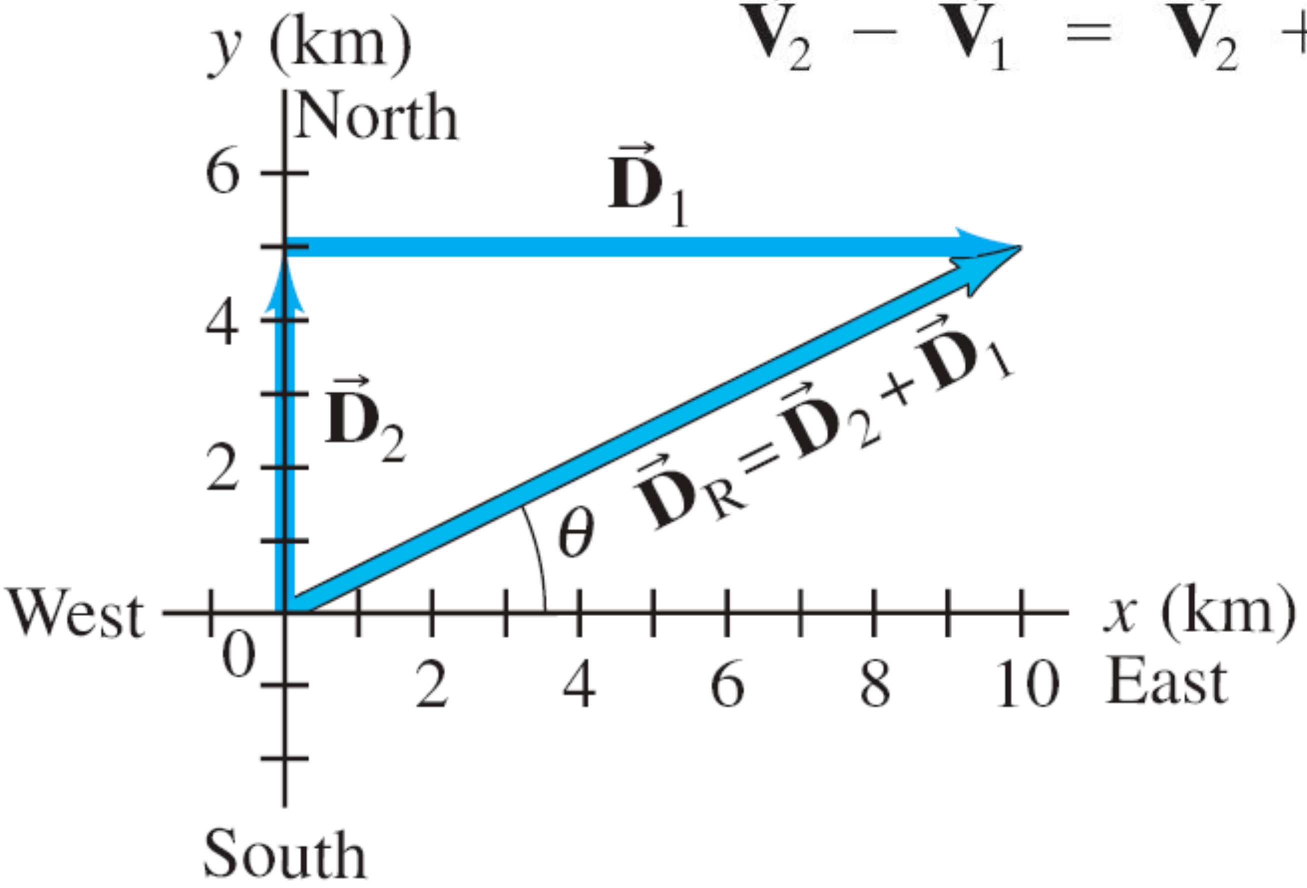
$$D_R = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$$



3-2 Πράξεις διανυσμάτων

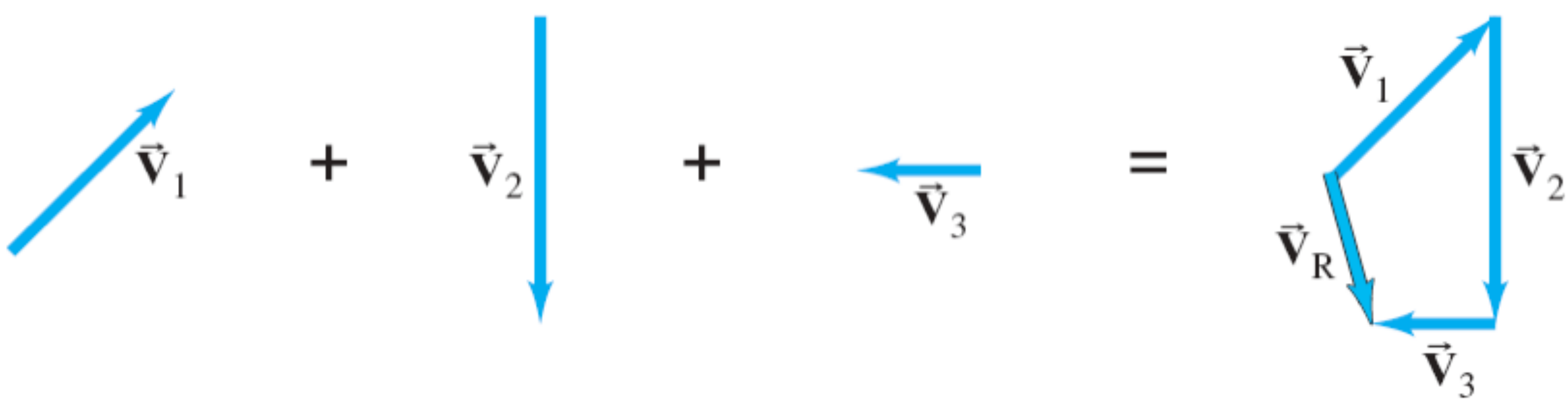
Για την πρόσθεση ισχύει η μεταθετική ιδιότητα (δεν έχει σημασία η σειρά):

$$\vec{\mathbf{V}}_2 - \vec{\mathbf{V}}_1 = \vec{\mathbf{V}}_2 + (-\vec{\mathbf{V}}_1).$$

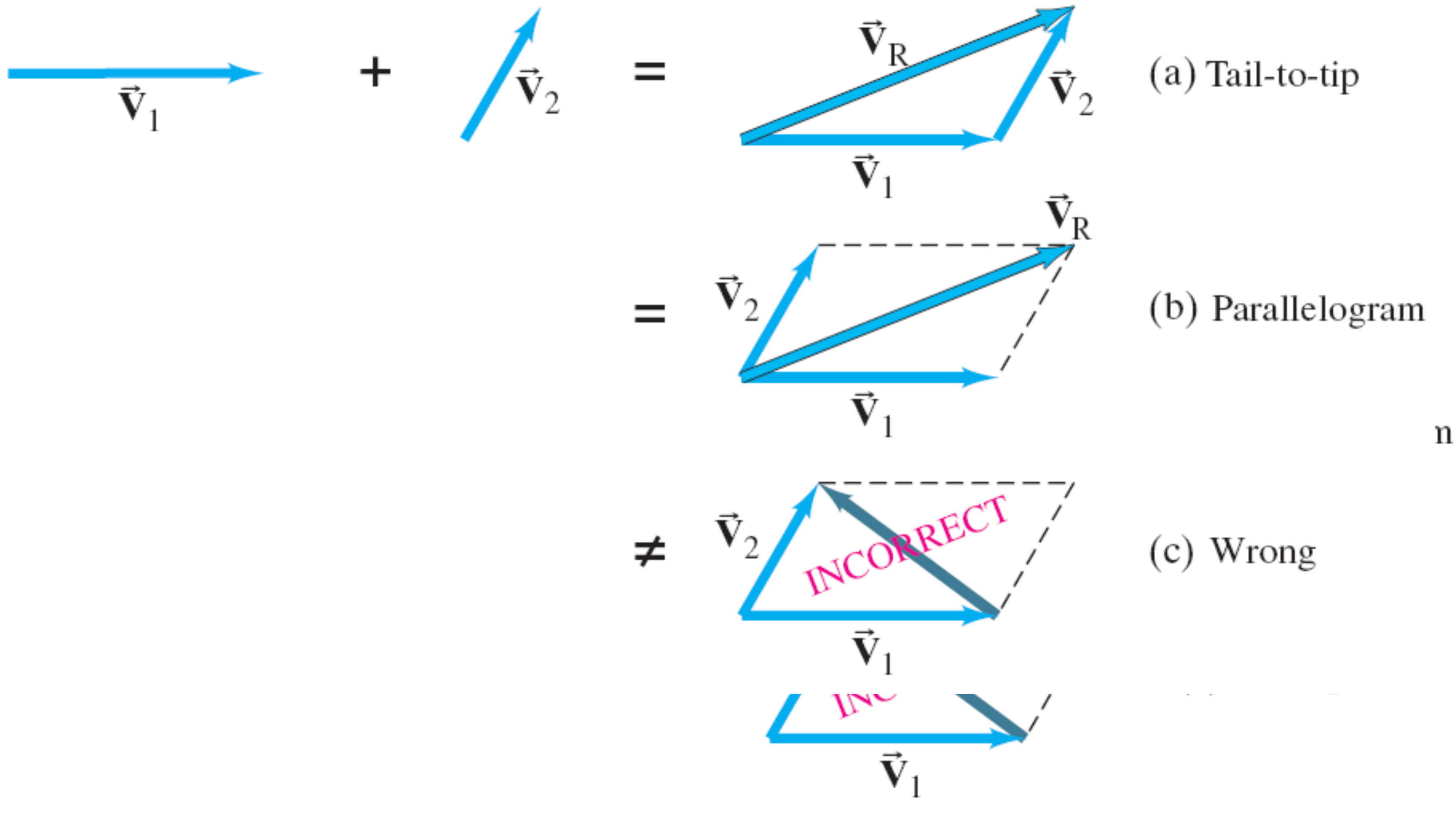


3-2 Πράξεις διανυσμάτων

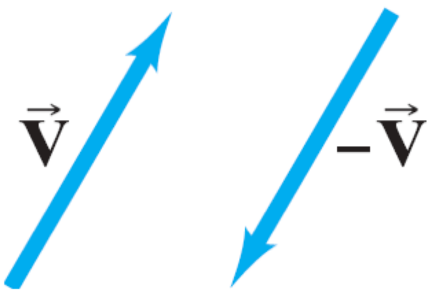
Όταν τα διανύσματα δεν είναι κάθετα τότε το άθροισμα και η διαφορά γίνεται με την εξής διαδικασία: Στο τέλος του ενός «τοποθετούμε την αρχή του άλλου»



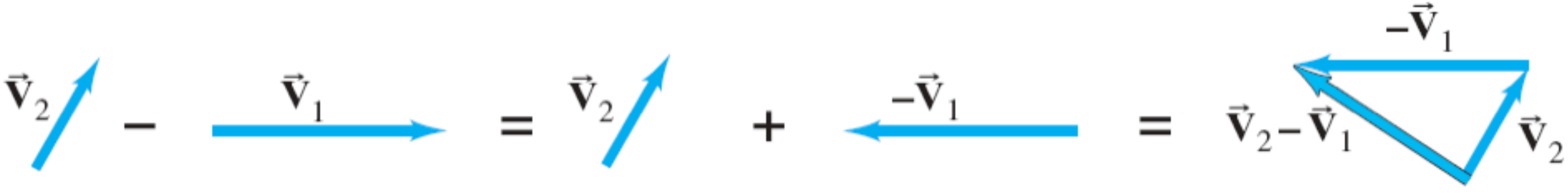
3-2 Πράξεις διανυσμάτων



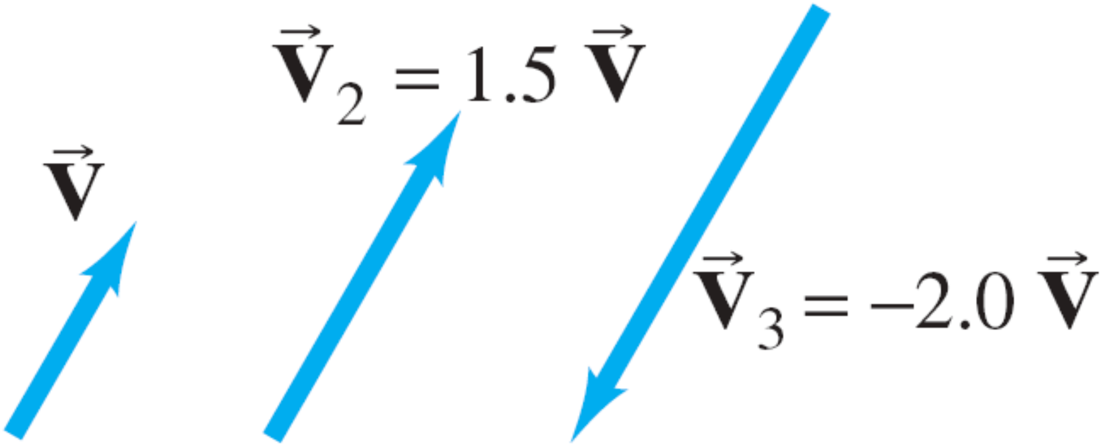
3-2 Πράξεις διανυσμάτων



Η αφαίρεση είναι όπως η πρόσθεση με αλλαγή διεύθυνσης του διανύσματος που «αφαιρείται»

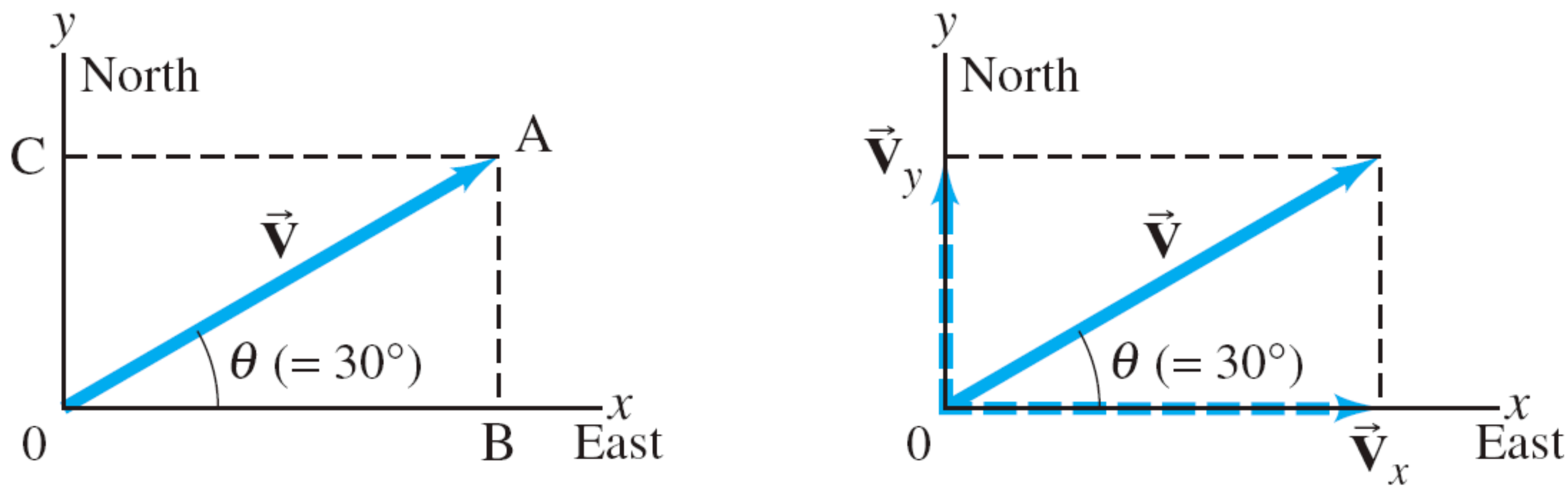


3-3 Πολλαπλασιασμός διανυσμάτων με παράγοντα

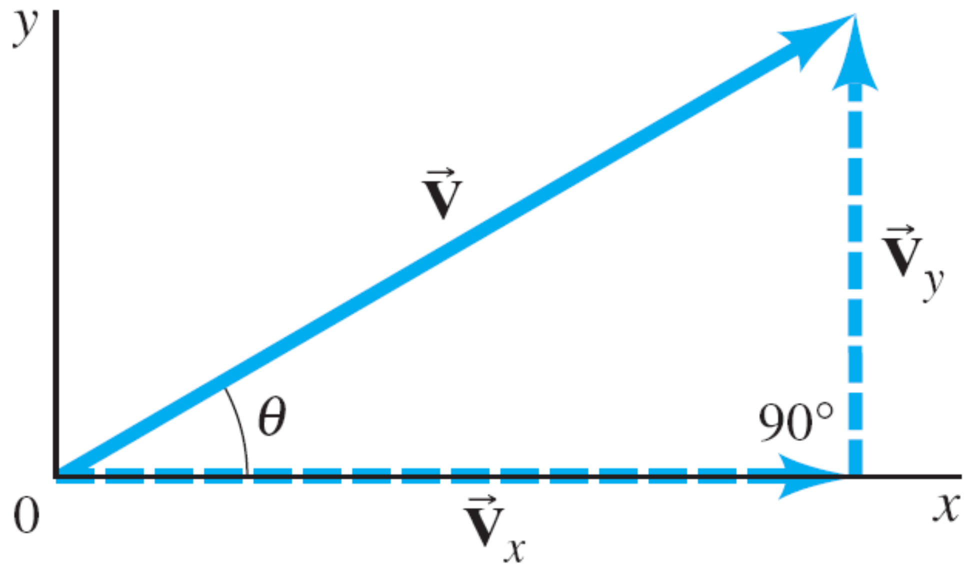


3-4 Ανάλυση διανύσματος σε Συνιστώσες για 2 Διαστάσεις

Κάθε διάνυσμα στο επίπεδο μπορεί να αναλυθεί σε 2 *κάθετες* συνιστώσες.



3-4 Ανάλυση διανύσματος σε Συνιστώσες για 2 Διαστάσεις



$$\sin\theta = \frac{V_y}{V}$$

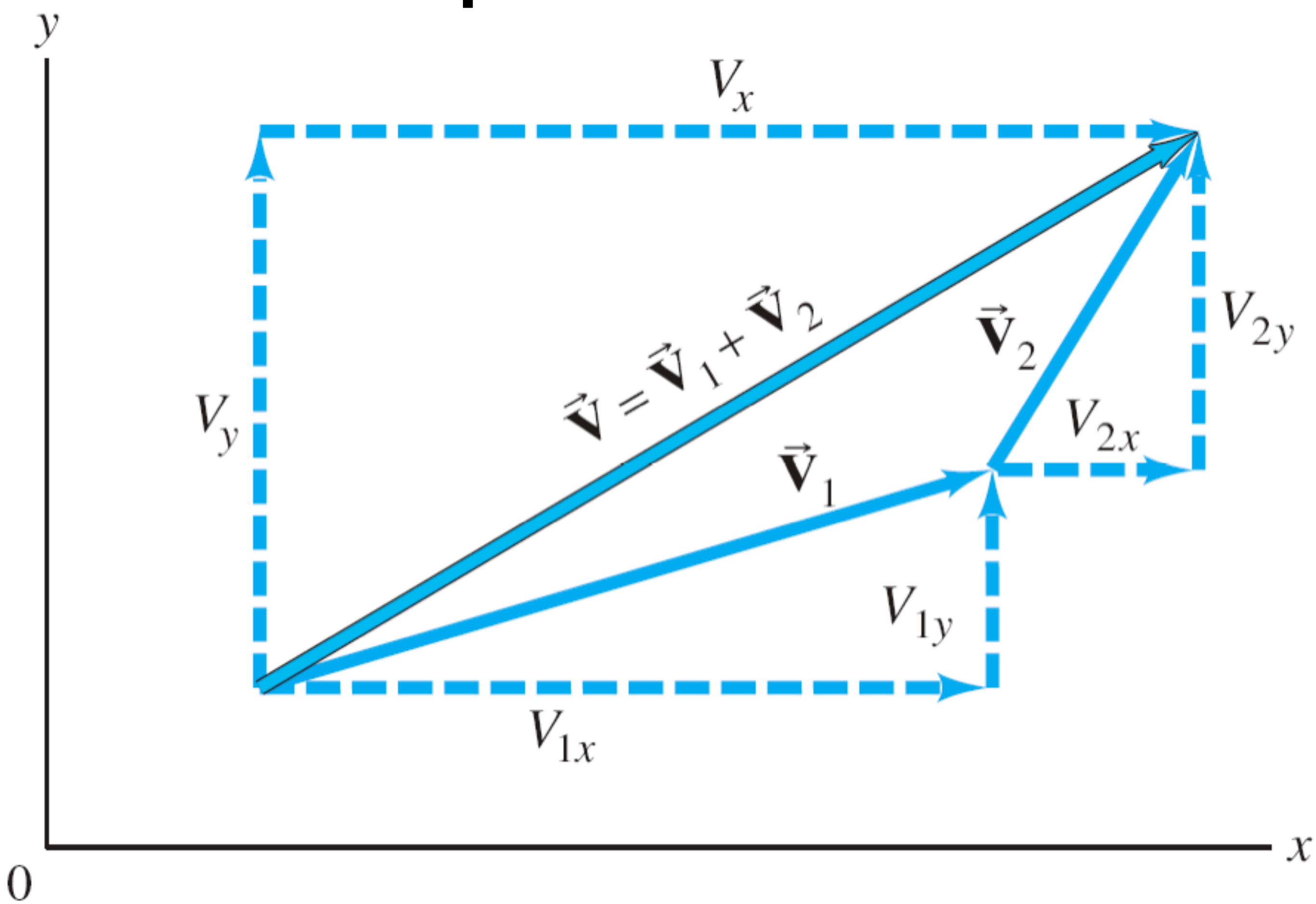
$$\cos\theta = \frac{V_x}{V}$$

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2$$

3-4 Ανάλυση διανύσματος σε Συνιστώσες για 2 Διαστάσεις

Οι συνιστώσες είναι στην ουσία μονοδιάστατα διανύσματα και επομένως η πράξεις είναι απλές. Το τελικό αποτέλεσμα είναι



Άθροισμα διανυσμάτων:

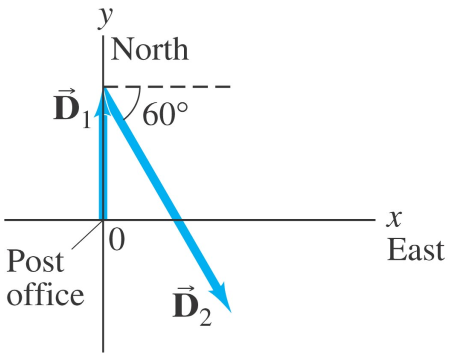
1. Σχεδιάζουμε τα διανύσματα.
2. Διαλέγουμε άξονες *x* και *y* (συντεταγμένες).
3. Αναλύουμε τα διανύσματα στις επιμέρους συνιστώσες ως προς του άξονες *x* και *y*.
4. Υπολογίζουμε το μέτρο (και πρόσημο) της κάθε συνιστώσας τριγωνομετρικά.
5. Προσθέτουμε τις επιμέρους συνιστώσες ανά διεύθυνση.
6. Βρίσκουμε το τελικό αποτέλεσμα ξανά τριγωνομετρικά.

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

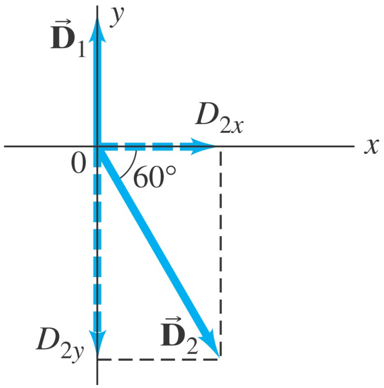
$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

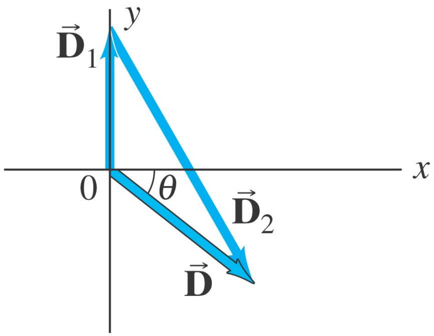
ΑΣΚΗΣΗ 3.1

Ο ταχυδρόμος φεύγει από το ταχυδρομείο και οδηγεί 22.0 km προς τον Βορά. Στη συνέχεια κατευθύνεται 60.0° νοτιοανατολικά για 47.0 km. Βρείτε την τελική της μετατόπιση από το ταχυδρομείο.



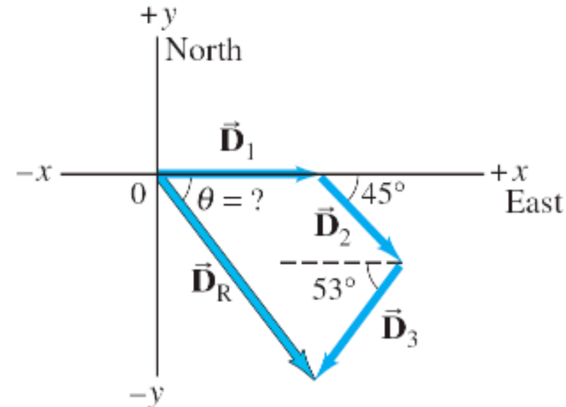
ΛΥΣΗ



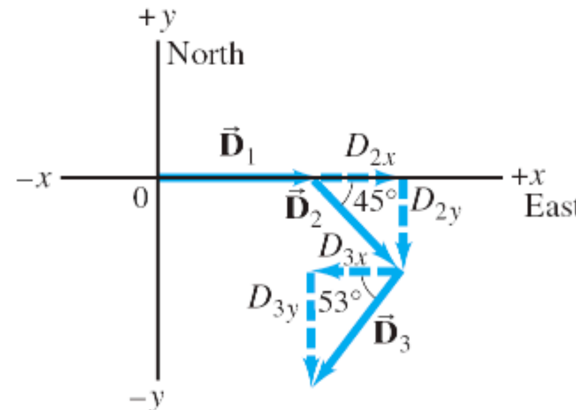


ΑΣΚΗΣΗ 3.2

Εάν ταξίδι με αεροπλάνο περιέχει τρεις στάσεις. Η πρώτη στάση 620 km ανατολικά. Η δεύτερη 440 km νοτιοανατολικά και η τρίτη 53° νοτιοδυτικά για 550 km. Βρείτε την μετατόπιση του αεροπλάνου.

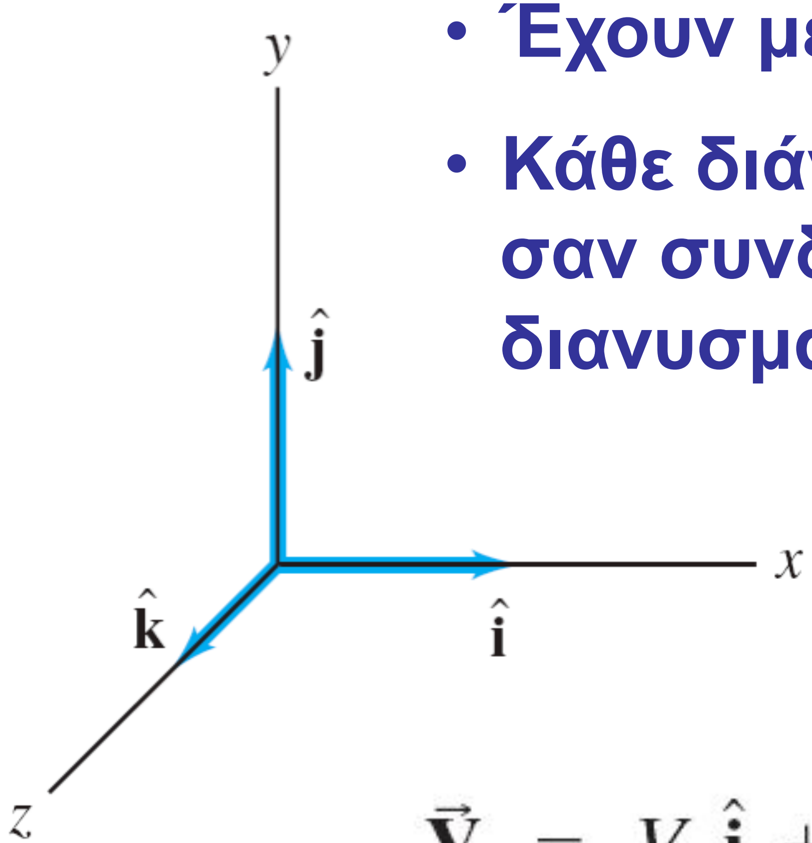


ΛΥΣΗ



Vector	Components x (km)	y (km)
$\vec{D}_1$	620	0
$\vec{D}_2$	311	−311
$\vec{D}_3$	−331	−439
$\vec{D}_R$	600	−750

3-5 Μοναδιαία Διανύσματα



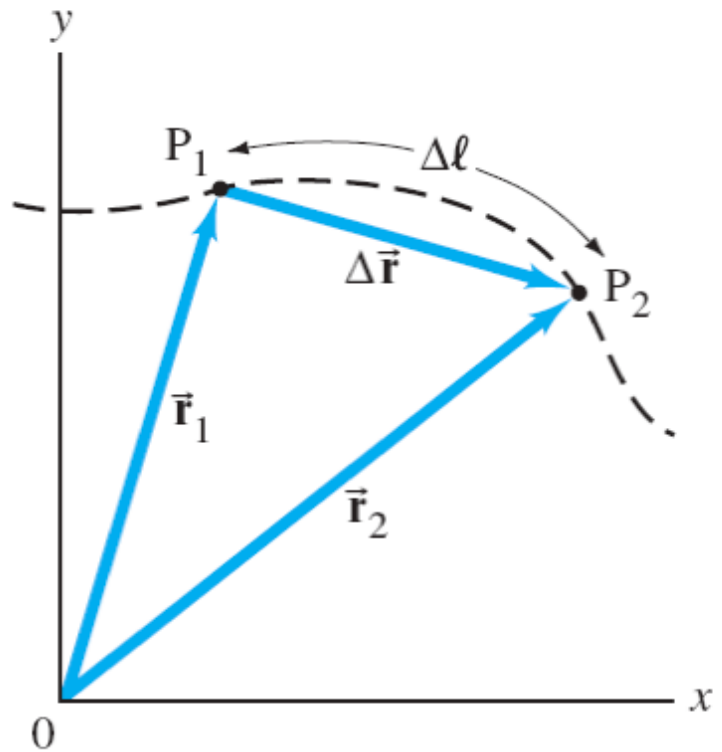
- Έχουν μέτρο (μήκος) 1.
- Κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφτεί σαν συνδυασμός μοναδιαίων διανυσμάτων:

$$\vec{\mathbf{V}} = V_x\hat{\mathbf{i}} + V_y\hat{\mathbf{j}} + V_z\hat{\mathbf{k}}.$$

3-6 Κινηματική Διανυσμάτων

Η μετατόπιση ενός διανύσματος δίδεται από τη σχέση

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 .$$



Η ταχύτητα και η επιτάχυνση μπορούν να γραφτούν σαν συνάρτηση των μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}};$$

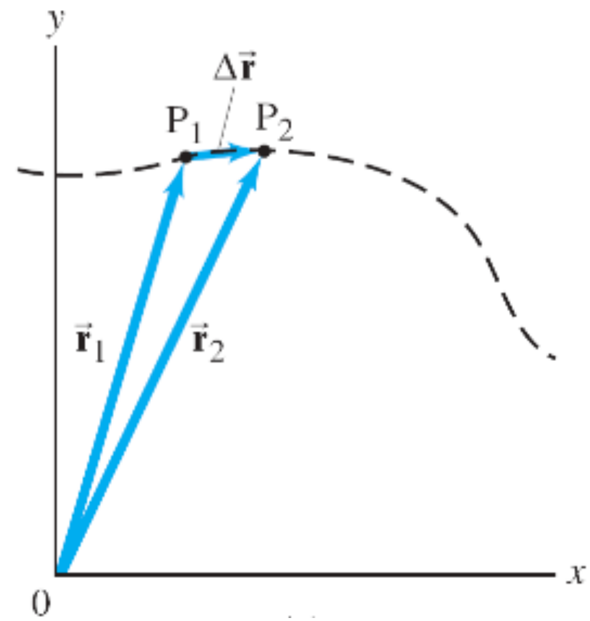
$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}.$$

TABLE 3–1 Kinematic Equations for Constant Acceleration in 2 Dimensions

x Component (horizontal)		y Component (vertical)
$v_x = v_{x0} + a_x t$	(Eq. 2–12a)	$v_y = v_{y0} + a_y t$
$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	(Eq. 2–12b)	$y = y_0 + v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$
$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	(Eq. 2–12c)	$v_y^2 = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0)$

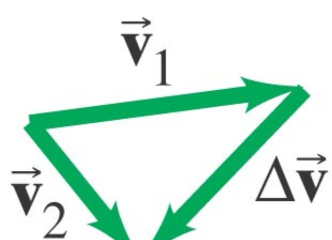
Η στιγμιαία ταχύτητα ορίζεται

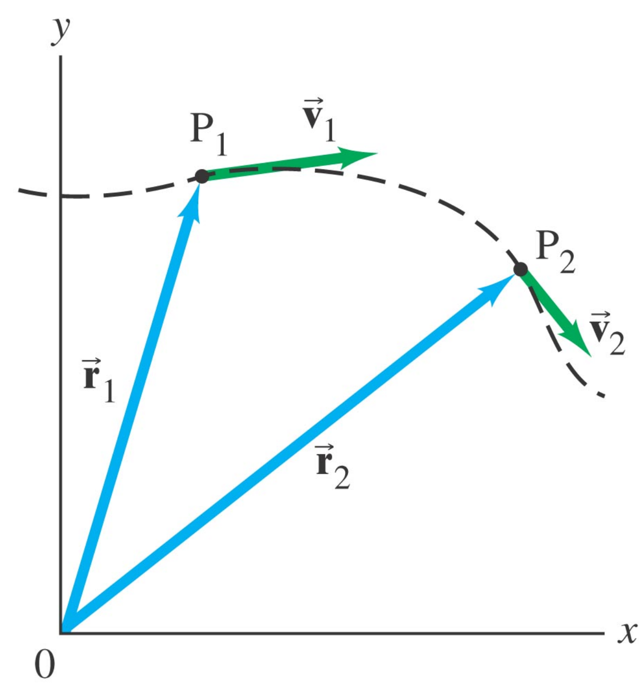
$$\vec{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$$



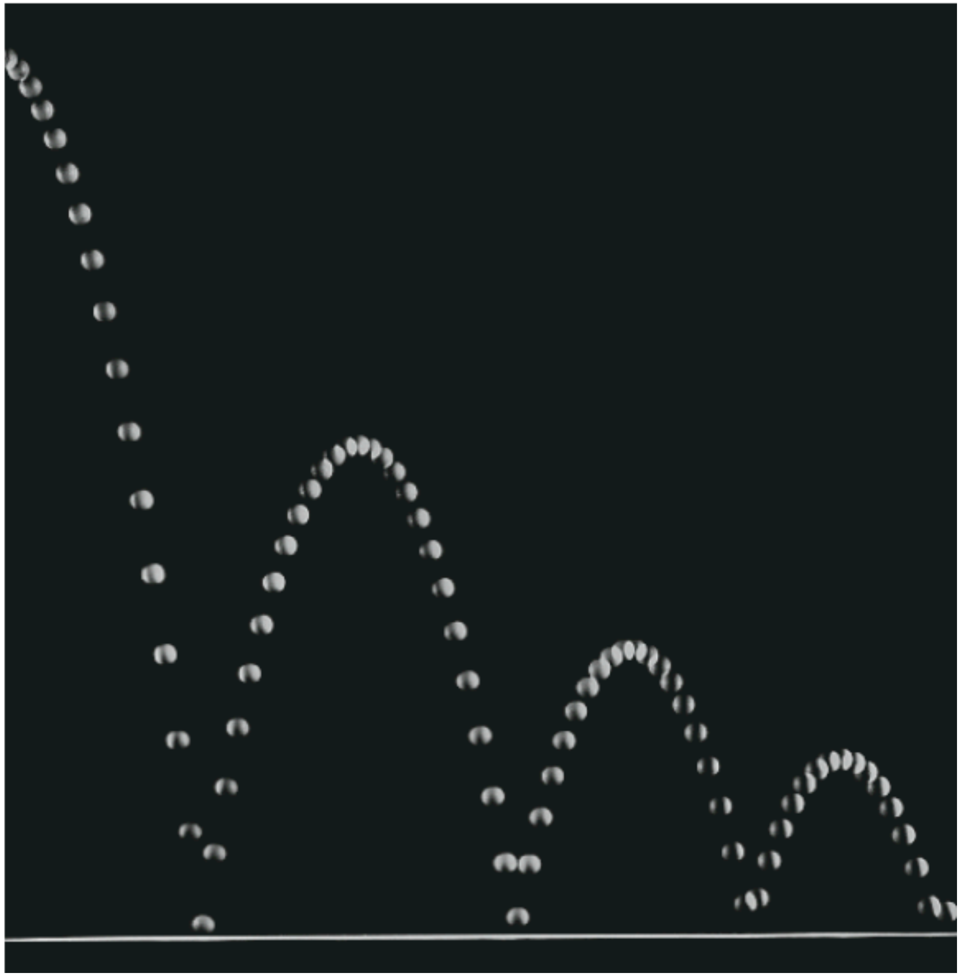
Η στιγμιαία επιτάχυνση ορίζεται

$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$



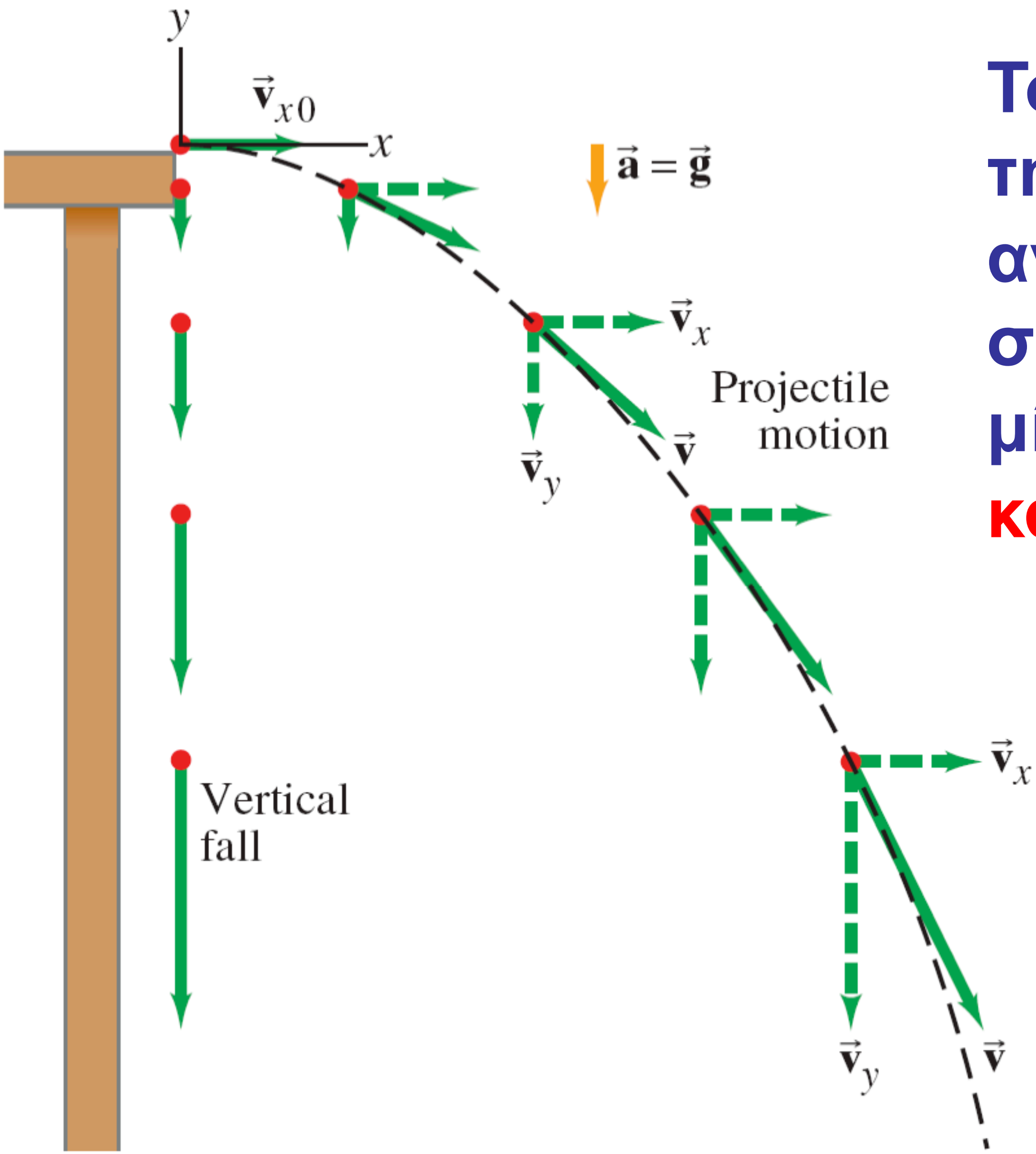


3-7 Κίνηση Βλημάτων

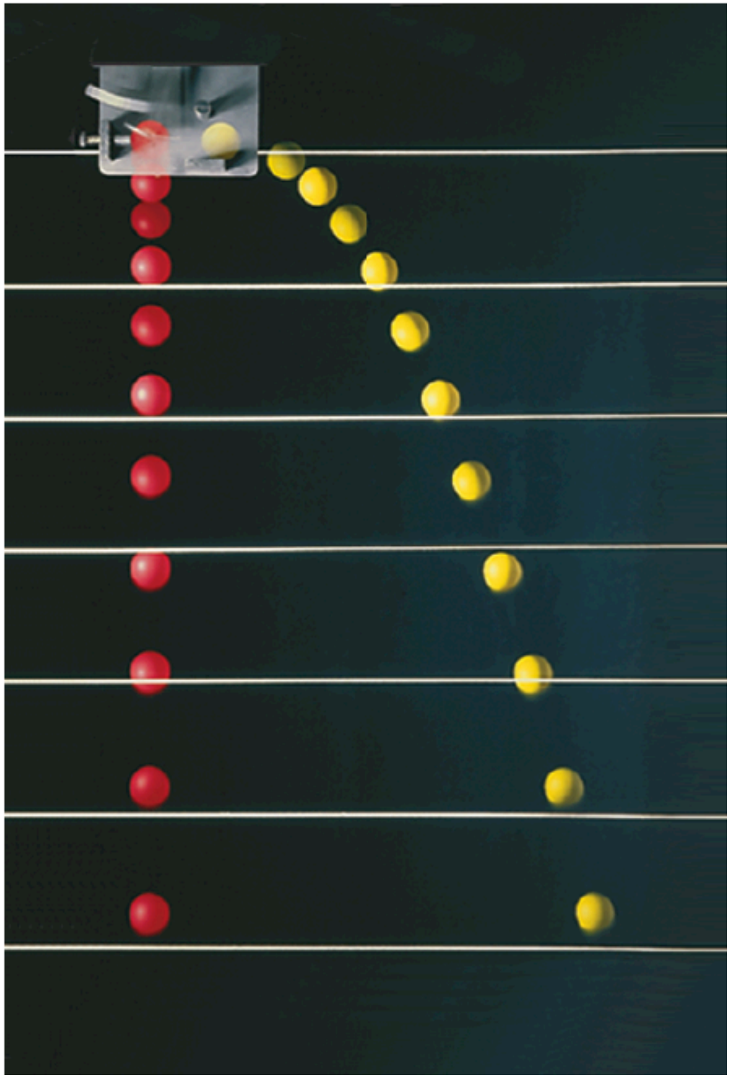


Το βλήμα είναι το σωματίδιο που κινείται σε δύο διαστάσεις λόγω της βαρύτητας της γης.

3-7 Κίνηση Βλημάτων



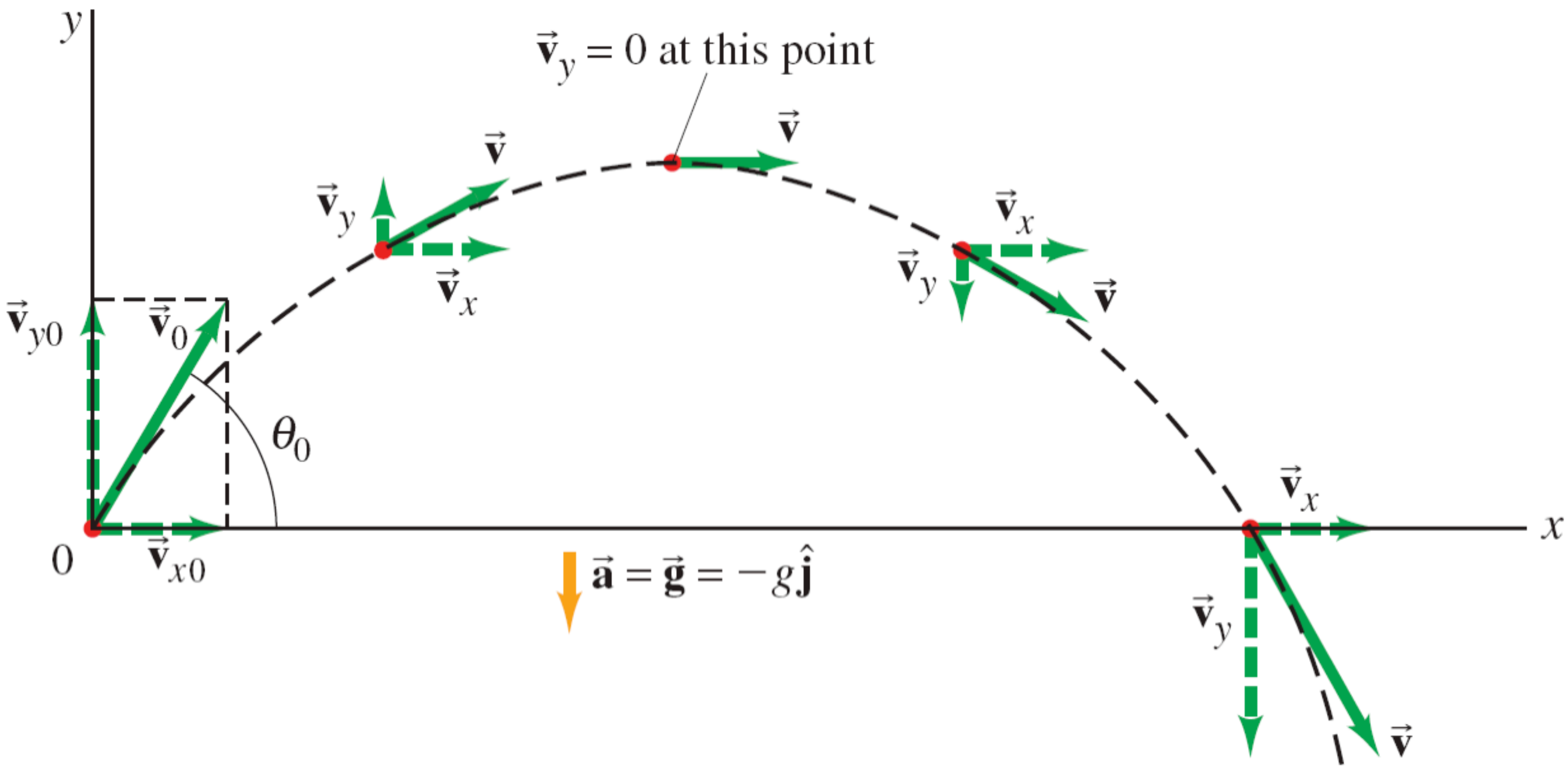
Το μυστικό κατανόησης της κίνησης είναι η ανάλυση της κίνησης σε δύο συνιστώσες: μία οριζόντια και μια κατακόρυφη.



Η ταχύτητα στην οριζόντια διεύθυνση είναι σταθερή (x-συνιστώσα) ενώ στην κατακόρυφη συνιστώσα έχουμε κίνηση με σταθερή επιτάχυνση.

Στη φωτογραφία βλέπουμε ότι στην κάθετη διεύθυνση οι δύο μπάλες έχουν την ίδια μετατόπιση, αν και οι αρχικές ταχύτητές τους ήταν διαφορετικές.

Για εκτόξευση ενός αντικειμένου με αρχική γωνία θ_0, η διαδικασία ανάλυσης είναι ίδια με τη διαφορά ότι υπάρχει και κατακόρυφη συνιστώσα.



3-8 Επίλυση προβλημάτων κίνησης Βλημάτων

Η κίνηση των βλημάτων είναι κίνηση σε δύο διαστάσεις με σταθερή κατακόρυφη επιτάχυνση *g*

TABLE 3–2 Kinematic Equations for Projectile Motion
(y positive upward; $a_x = 0,\ a_y = -g = -9.80\ \mathrm{m/s^2}$)

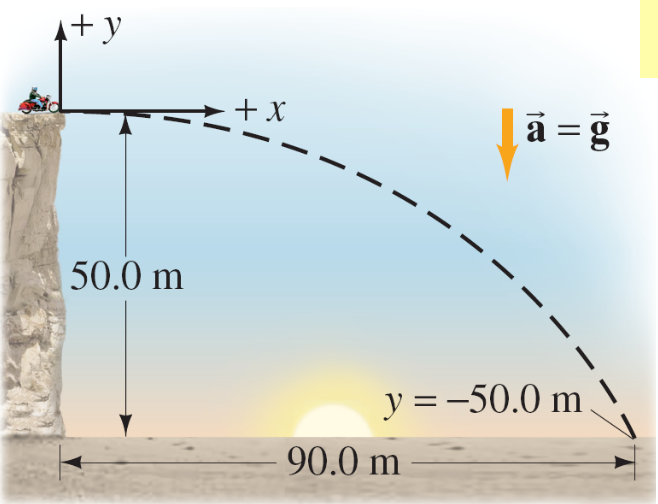
Horizontal Motion ($a_x = 0,\ v_x =$ constant)		Vertical Motion† ($a_y = -g =$ constant)
$v_x = v_{x0}$	(Eq. 2–12a)	$v_y = v_{y0} - gt$
$x = x_0 + v_{x0}t$	(Eq. 2–12b)	$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$
	(Eq. 2–12c)	$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$

† If y is taken positive downward, the minus (−) signs in front of g become plus (+) signs.

ΑΣΚΗΣΗ 3.3

Ένας κασκαντέρ κάνει άλμα με μηχανή από ένα γκρεμό ύψους 50.0-m-. Με πόση ταχύτητα πρέπει να εκτοξευθεί από τον γκρεμό ώστε να προσγειωθεί στα 90.0 m;

Ο χρόνος προσδιορίζεται πάντα από την κατακόρυφη συνιστώσα



Known	Unknown
$x_0 = y_0 = 0$	v_{x0}
$x = 90.0\ \text{m}$	t
$y = -50.0\ \text{m}$	
$a_x = 0$	
$a_y = -g = -9.80\ \text{m/s}^2$	
$v_{y0} = 0$	

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 \\ &= 0 + \ \ 0 \ \ + \tfrac{1}{2}(-g)t^2 \end{aligned}$$

or

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2.$$

We solve for t and set $y = -50.0\ \text{m}$:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{-g}} = \sqrt{\frac{2(-50.0\ \text{m})}{-9.80\ \text{m/s}^2}} = 3.19\ \text{s}.$$

To calculate the initial velocity, v_{x0}, we again use Eq. 2–12b, but this time for the horizontal (x) direction, with $a_x = 0$ and $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \\ &= 0 \ + v_{x0}t + 0 \end{aligned}$$

or

$$x = v_{x0}t.$$

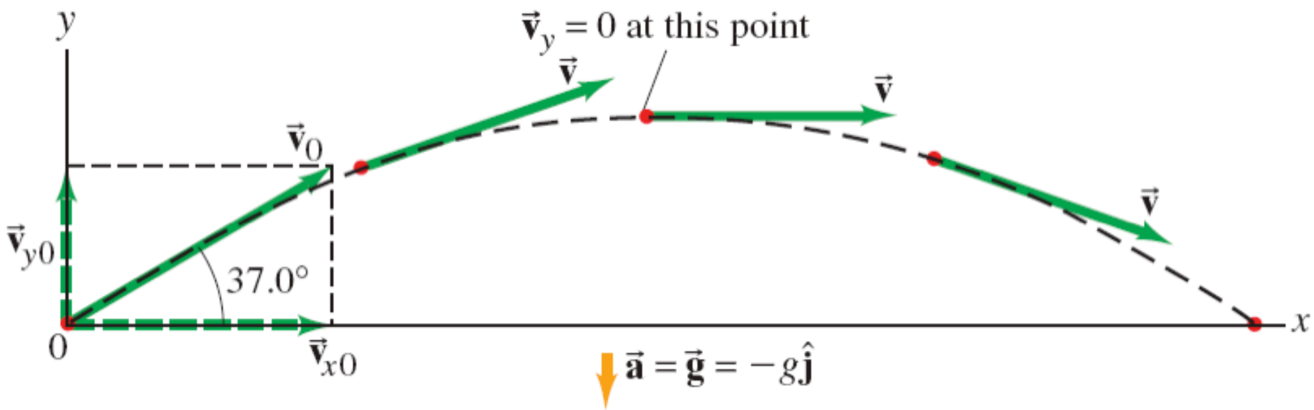
Then

$$v_{x0} = \frac{x}{t} = \frac{90.0\ \text{m}}{3.19\ \text{s}} = 28.2\ \text{m/s},$$

which is about 100 km/h (roughly 60 mi/h).

ΑΣΚΗΣΗ 3.4

Κατά το ελεύθερο χτύπημα μιας μπάλας ποδοσφαίρου, αυτή φεύγει με γωνία θ_0 = 37.0° και με ταχύτητα 20.0 m/s. Βρείτε (α) το μέγιστο ύψος που θα φτάσει (β) το χρόνο πριν φτάσει στο έδαφος, (γ) πόσο μακριά θα φτάσει (δ) τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης στο μέγιστο ύψος. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα και ότι η μπάλα δεν περιστρέφετα



ΛΥΣΗ

Παραδείγματα εφαρμογών (μη στρατιωτικών).

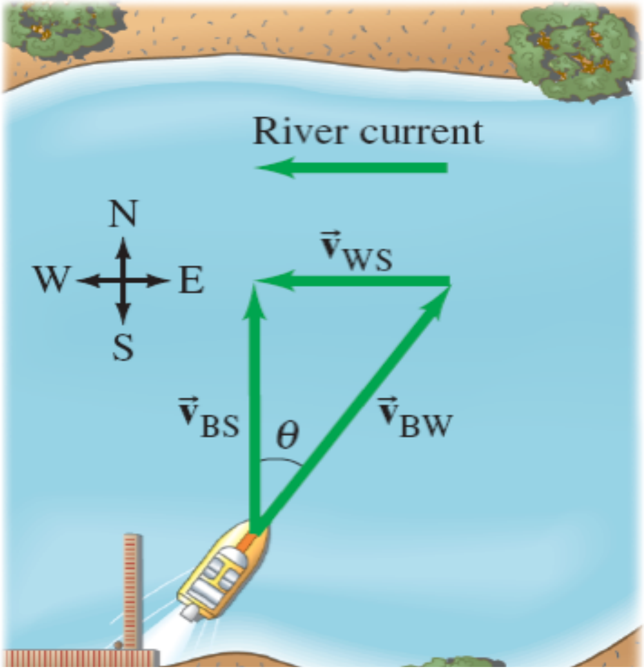
Παρατηρείστε τις επιπτώσεις αντίστασης του αέρα.

3-9 Σχετική Ταχύτητα

Η σχετική ταχύτητα δύο διανυσμάτων είναι η διαφορά τους

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Η ταχύτητα της βάρκας σε σχέση με το νερό είναι v_{BW} = 1.85 m/s. Εάν θέλουμε η βάρκα να κινηθεί ακριβώς απέναντι (κάθετα), ποια πρέπει να είναι η γωνία πλεύσης όταν η ταχύτητα του ποταμού είναι v_{WS} = 1.20 m/s



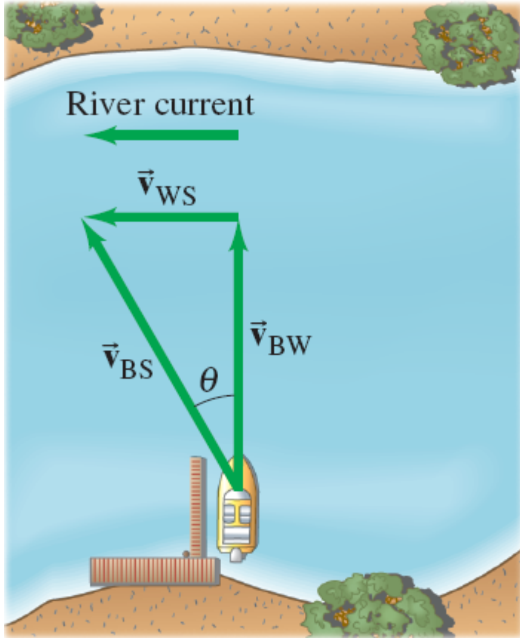
$$\vec{v}_{BS} = \vec{v}_{BW} + \vec{v}_{WS}$$

$$\sin\theta = \frac{v_{WS}}{v_{BW}} = \frac{1.20\ \mathrm{m/s}}{1.85\ \mathrm{m/s}} = 0.6486.$$

Thus $\theta = 40.4°$, so the boat must head upstream at a 40.4° angle.

ΑΣΚΗΣΗ 3.5

Η βάρκα της προηγούμενης άσκησης (v_{BW} = 1.85 m/s) κατευθύνεται απέναντι ενός ρεύματος 1.20 m/s. (α) Ποια είναι η ταχύτητα (μέτρο και κατεύθυνση) σε σχέση με τη ακτή; (β) Εάν το πλάτος του ποταμού είναι 110 m πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να περάσει απέναντι και σε ποιο σημείο θα δέσει;



ΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 3.6

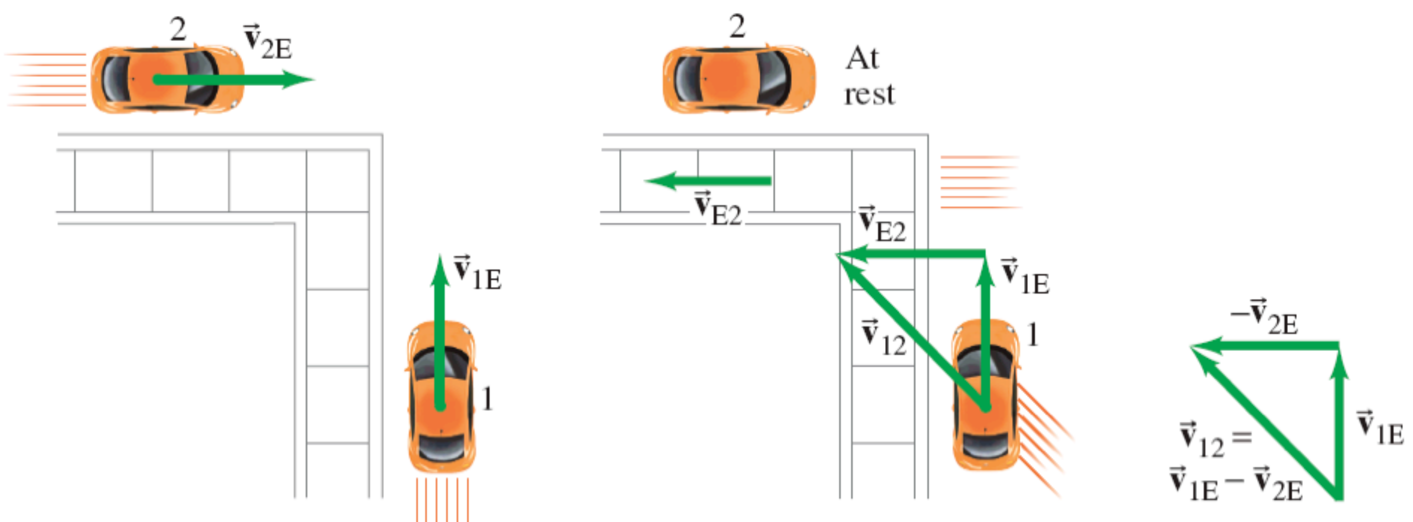
Βρείτε τη σχετική ταχύτητα των δύο αυτοκινήτων στη διασταύρωση τα οποία κινούνται με 40.0 km/h. Ποια είναι η σχετική ταχύτητα σαν συνάρτηση της γωνία τους;

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_{1E} - \vec{v}_{2E} \Rightarrow (\vec{v}_{12})^2 = (\vec{v}_{1E} - \vec{v}_{2E})^2$$

$$(\vec{v}_{12})^2 = (\vec{v}_{1E})^2 + (\vec{v}_{2E})^2 - 2\vec{v}_{1E} \cdot \vec{v}_{2E}$$

$$= (\vec{v}_{1E})^2 + (\vec{v}_{2E})^2 - 2|\vec{v}_{1E}||\vec{v}_{2E}|\cos\theta$$

$$|\vec{v}_{12}| = \sqrt{(\vec{v}_{1E})^2 + (\vec{v}_{2E})^2 - 2|\vec{v}_{1E}||\vec{v}_{2E}|\cos\theta}$$



$$\left|\vec{v}_{12}\right| = \sqrt{\left(\vec{v}_{1E}\right)^2 + \left(\vec{v}_{2E}\right)^2 - 2\left|\vec{v}_{1E}\right|\left|\vec{v}_{2E}\right|\cos\theta}$$

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \left|\vec{v}_{12}\right| = \sqrt{\left(\vec{v}_{1E}\right)^2 + \left(\vec{v}_{2E}\right)^2 - 2\left|\vec{v}_{1E}\right|\left|\vec{v}_{2E}\right|\underbrace{\cos(0)}_{1}})$$

$$= \sqrt{\left(\vec{v}_{1E}\right)^2 + \left(\vec{v}_{2E}\right)^2 - 2\left|\vec{v}_{1E}\right|\left|\vec{v}_{2E}\right|} \underbrace{=}_{|v_{1E}|=|v_{2E}|} 0$$

$$\theta = 180^\circ \Rightarrow \left|\vec{v}_{12}\right| = \sqrt{\left(\vec{v}_{1E}\right)^2 + \left(\vec{v}_{2E}\right)^2 - 2\left|\vec{v}_{1E}\right|\left|\vec{v}_{2E}\right|\underbrace{\cos(180)}_{-1}} = 2\left|v_{1E}\right|$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \left|\vec{v}_{12}\right| = \sqrt{\left(\vec{v}_{1E}\right)^2 + \left(\vec{v}_{2E}\right)^2} = \left|v_{1E}\right|\sqrt{2}$$