Κεφάλαιο 2

Κίνηση σε μία διάσταση

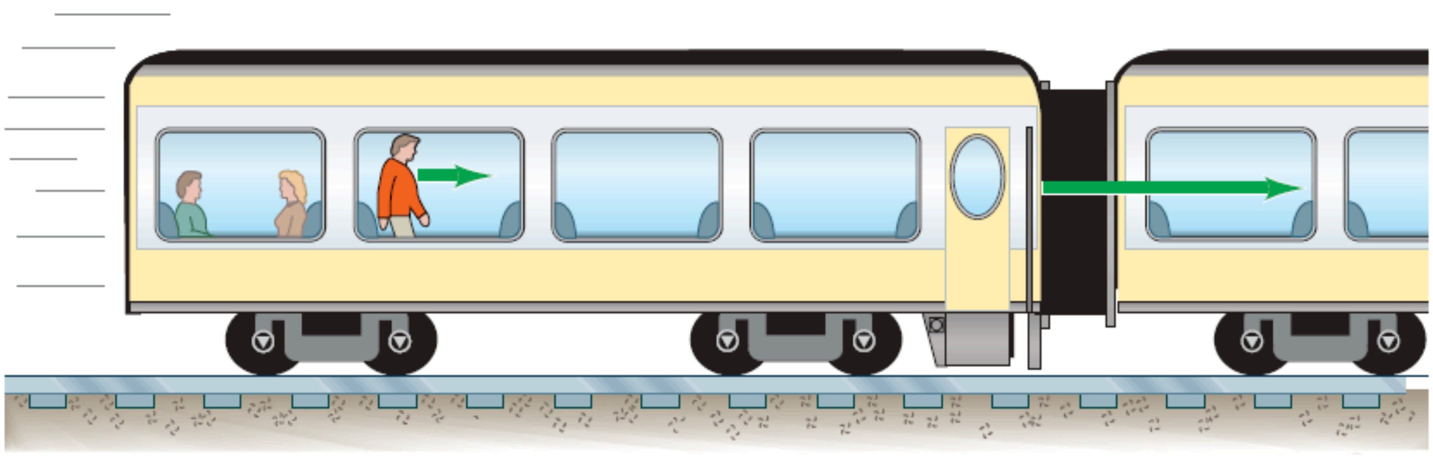
Περιεχόμενα Κεφαλαίου 2

- Συστήματα Αναφοράς και μετατόπιση
- Μέση Ταχύτητα
- Στιγμιαία Ταχύτητα
- Επιτάχυνση
- Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση
- Προβλήματα
- Ελεύθερη Πτώση
- Μεταβλητή Επιτάχυνση
- Επίλυση μέσω γραφικών παραστάσεων

2-1 Συστήματα Αναφοράς και Μετατόπιση

Όλες οι μετρήσεις ταχύτητας, απόστασης και θέσης γίνονται πάντα σε σχέση με κάποιο σύστημα αναφοράς.

Π.χ. εάν κάθεσαι σε ένα τραίνο και κάποιος επιβάτης περάσει δίπλα σου, η ταχύτητα του ανθρώπου σε σχέση με εσένα είναι κάποια χιλιόμετρα την ώρα ενώ σε σχέση με το έδαφος είναι πολλή μεγαλύτερη.

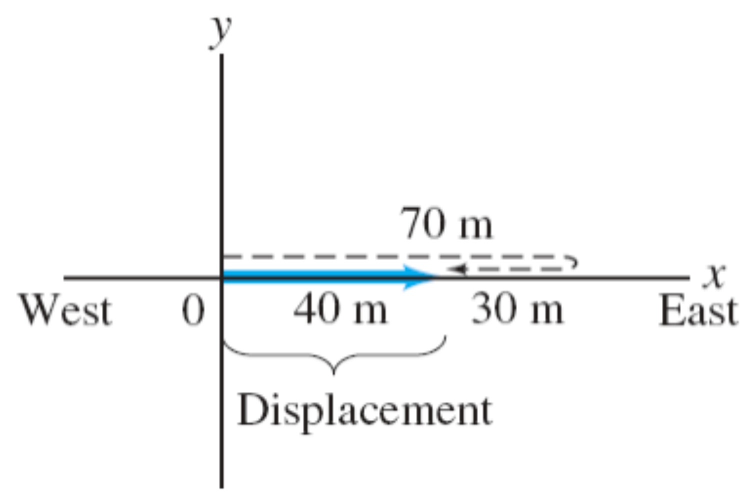


2-1 Συστήματα Αναφοράς και Μετατόπιση

Η απόσταση και η μετατόπιση είναι διαφορετικές ποσότητες.

Μετατόπιση (μπλε) είναι η απόσταση του αντικειμένου από την «αρχή» ανεξάρτητα του πως βρέθηκε στο τελικό αυτό σημείο.

Απόσταση (διακεκομμένη γραμμή) είναι το «μήκος» της τροχιάς που ακολουθήθηκε για να φτάσει στο τελικό σημείο



2-1 Συστήματα Αναφοράς και Μετατόπιση

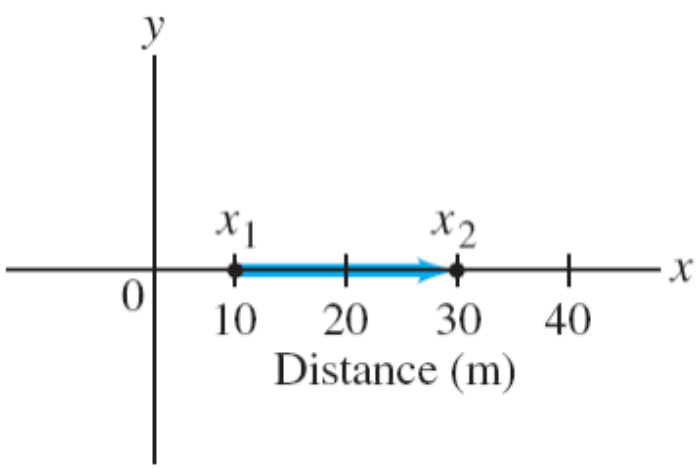
Η μετατόπιση ορίζεται ως : $\Delta x = x_2 - x_1.$

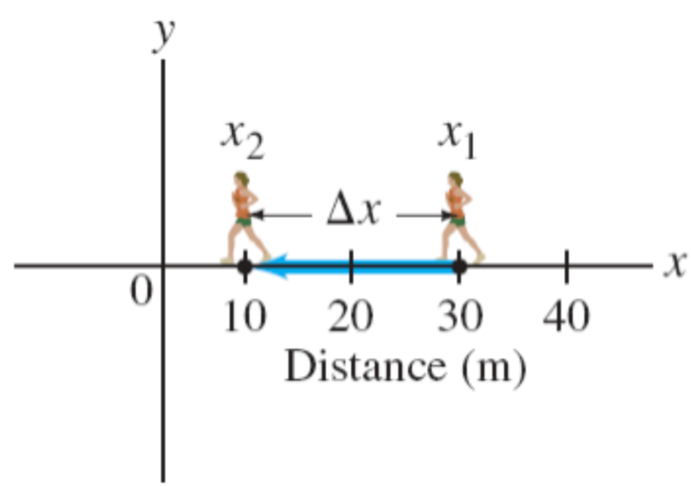
Αριστερά:

Θετική μετατόπιση.

Δεξιά:

Αρνητική μετατόπιση.





2-2 Μέση Ταχύτητα

Το «μέτρο» της ταχύτητας είναι η απόσταση που διήνυσε ένα αντικείμενο σε κάποιο χρονικό διάστημα:

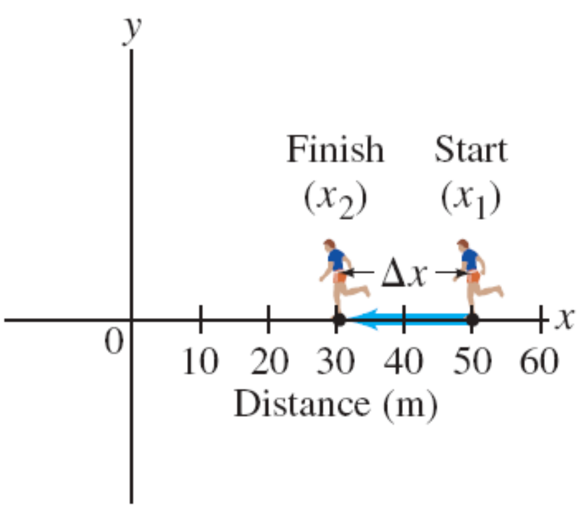
$$\text{μέτρο ταχύτητας} = \frac{\text{απόσταση}}{\text{χρόνο}}$$

Η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος και επομένως έχει πρόσημο:

$$\text{μέση ταχύτητα} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνο}}$$

2-2 Μέση Ταχύτητα

Οι θέσεις ενός δρομέα σαν συνάρτηση του χρόνου φαίνονται στη γραφική παράσταση. Εάν ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει την απόσταση Δx είναι 3,0 s βρείτε τη μέση ταχύτητα του δρομέα



$$\Delta v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}$$

$$= \frac{30{,}0 - 50{,}0}{3{,}0}\frac{m}{s} = -6{,}7 m/s$$

2-2 Μέση Ταχύτητα

Τι απόσταση μπορεί να διανύσει ένας ποδηλάτης σε 2,5 ώρες εάν η μέση ταχύτητά του είναι 18,0 km/h;

$$\Delta v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = \Delta v \Delta t$$

$$= 18{,}0\frac{km}{h}2{,}5h = 4{,}5x10^{4}m$$

2-3 Στιγμιαία Ταχύτητα

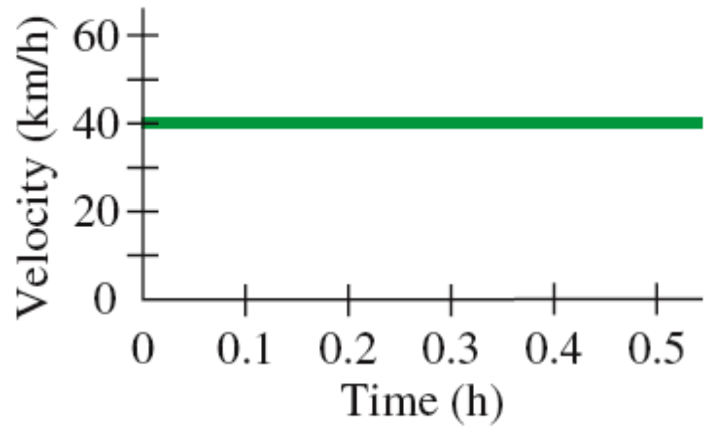
Ως στιγμιαία ταχύτητα ορίζεται η μέση ταχύτητα όταν χρόνος τείνει στο μηδέν.

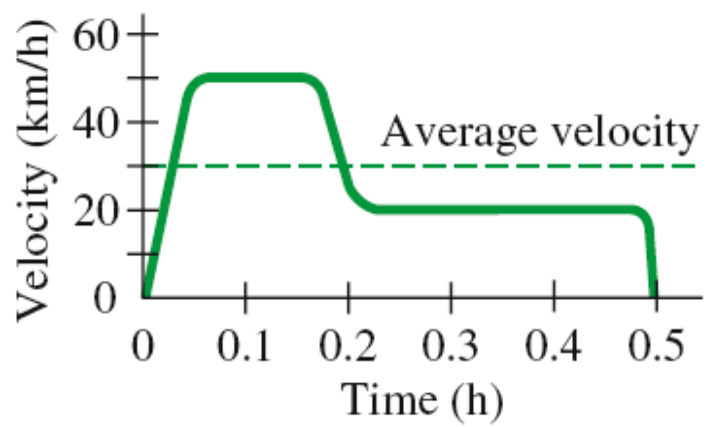
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

Ιδανικά, το «κοντέρ» του αυτοκινήτου, θα μετρούσε την στιγμιαία ταχύτητα αλλά στην ουσία μετρά μέση ταχύτητα για μικρά χρονικά διαστήματα.

2-3 Στιγμιαία Ταχύτητα

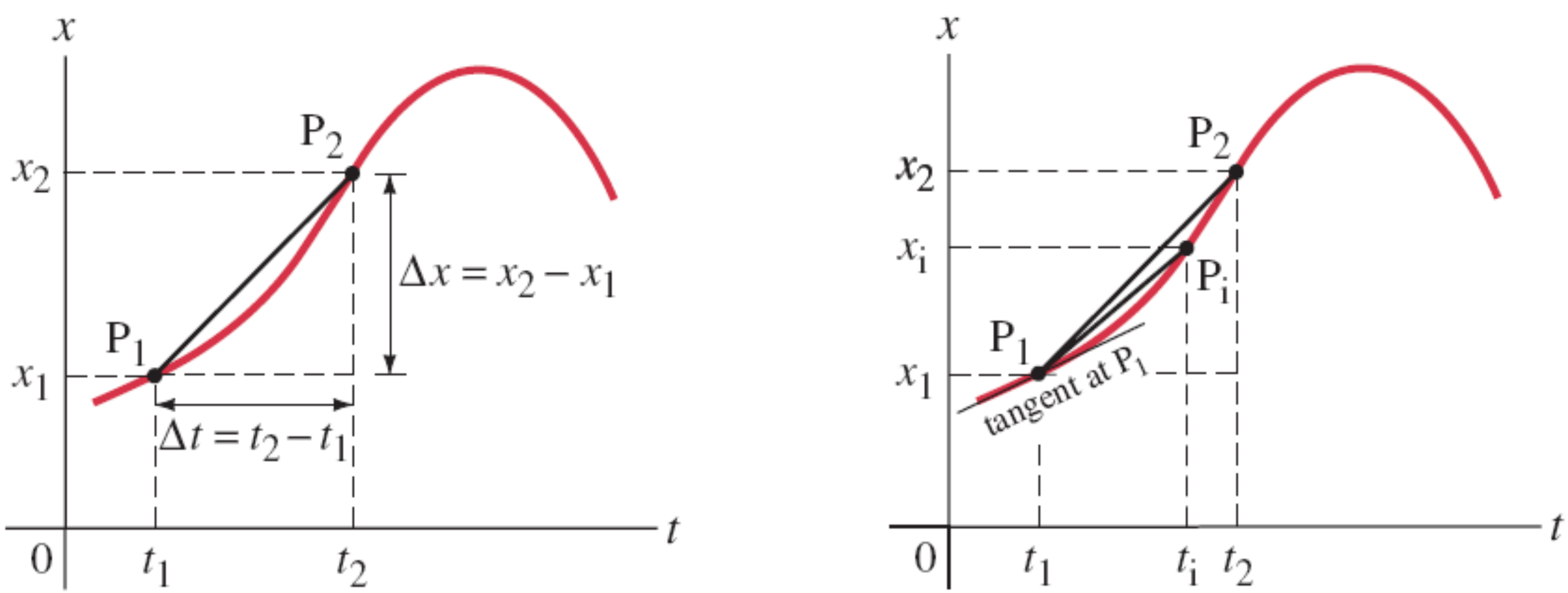
Ίδια μέση ταχύτητα δεν σημαίνει και ίδιες στιγμιαίες ταχύτητες





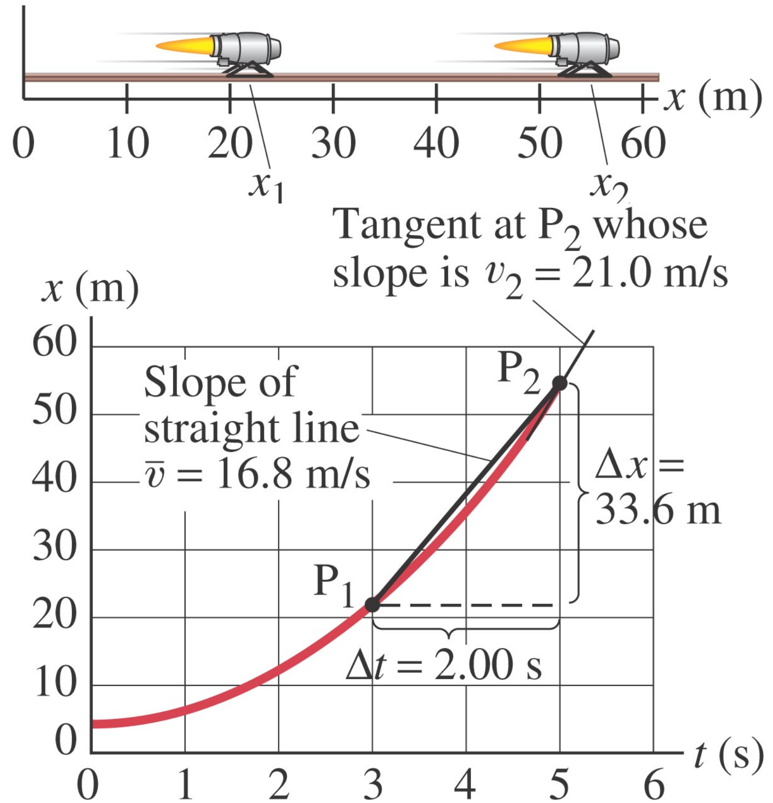
2-3 Στιγμιαία Ταχύτητα (Σ.Τ.)

Σε μια γραφική παράσταση της θέσης σαν συνάρτηση του χρόνου, η Σ.Τ. είναι η εφαπτομένη της καμπύλης.



2-3 Στιγμιαία Ταχύτητα

Μία μηχανή τύπου jet κινείται πάνω σε πειραματικές ράγες (άξονας x). Θα υποθέσουμε ότι η μηχανή είναι σημείο. Η θέση του σαν συνάρτηση του χρόνου δίδεται από την εξίσωση $x = At^2 + B$, όπου $A = 2{,}10\ m/s^2$ και $B = 2{,}80$ m. (α) Προσδιορίστε τη μετατόπιση της μηχανής για το χρονικό διάστημα μεταξύ $t_1 = 3{,}00$ s και $t_2 = 5{,}00$ s. (β) Προσδιορίστε τη μέση ταχύτητα. (γ) Προσδιορίστε τη στιγμιαία ταχύτητα στο σημείο $t = 500$ s.



$$x_1 = At_1^2 + B = 2{,}10\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\,[3{,}00\,s]^2 + 2{,}8m = 21{,}7m$$

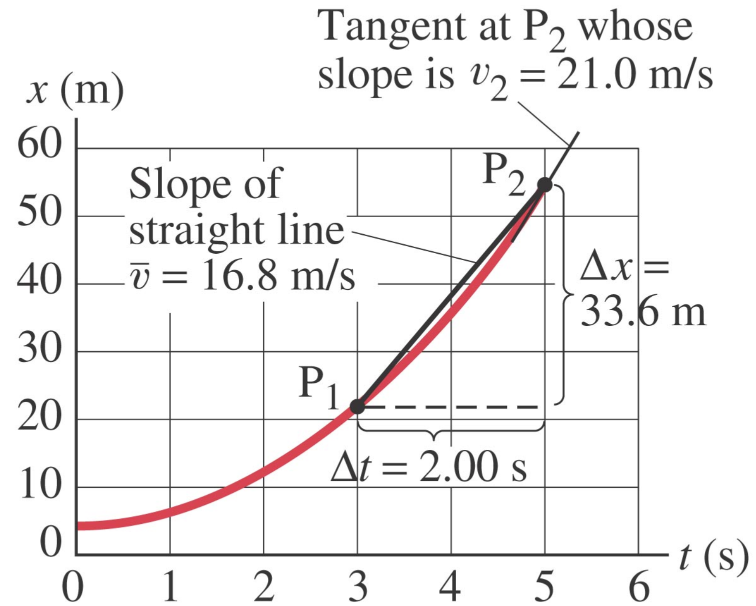
$$x_2 = At_2^2 + B = 2{,}10\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\,[5{,}00\,s]^2 + 2{,}8m = 55{,}3m$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 55{,}3m - 21{,}7m = 33{,}6m$$

Μέση Ταχύτητα

$$\Delta v = \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{33{,}6m}{5s - 3s} = 16{,}8\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$



Στιγμιαία Ταχύτητα στο P_2

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(At^2 + B\right) = 2At$$

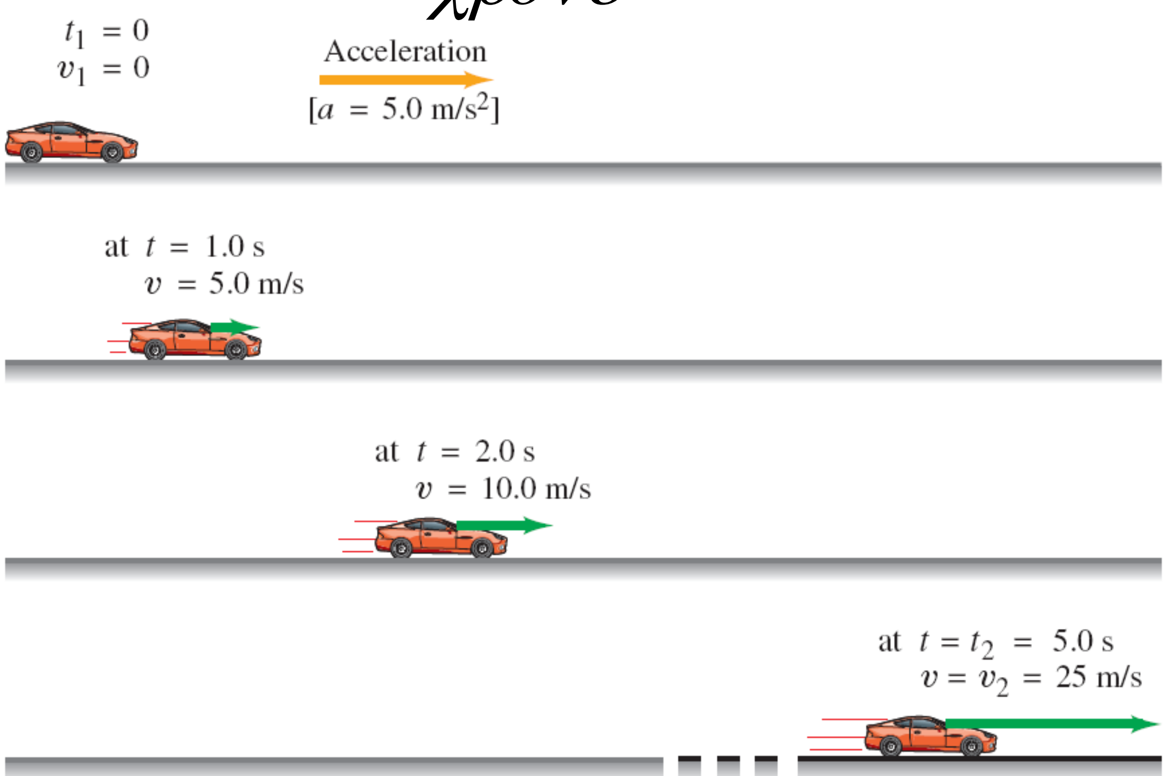
$$v(P_2) = 2(2{,}10m / s^2)(5{,}00s) = 21{,}0\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

2-4 Επιτάχυνση

Η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας.

$$\text{Μέση Επιτάχυνση} = \frac{\text{μεταβολή ταχύτητας}}{\text{χρόνο}}$$

Ένα αυτοκίνητο επιταχύνει σε μια ευθεία από μηδέν στα 90,0 km/h σε 5,0 s. Πόση είναι η μέση επιτάχυνσή του;



$$\Delta a = \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

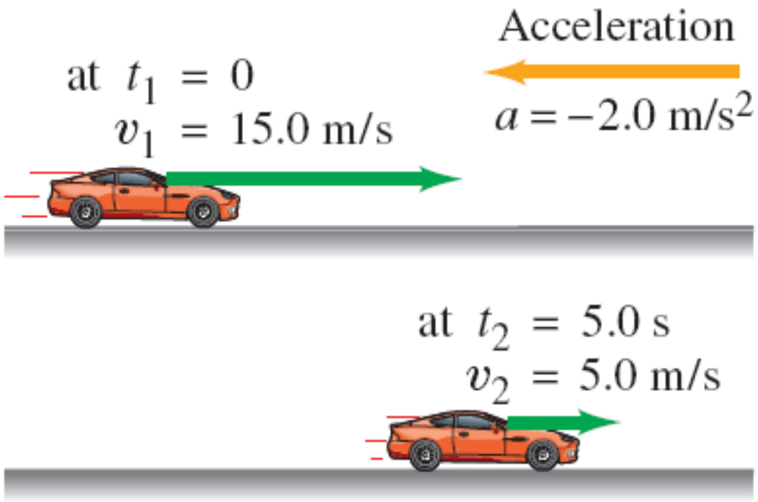
$$= \frac{90.000m/3600s - 0}{5{,}0s} = \frac{25\,{}^{m}\!/_{s}}{5{,}0s} = 5{,}0\frac{m}{s^2}$$

2-4 Επιτάχυνση

Ένα αυτοκίνητο κινείται δεξιά σε αυτοκινητόδρομο (άξονας x) και αποφασίζει να φρενάρει. Εάν η αρχική ταχύτητα πριν το φρενάρισμα ήταν v_1 = 15,0 m/s, και χρειάζονται 5,0 s για να επιβραδυνθεί στα v_2 = 5,0 m/s, ποια είναι η μέση επιτάχυνση;

$$\Delta a = \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{5{,}0\,{}^{m}\!/_{s} - 15{,}0\,{}^{m}\!/_{s}}{5{,}0 s} = -2{,}0 \frac{m}{s^2}$$

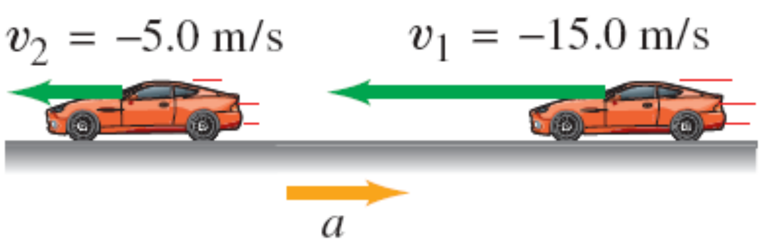


2-4 Επιτάχυνση

Προσοχή: Υπάρχει διαφορά μεταξύ αρνητικής επιτάχυνσης και επιβράδυνσης

Αρνητική επιτάχυνση είναι επιτάχυνση προς την αρνητική διεύθυνση όπως αυτή ορίζεται από το σύστημα συντεταγμένων.

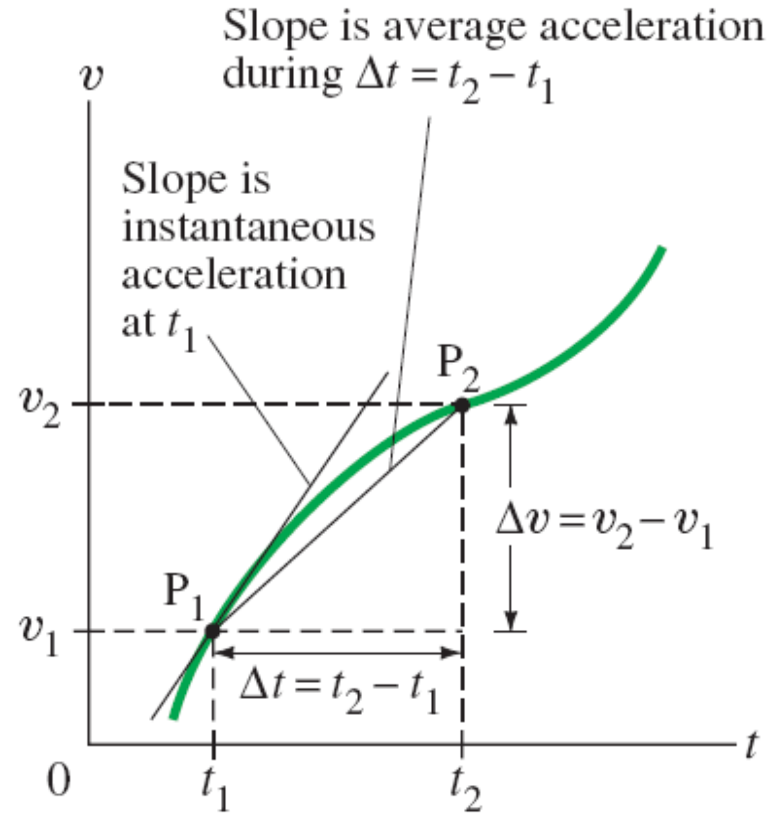
Επιβράδυνση έχουμε όταν η διεύθυνση της επιτάχυνσης είναι αντίθετη από την διεύθυνση της ταχύτητας.



2-4 Επιτάχυνση

Στιγμιαία επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της μέσης ταχύτητας όταν το χρόνος τείνει στο μηδέν.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$



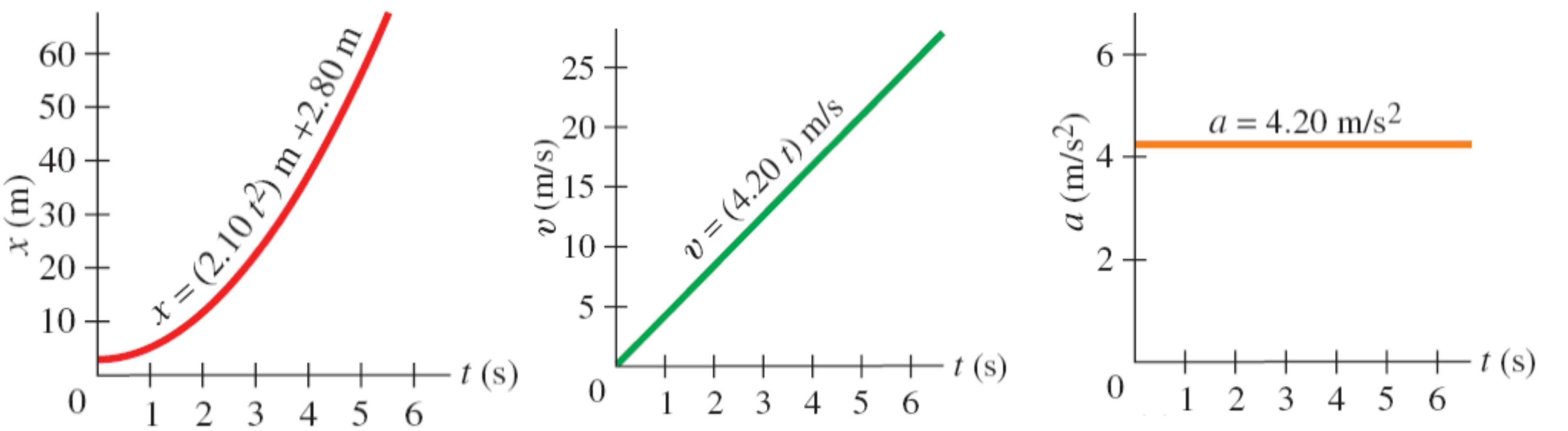
2-4 Επιτάχυνση

Ένα σωματίδιο κινείται σε ευθεία και ακολουθεί τη συνάρτηση x = (2,10 m/s^2)t^2 + (2,80 m). Υπολογίστε (α) τη μέση επιτάχυνση για το χρονικό διάστημα μεταξύ t_1 = 3,00 s και t_2 = 5,00 s, και (β)τη στιγμιαία επιτάχυνση σαν συνάρτηση του χρόνου.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(2{,}10 m/s^2)t^2 + 2{,}80 m\right] = 2(2{,}10 m/s^2)t = (4{,}20 m/s^2)t$$

$$\bar{a} = \frac{v2 - v1}{t2 - t1} = \frac{\left(4{,}20 m/s^2\right)\left(t2 - t1\right)}{t2 - t1} = 4{,}20 m/s^2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(4{,}20 m/s^2\right)t\right] = 4{,}20 m/s^2$$



2-4 Επιτάχυνση

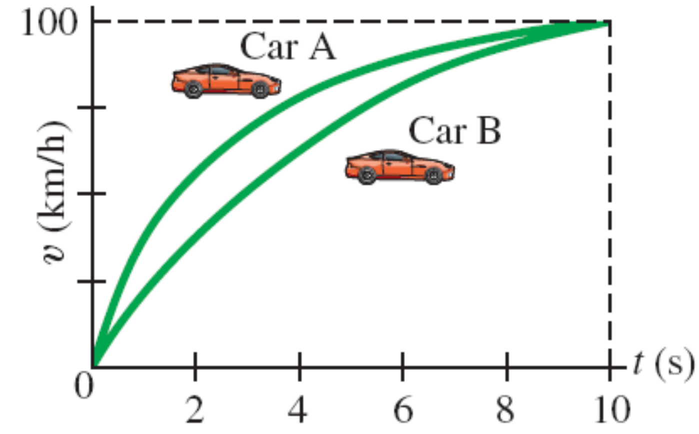
Πως διαβάζουμε γραφικές παραστάσεις.

Στη γραφική παράσταση φαίνεται η ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου για δύο αυτοκίνητα που επιταχύνουν μεταξύ 0 και 100 km/h μέσα σε 10.0 s. Συγκρίνετε (α) τη μέση επιτάχυνση (β) τη στιγμιαία επιτάχυνση και (γ) τη συνολική απόσταση που διήνυσαν τα αυτοκίνητα.

(α) Η μέση επιτάχυνση είναι η ίδια μιας και στον ίδιο χρόνο τα δύο αυτοκίνητα έχουν την ίδια μεταβολή στην ταχύτητά του

(β) Κοιτάμε την κλίση της καμπύλης. Στους πρώτους χρόνου το Α επιταχύνει περισσότερο αλλά προς το τέλος το Β επιταχύνει περισσότερο

(γ) Η απόσταση μπορεί να χαρακτηριστεί ως το εμβαδόν της καμπύλης. Βλέπουμε ότι η καμπύλη για το Α έχει μεγαλύτερο εμβαδόν (περιοχή κάτω από την καμπύλη). Διαφορετικά βλέπουμε ότι το Α έχει πάντα μεγαλύτερη ταχύτητα από το Β.



2-5 Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση

Η μέση ταχύτητα ενός αντικειμένου για χρονικό διάστημα *t* είναι

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{t}.$$

Η επιτάχυνση, υποθέτοντας ότι παραμένει σταθερή είναι

$$a = \frac{v - v_0}{t}.$$

(Υποθέτουμε ότι t_0=0)

2-5 Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση

Επιπλέον, επειδή γνωρίζουμε ότι ταχύτητα αυξάνεται με σταθερό ρυθμό γνωρίζουμε ότι

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

Συνδυασμός των τριών αυτών εξισώσεων συνεπάγεται

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2.$$

2-5 Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση

Επίσης απαλείφοντας το *t*:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Έχουμε τώρα όλες τις εξισώσεις που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος κίνηση με σταθερή επιτάχυνση.

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}.$$

2-6 Επίλυση προβλημάτων

1. Διαβάζουμε καλά το πρόβλημα για να καταλάβουμε τι ζητάει. Μετά το ξαναδιαβάζουμε.

2. Αναγνώρισε τα αντικείμενα και τον χρόνο.

3. Κάνε ένα διάγραμμα και διάλεξε σύστημα αναφορά (άξονες).

4. Γράψε τις παραμέτρους που γνωρίζεις και αυτές που χρειάζεσαι για να προσδιορίσεις τις επιθυμητές.

5. Ποιοι είναι οι νόμοι της φυσικής για το συγκεκριμένο πρόβλημα; Σχεδιασμός πορείας λύσης.

2-6 Επίλυση προβλημάτων

6. Ποιες είναι οι σχέσεις μεταξύ γνωστών και αγνώστων παραμέτρων; Ισχύουν; Λύνουμε τις σχέσεις ως προς τους αγνώστους και ελέγχουμε εάν το αποτέλεσμα είναι ρεαλιστικό (ελέγχουμε τις μονάδες του αποτελέσματος.)

7. Υπολογισμός αποτελέσματος, σημαντικά ψηφία.

8. Το αποτέλεσμα έχει τη σωστή τάξη μεγέθους;

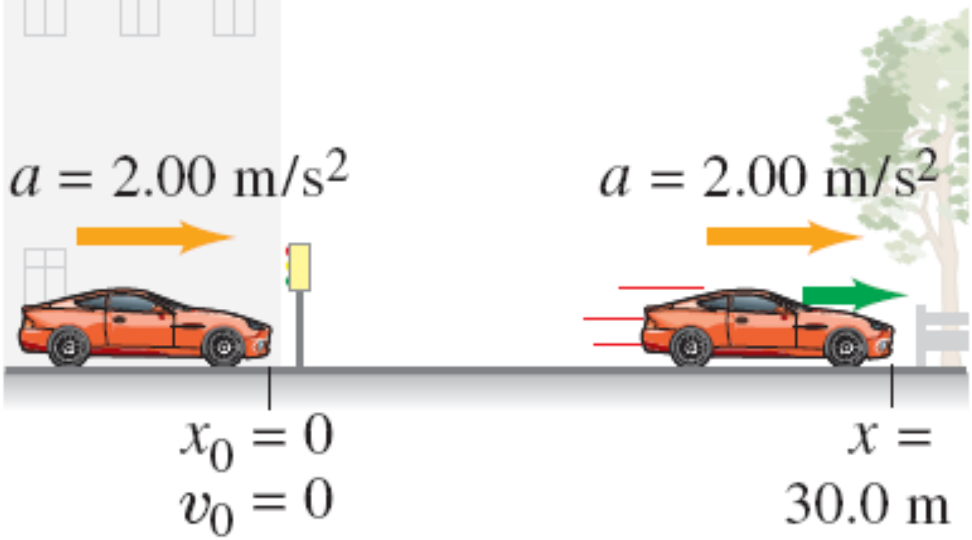
9. Μονάδες, μονάδες.

2-6 Επίλυση προβλημάτων

Πόσο χρόνο κάνει ένα αυτοκίνητο να διασχίσει μια διασταύρωση 30,0 m, (αφού ανάψει πράσινο ο σηματοδότης) και το αυτοκίνητο επιταχύνει με 2,00 m/s²?

Γνωστά
v_0=0 m/s
a=2m/s²
x=30m

Άγνωστα
t=;

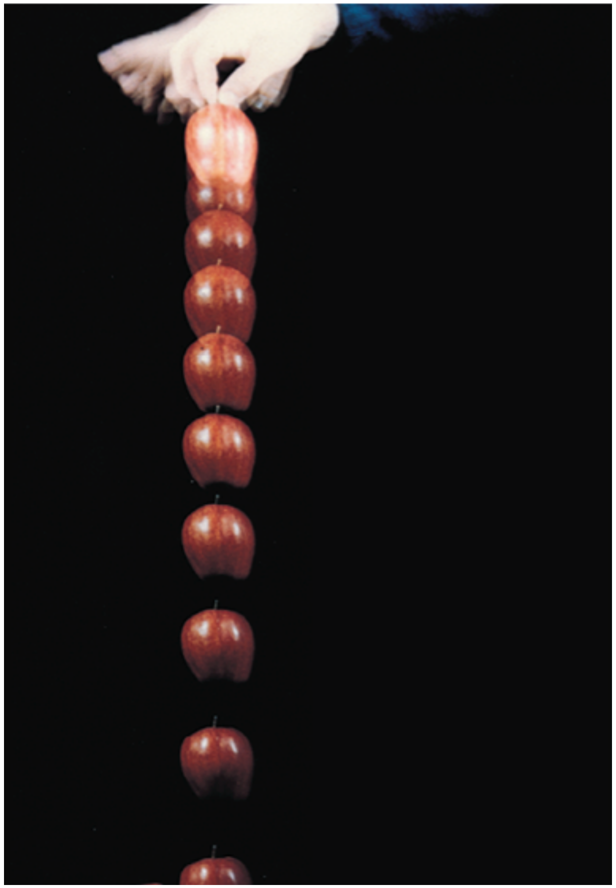


$$\left.\begin{aligned} x &= x_o + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x - x_o = \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2(x-x_o)}{a}} = \sqrt{\frac{2 \bullet 30{,}0m}{2{,}00m/s^2}} = 5{,}48s$$

2-7 Ελεύθερη Πτώση

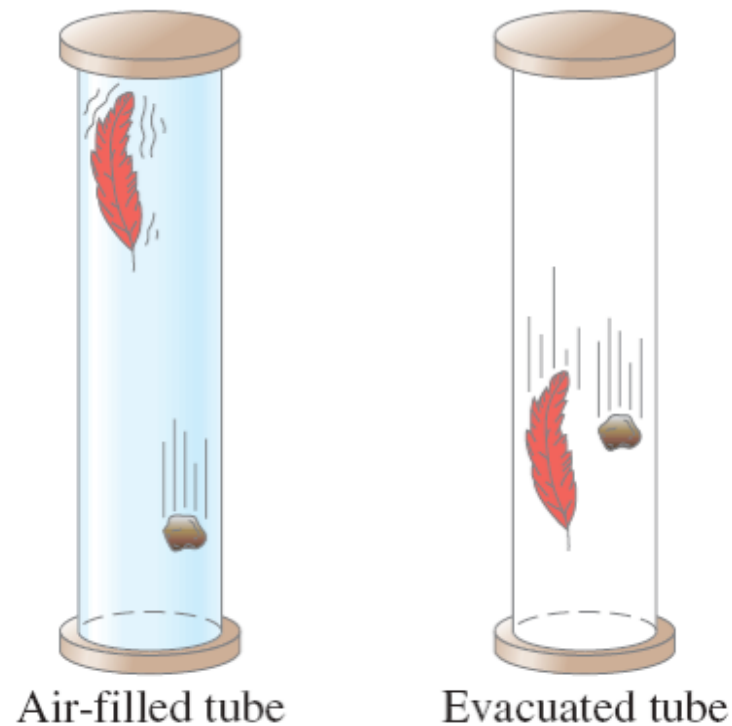
Λόγω βαρύτητας, κοντά στην επιφάνεια της γης όλα τα αντικείμενα έχουν την ίδια επιτάχυνση.



Η ελεύθερη πτώση είναι ένα παράδειγμα κίνησης με σταθερή επιτάχυνση

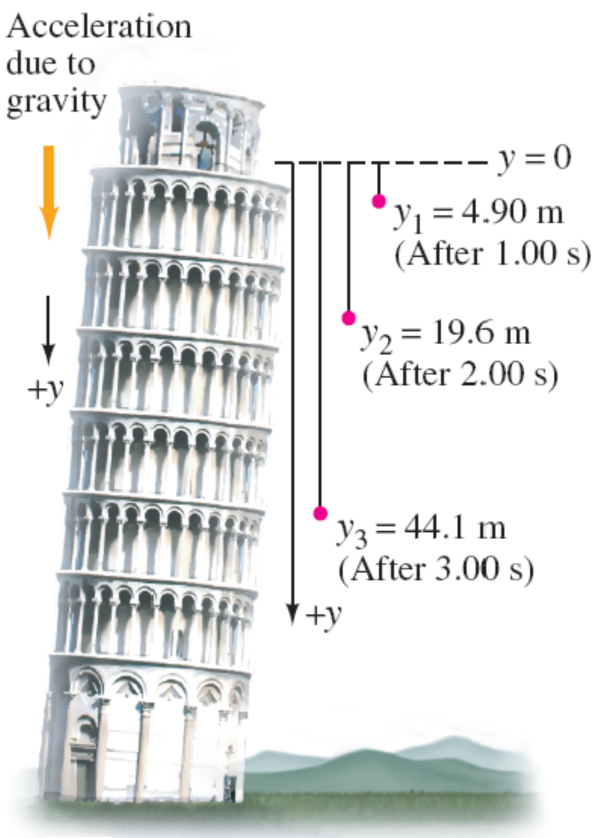
2-7 Ελεύθερη Πτώση

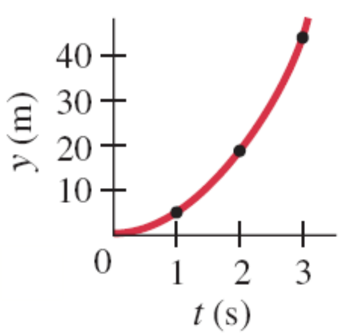
Απουσία αέρος όλα τα αντικείμενα «πέφτουν» με την ίδια επιτάχυνση!!



Η επιτάχυνση της βαρύτητας της γης είναι 9,80 m/s^2.

2-7 Ελεύθερη Πτώση





Ένα τόπι πέφτει (v_0 = 0) από πύργο ύψους 70,0 m. Πόσο έχει πέσει έπειτα από t_1 = 1,00 s, t_2 = 2,00 s, και t_3 = 3,00 s; Αγνοείστε τον αέρα.

$$\left.\begin{aligned} y &= y_o + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y - y_0 = \frac{1}{2}at^2$$

$$y = 0{,}5(9{,}80 m/s^2)t^2$$

$$y(1) = 4{,}90 m$$

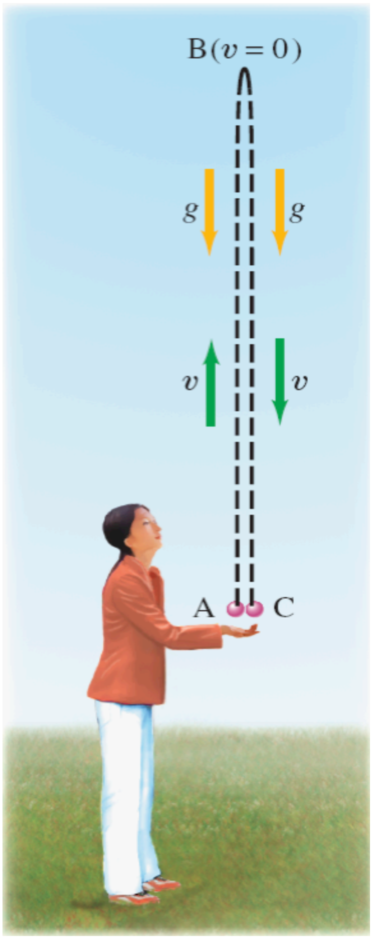
$$y(2) = 19{,}6 m$$

$$y(3) = 44{,}1 m$$

2-7 Ελεύθερη Πτώση

ΑΣΚΗΣΗ 2.1

Πετάμε ένα τόπι προς τα πάνω με ταχύτητα 15,0 m/s. Υπολογίστε (α) Σε τι ύψος φτάνει και (β) πόσο χρόνο κάνει να επιστρέψει;



$$\left.\begin{aligned} & y = y_o + v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \\ & v_0 = 15m/s \\ & y_0 = 0 \\ & v = v_0 + at \\ & v(t_{\max}) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$t_{\max} = \frac{v_o}{a} = \frac{15m/s}{9{,}80m/s^2} = 1{,}53s$$

$$y_{\max} = v_0 t_{\max} - \frac{1}{2}at_{\max}^2 =$$

$$= (15m/s)(1{,}53s) - 0{,}5(9{,}80m/s^2)(1{,}53s)^2 = 11{,}5m$$

$$y_{\max} = v_0 \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2}a\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2a}$$

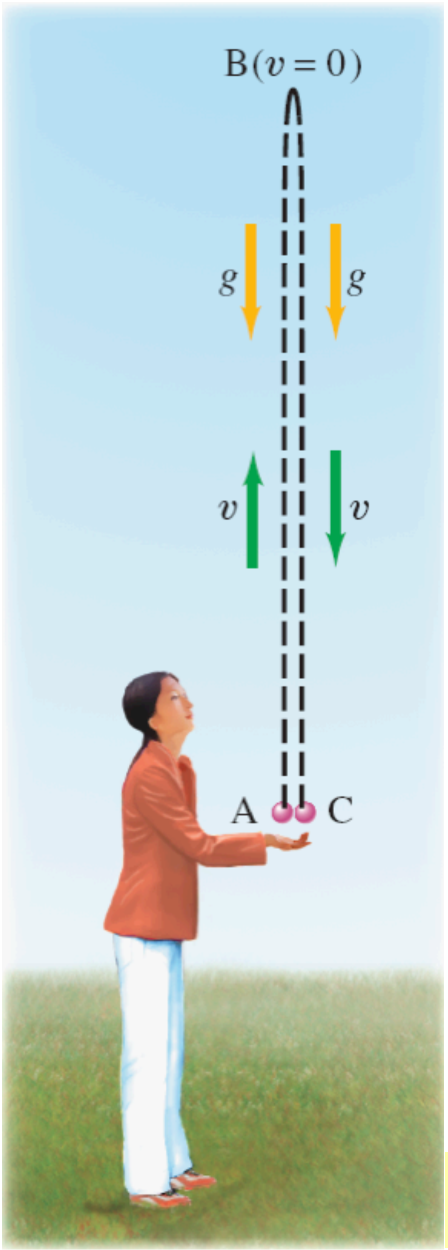
2-7 Ελεύθερη Πτώση

Αλήθεια ή Ψέμα.

(1)Η επιτάχυνση και η ταχύτητα έχουν πάντα την ίδια διεύθυνση

(2)Ένα αντικείμενο που εκτοξεύετε κατακόρυφα έχει μηδενική επιτάχυνση στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του.

2-7 Ελεύθερη Πτώση



(α) Βρείτε το χρόνο (πάνω, και κάτω)

(β) Την ταχύτητα όταν επιστρέψει στη γη

(α)

$$\left.\begin{aligned} y &= y_o + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ y_0 &= 0 \\ v &= v_0 + at \\ v(t_{max}) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} t_{max} &= \frac{v_o}{a} \\ y_{max} &= \frac{v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2}{2a} = \overbrace{y_0 + v_0 t_{down}}^{=0} + \frac{1}{2}at_{down}^2 \Rightarrow$$

$$t_{down} = \frac{v_0}{a} = t_{max} \Rightarrow t_{up-down} = \frac{2v_0}{a}$$

(β)

$$v_{down} = \overbrace{v_{max}}^{0} + at_{down} = a\frac{v_0}{a} = v_0$$

Ταχύτητα εκτόξευσης = ταχύτητα επιστροφής

2-7 Ελεύθερη Πτώση

ΑΣΚΗΣΗ 2.2

Μια μπάλα εκτοξεύεται προς τα πάνω με ταχύτητα 15,0 m/s, υπολογίστε το χρόνο που χρειάζεται να φτάσει το ύψος των 8,00 m.

$$Ax^2 + Bx + \Gamma = 0 \Rightarrow$$

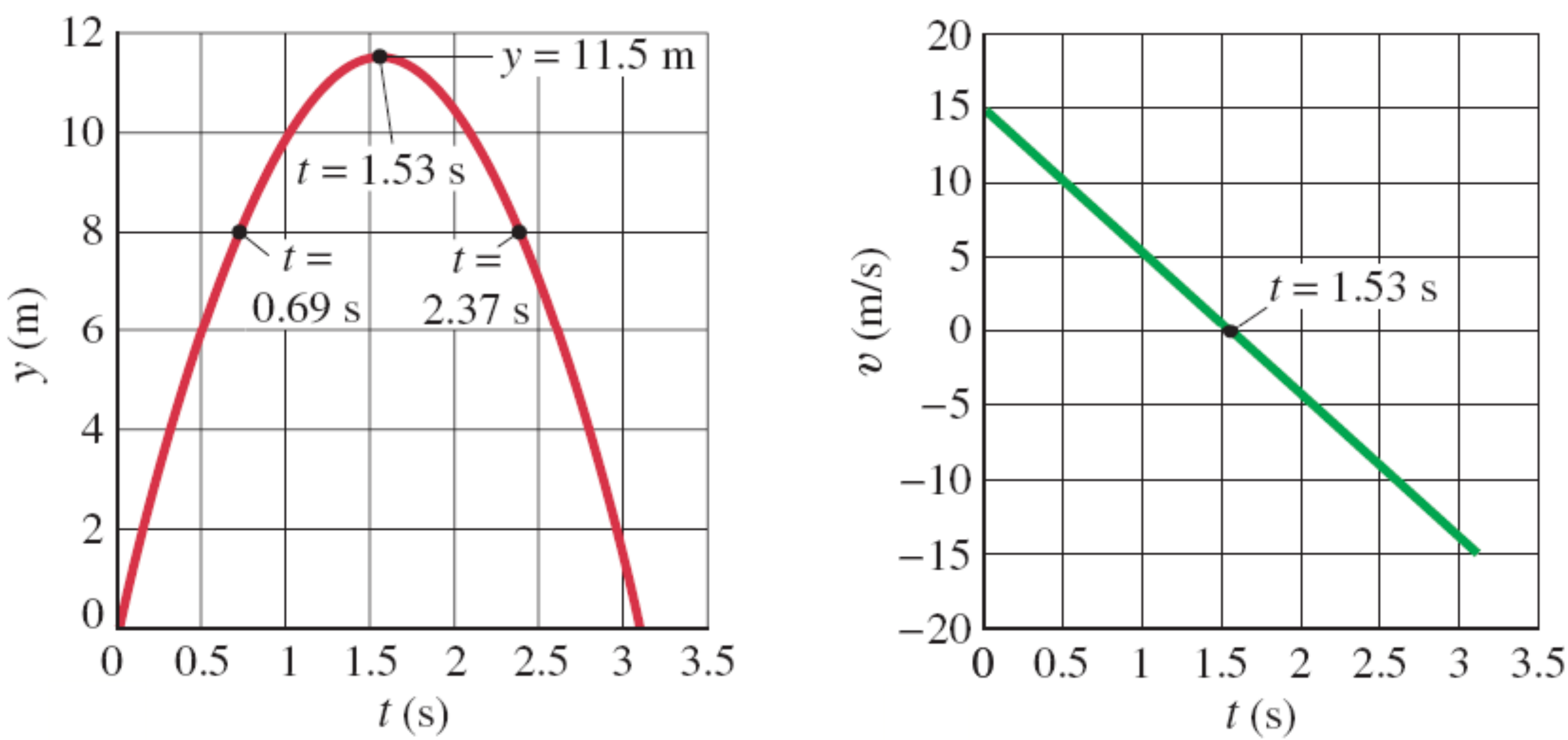
$$x = \frac{-\mathrm{B} \pm \sqrt{\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{A}\Gamma}}{2\mathrm{A}}$$

$$\left.\begin{array}{c} y = \overbrace{y_o}^{0} + v_0 t - \dfrac{1}{2} a t^2 \\ y = C \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{2} t^2 - v_0 t - C = 0$$

$$t = \frac{v_o \pm \sqrt{v_0^2 - 4\dfrac{a}{2}C}}{2\dfrac{a}{2}} \Rightarrow t = \frac{v_o \pm \sqrt{v_0^2 - 2aC}}{a}$$

$$t(8m) = \frac{15m/s \pm \sqrt{(15m/s)^2 - 2(9{,}80m/s^2)8m}}{9{,}80m/s^2}$$

$$t(8m) = \frac{15 \pm 8{,}26}{9{,}80} s \Rightarrow \begin{cases} t1 = 0{,}69s \\ t2 = 2{,}37s \end{cases}$$



2-8 Μεταβλητή Επιτάχυνση; Απειροστικός Λογισμός

Πως βρίσκουμε τις εξισώσεις κίνησης μέσω ολοκληρώσεων:

$$dv = a\,dt$$

$$\int_{v=v_0}^{v} dv = \int_{t=0}^{t} a\,dt.$$

Για σταθερή επιτάχυνση

$$v - v_0 = at.$$

2-8 Μεταβλητή Επιτάχυνση; Απειροστικός Λογισμός

Γράφουμε:

$$dx = v\,dt$$
$$= (v_0 + at)dt$$

$$\int_{x=x_0}^{x} dx = \int_{t=0}^{t} (v_0 + at)\,dt.$$

Η οποία για σταθερή επιτάχυνση γίνεται

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2.$$

2-8 Μεταβλητή Επιτάχυνση; Απειροστικός Λογισμός

Ένα πειραματικό αυτοκίνητο επιταχύνει από $v_0 = 0$, $t = 0$, με ρυθμός που δίδεται από την εξίσωση $a = (7{,}00\ \mathrm{m/s^3})t$. Βρείτε (α) την ταχύτητα και (β) τη μετατόπιση έπειτα από 2,00 s.

(α)

$$v - \overbrace{v_0}^{0} = \int_0^{2s} a\,dt = \int_0^{2s} (7m/s^3)t\,dt = = (7m/s^3)\int_0^{2s} t\,dt = (7m/s^3)\frac{\left[t^2\right]_{0s}^{2s}}{2}$$

$$= (3{,}5m/s^3)\left[(2s)^2 - (0s)^2\right] = 14m/s$$

(β)

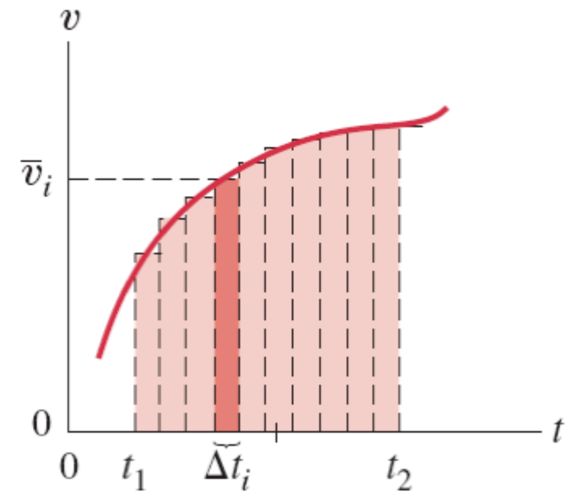
$$dv = a\,dt \Rightarrow \int_0^t dv = \int_0^t a\,dt \Rightarrow v(t) = (7m/s^3)\int_0^t t\,dt = (3{,}5m/s^3)t^2$$

$$dx = v(t)dt \Rightarrow \int_0^x dx = (3{,}5m/s^3)\int_0^{2s} t^2 dt = (3{,}5m/s^3)\left.\frac{t^3}{3}\right|_{0s}^{2s}$$

$$x = 1{,}17m/s3\left[(2s)^3 - (0s)^3\right] = 9{,}33m$$

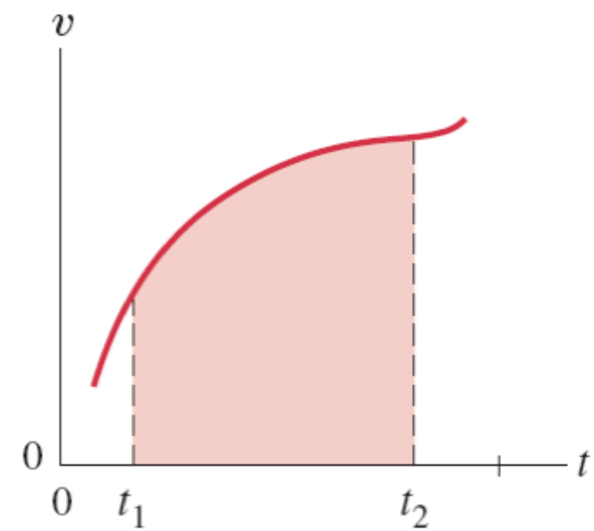
2-9 Αριθμητική Ολοκλήρωση και Γραφικές παραστάσεις

Η συνολική μετατόπιση ενός αντικειμένου είναι το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την γραφικής παράσταση της ταχύτητας σαν συνάρτηση του χρόνου (*v-t*)



$$x_2 - x_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} \overline{v}_i \, \Delta t_i$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt.$$



2-9 Αριθμητική Ολοκλήρωση και Γραφικές παραστάσεις

Παρομοίως η ταχύτητα είναι το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη της επιτάχυνσης με το χρόνο (*a-t*)

Εάν το ολοκλήρωμα της ταχύτητας ή της επιτάχυνσης δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά (ακριβώς) τότε μπορούμε να προσφύγουμε σε αριθμητική ολοκλήρωση

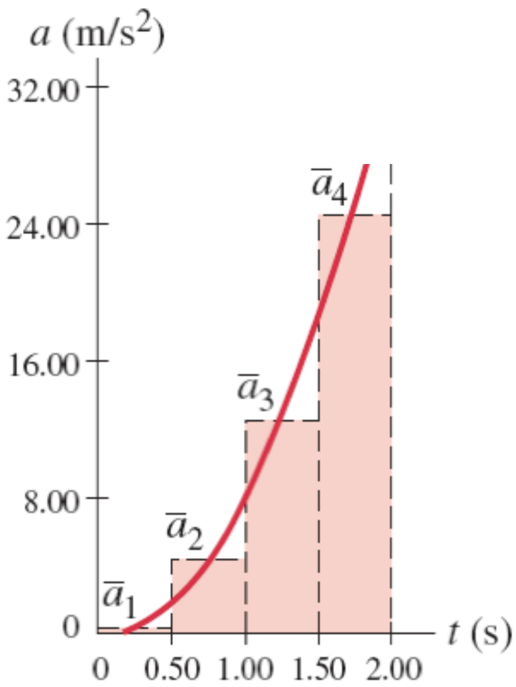
2-9 Αριθμητική Ολοκλήρωση και Γραφικές παραστάσεις

ΑΣΚΗΣΗ 2.3

Ένα αντικείμενο επιταχύνει από $t = 0$ με ρυθμό $a(t) = (8.00\ \mathrm{m/s^4})t^2$. Βρείτε την ταχύτητα μετά από 2.00 s με αριθμητική ολοκλήρωση .

i	1	2	3	4
$\bar{a}_i\ (\mathrm{m/s^2})$	0.50	4.50	12.50	24.50

$$\begin{aligned} v(t = 2.00\ \mathrm{s}) &= \sum_{i=0} \bar{a}_i\,\Delta t_i \\ &= (0.50\ \mathrm{m/s^2} + 4.50\ \mathrm{m/s^2} + 12.50\ \mathrm{m/s^2} + 24.50\ \mathrm{m/s^2})(0.50\ \mathrm{s}) \\ &= 21.0\ \mathrm{m/s.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} v &= \int_0^{2.00\ \mathrm{s}} (8.00\ \mathrm{m/s^4})t^2\,dt = \frac{8.00\ \mathrm{m/s^4}}{3} t^3 \Big|_0^{2.00\ \mathrm{s}} \\ &= \frac{8.00\ \mathrm{m/s^4}}{3}\left[(2.00\ \mathrm{s})^3 - (0)^3\right] = 21.33\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Παράδειγμα M2.4 Μοντελοποίηση ενός δρομέα ως σωματιδίου

Επιστήμονας μελετάει την εμβιομηχανική του ανθρώπινου σώματος. Πραγματοποιεί ένα πείραμα κατά το οποίο μετρά την ταχύτητα ενός δρομέα ο οποίος τρέχει ευθύγραμμα με σταθερό ρυθμό. Ο επιστήμονας ξεκινάει το χρονόμετρο τη στιγμή που ο δρομέας περνάει από ένα συγκεκριμένο σημείο και το σταματάει μόλις ο δρομέας περάσει από ένα άλλο σημείο που απέχει 20 m από το πρώτο. Το χρονόμετρο καταγράφει ένα χρονικό διάστημα 4.0 s.

(A) Ποια είναι η ταχύτητα του δρομέα;

ΛΥΣΗ

Μοντελοποιούμε τον δρομέα ως σωματίδιο επειδή το μέγεθός του και οι κινήσεις των χεριών και των ποδιών του είναι περιττές λεπτομέρειες. Επίσης, επειδή στο πρόβλημα αναφέρεται ότι ο δρομέας τρέχει με σταθερό ρυθμό, μπορούμε να τον μοντελοποιήσουμε ως σωματίδιο με σταθερή ταχύτητα.

Αφού προσδιορίσαμε το μοντέλο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση M2.6 για να βρούμε τη σταθερή ταχύτητα του δρομέα:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} = \frac{20\text{ m} - 0}{4.0\text{ s}} = \boxed{5.0\text{ m/s}}$$

(B) Αν ο δρομέας συνεχίσει να κινείται μετά το σταμάτημα του χρονομέτρου, ποια θα είναι η θέση του μετά από 10 s;

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση M2.7 και την ταχύτητα που βρήκατε στο (A) για να βρείτε τη θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 10$ s:

$$x_f = x_i + v_x t = 0 + (5.0\text{ m/s})(10\text{ s}) = \boxed{50\text{ m}}$$

Παρατηρήστε ότι η τιμή αυτή είναι υπερδιπλάσια της τιμής στη θέση των 20 m στην οποία σταμάτησε το χρονόμετρο. Είναι η τιμή αυτή συνεπής με το γεγονός ότι ο χρόνος των 10 s είναι υπερδιπλάσιος του χρόνου των 4.0 s;

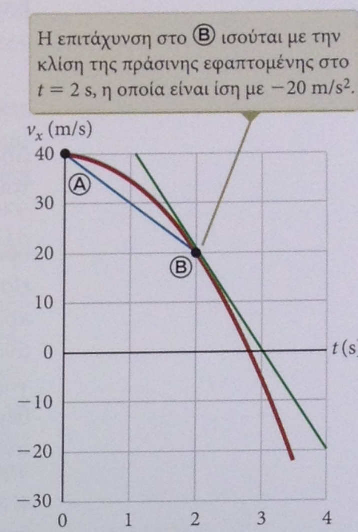
---

[4]Σ.τ.Ε.: Οι διατυπώσεις *σταθερό μέτρο ταχύτητας* και *ταχύτητα σταθερού μέτρου* είναι ταυτόσημες και υποδεικνύουν ότι το υπό εξέταση σώμα κινείται με ταχύτητα η οποία έχει σταθερό μέτρο.

Παράδειγμα **Μ2.6** Μέση και στιγμιαία επιτάχυνση

Η ταχύτητα ενός σωματιδίου που κινείται κατά μήκος του άξονα x μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $v_x = 40 - 5t^2$, όπου η ταχύτητα v_x μετριέται σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο και ο χρόνος t σε δευτερόλεπτα.

(A) Βρείτε τη μέση επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ μέχρι $t = 2.0$ s.



Εικόνα Μ2.9 (Παράδειγμα Μ2.6) Το γράφημα ταχύτητας-χρόνου για σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x σύμφωνα με τη σχέση $v_x = 40 - 5t^2$.

ΛΥΣΗ

Φανταστείτε την κίνηση του σωματιδίου χρησιμοποιώντας τη μαθηματική αναπαράσταση. Κινείται τη χρονική στιγμή $t = 0$; Προς ποια κατεύθυνση; Επιταχύνει ή επιβραδύνει; Στην Εικόνα Μ2.9 παρουσιάζεται ένα γράφημα v_x–t το οποίο δημιουργήθηκε από τη σχέση ταχύτητας-χρόνου που δίνεται στην εκφώνηση του προβλήματος. Επειδή η κλίση ολόκληρης της καμπύλης v_x-t είναι αρνητική, είναι αναμενόμενο ότι η επιτάχυνση θα είναι αρνητική.

Βρείτε την ταχύτητα κατά τις χρονικές στιγμές $t_i = t_Ⓐ = 0$ και $t_f = t_Ⓑ = 2.0$ s αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές του t στη σχέση της ταχύτητας:

$$v_{xⒶ} = 40 - 5t_Ⓐ{}^2 = 40 - 5(0)^2 = +40 \text{ m/s}$$

$$v_{xⒷ} = 40 - 5t_Ⓑ{}^2 = 40 - 5(2.0)^2 = +20 \text{ m/s}$$

Βρείτε τη μέση επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_Ⓑ - t_Ⓐ = 2.0$ s:

$$a_{x,\text{μέση}} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{v_{xⒷ} - v_{xⒶ}}{t_Ⓑ - t_Ⓐ} = \frac{20 \text{ m/s} - 40 \text{ m/s}}{2.0 \text{ s} - 0 \text{ s}}$$

$$= \boxed{-10 \text{ m/s}^2}$$

Το αρνητικό πρόσημο επιβεβαιώνει τις προβλέψεις μας: η μέση επιτάχυνση, η οποία αναπαρίσταται από την κλίση της μπλε ευθείας που ενώνει το αρχικό και το τελικό σημείο στο γράφημα ταχύτητας-χρόνου, είναι αρνητική.

(B) Προσδιορίστε την επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t = 2.0$ s.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζοντας ότι η αρχική ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή t είναι $v_{xi} = 40 - 5t^2$, βρείτε την ταχύτητα σε οποιαδήποτε μεταγενέστερη χρονική στιγμή $t + \Delta t$:

$$v_{xf} = 40 - 5(t + \Delta t)^2 = 40 - 5t^2 - 10t\,\Delta t - 5(\Delta t)^2$$

Βρείτε τη μεταβολή της ταχύτητας στο χρονικό διάστημα Δt:

$$\Delta v_x = v_{xf} - v_{xi} = -10t\,\Delta t - 5(\Delta t)^2$$

Για να βρείτε την επιτάχυνση σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, διαιρέστε τη σχέση αυτή με Δt και βρείτε το όριο του αποτελέσματος καθώς το Δt τείνει στο μηδέν:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (-10t - 5\,\Delta t) = -10t$$

Αντικαταστήστε $t = 2.0$ s:

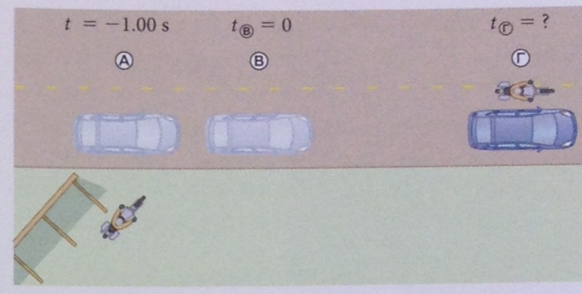
$$a_x = (-10)(2.0) \text{ m/s}^2 = \boxed{-20 \text{ m/s}^2}$$

Εφόσον, κατά τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, η ταχύτητα του σωματιδίου είναι θετική και η επιτάχυνσή του είναι αρνητική, το σωματίδιο επιβραδύνει.

Παρατηρήστε ότι οι απαντήσεις στα ερωτήματα (Α) και (Β) διαφέρουν. Η μέση επιτάχυνση στο (Α) είναι η κλίση της μπλε ευθείας στην Εικόνα Μ2.9 η οποία συνδέει τα σημεία Ⓐ και Ⓑ. Η στιγμιαία επιτάχυνση στο (Β) είναι η κλίση της πράσινης εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Ⓑ. Παρατηρήστε επίσης ότι η επιτάχυνση *δεν* είναι σταθερή στο παράδειγμα αυτό. Θα αναλύσουμε τις περιπτώσεις με σταθερή επιτάχυνση στην Ενότητα Μ2.6.

Παράδειγμα M2.8 Προσοχή στο όριο ταχύτητας!

Αυτοκίνητο που κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας 45.0 m/s προσπερνάει έναν αστυνομικό με μοτοσικλέτα, που είναι κρυμμένος πίσω από μια διαφημιστική πινακίδα. Ένα δευτερόλεπτο αφότου το αυτοκίνητο που τρέχει προσπεράσει την πινακίδα, ο αστυνομικός ξεκινάει από την πινακίδα για να φτάσει το αυτοκίνητο, με σταθερή επιτάχυνση 3.00 m/s². Σε πόσο χρόνο θα προσπεράσει το αυτοκίνητο;



Εικόνα M2.13 (Παράδειγμα M2.8) Ένα αυτοκίνητο που κινείται με μεγάλη ταχύτητα προσπερνάει έναν κρυμμένο αστυνομικό της τροχαίας.

ΛΥΣΗ

Η Εικόνα M2.13 θα σας βοηθήσει να ξεκαθαρίσετε την ακολουθία των γεγονότων. Μοντελοποιούμε το αυτοκίνητο ως σωματίδιο με σταθερή ταχύτητα, και τον αστυνομικό ως σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση.

Πρώτα, γράφουμε τις σχέσεις για τη θέση κάθε οχήματος συναρτήσει του χρόνου. Μας διευκολύνει να επιλέξουμε τη θέση της πινακίδας ως αρχή των συντεταγμένων και να ορίσουμε τη χρονική στιγμή $t_{Ⓑ} = 0$ ως τον χρόνο που αρχίζει να κινείται ο αστυνομικός. Τη συγκεκριμένη στιγμή, το αυτοκίνητο έχει ήδη διανύσει απόσταση 45.0 m από την πινακίδα επειδή έχει κινηθεί με σταθερο μέτρο ταχύτητας $v_x = 45.0$ m/s για 1 s. Επομένως, η αρχική θέση του αυτοκινήτου είναι $x_{Ⓑ} = 45.0$ m.

Χρησιμοποιήστε το μοντέλο του σωματιδίου με σταθερή ταχύτητα και εφαρμόστε την Εξίσωση M2.7 για να βρείτε τη θέση του αυτοκινήτου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t:

$$x_{\text{αυτ.}} = x_{Ⓑ} + v_{x\,\text{αυτ.}} t$$

Ένας γρήγορος έλεγχος δείχνει ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$, η σχέση δίνει τη σωστή αρχική θέση του αυτοκινήτου όταν ο αστυνομικός αρχίζει να κινείται: $x_{\text{αυτ.}} = x_{Ⓑ} = 45.0$ m.

Ο αστυνομικός ξεκινάει από κατάσταση ηρεμίας τη χρονική στιγμή $t_{Ⓑ} = 0$ και επιταχύνει με $a_x = 3.00$ m/s² απομακρυνόμενος από την αρχή των συντεταγμένων. Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση M2.16 για να βρείτε τη θέση του σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t:

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

$$x_{\text{αστ.}} = 0 + (0)t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

Εξισώστε τη θέση του αυτοκινήτου με αυτή του αστυνομικού για να αναπαραστήσετε την προσπέραση του αυτοκινήτου από τον αστυνομικό στη θέση Ⓒ:

$$x_{\text{αστ.}} = x_{\text{αυτ.}}$$

$$\tfrac{1}{2}a_x t^2 = x_{Ⓑ} + v_{x\,\text{αυτ.}} t$$

Αναδιατάξτε για να πάρετε μια δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$\tfrac{1}{2}a_x t^2 - v_{x\,\text{αυτ.}} t - x_{Ⓑ} = 0$$

Λύστε τη δευτεροβάθμια εξίσωση για να βρείτε τον χρόνο στον οποίο ο αστυνομικός φτάνει το αυτοκίνητο (για βοήθεια σχετικά με την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, δείτε το Παράρτημα B.2.):

$$t = \frac{v_{x\,\text{αυτ.}} \pm \sqrt{v_{x\,\text{αυτ.}}^2 + 2a_x x_{Ⓑ}}}{a_x}$$

$$(1)\ t = \frac{v_{x\,\text{αυτ.}}}{a_x} \pm \sqrt{\frac{v_{x\,\text{αυτ.}}^2}{a_x^2} + \frac{2x_{Ⓑ}}{a_x}}$$

Υπολογίστε τη θετική ρίζα επειδή είναι η μοναδική επιλογή για την περίπτωση $t > 0$:

$$t = \frac{45.0\ \text{m/s}}{3.00\ \text{m/s}^2} + \sqrt{\frac{(45.0\ \text{m/s})^2}{(3.00\ \text{m/s}^2)^2} + \frac{2(45.0\ \text{m})}{3.00\ \text{m/s}^2}} = \boxed{31.0\ \text{s}}$$

Παράδειγμα **Μ2.10** Καθόλου άσχημη βολή για πρωτάρη!

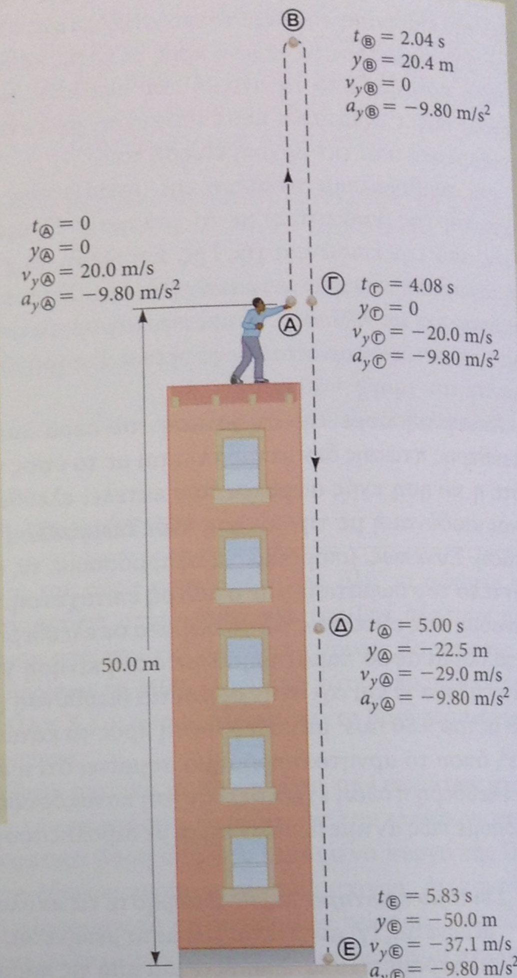
Κάποιος ρίχνει μια πέτρα από την ταράτσα ενός κτιρίου με αρχική ταχύτητα 20.0 m/s κατακόρυφα προς τα πάνω. Η πέτρα φτάνει σε ύψος 50.0 m πάνω από το έδαφος και πέφτοντας περνάει ξυστά από το άκρο της ταράτσας (Εικόνα Μ2.14).

(A) Ορίστε ως $t_{\textcircled{A}} = 0$ τη χρονική στιγμή που η πέτρα φεύγει από το χέρι του ανθρώπου στη θέση Ⓐ, και προσδιορίστε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η πέτρα φτάνει στο μέγιστο ύψος της.

ΛΥΣΗ

Πιθανώς έχετε ρίξει αντικείμενα προς τα κάτω ή τα προς τα πάνω για να τα δείτε να πέφτουν, οπότε το πρόβλημα αυτό πρέπει να σας είναι οικείο. Για να προσομοιώσετε μια τέτοια περίπτωση, ρίξτε ένα μικρό αντικείμενο προς τα πάνω και προσέξτε πόσο χρόνο χρειάζεται για να πέσει στο έδαφος. Τώρα φανταστείτε ότι ρίχνετε το αντικείμενο κατακόρυφα προς τα πάνω από την ταράτσα ενός κτιρίου. Επειδή η πέτρα εκτελεί ελεύθερη πτώση, μοντελοποιείται ως σωματίδιο με σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας.

Σημειώστε ότι η αρχική ταχύτητα είναι θετική επειδή η πέτρα εκτοξεύεται προς τα πάνω. Η ταχύτητα της πέτρας θα αλλάξει πρόσημο μόλις φτάσει στο ψηλότερο σημείο της, αλλά η επιτάχυνσή της θα έχει *πάντα* κατεύθυνση προς τα κάτω.



Εικόνα Μ2.14 (Παράδειγμα Μ2.10) Η μεταβολή της θέσης και της ταχύτητας με τον χρόνο για μια πέτρα η οποία αρχικά εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $v_{yi} = 20.0$ m/s και εκτελεί ελεύθερη πτώση. Πολλά από τα μεγέθη που αναγράφονται σε κάποια σημεία της τροχιάς της πέτρας υπολογίζονται στο παράδειγμα. Μπορείτε να επαληθεύσετε τις τιμές που δεν υπολογίζονται;

Επιλέξτε ως αρχικό σημείο τη θέση που έχει η πέτρα αμέσως μετά την εκτόξευσή της και ως τελικό σημείο το ψηλότερο σημείο της τροχιάς της.

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Μ2.13 για να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η πέτρα φτάνει στο μέγιστο ύψος της:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t \rightarrow t = \frac{v_{yf} - v_{yi}}{a_y}$$

Αντικαταστήστε αριθμητικές τιμές:

$$t = t_{\textcircled{B}} = \frac{0 - 20.0 \text{ m/s}}{-9.80 \text{ m/s}^2} = \boxed{2.04 \text{ s}}$$

(B) Βρείτε το μέγιστο ύψος της πέτρας.

ΛΥΣΗ

Όπως στο (A), επιλέξτε ως αρχικό και τελικό σημείο την αρχή και το τέλος της κατακόρυφης τροχιάς, αντίστοιχα.

Θέστε $y_{\textcircled{A}} = 0$ και αντικαταστήστε τον χρόνο από το (A) στην Εξίσωση Μ2.16 για να βρείτε το μέγιστο ύψος:

$$y_{\max} = y_{\textcircled{B}} = y_{\textcircled{A}} + v_{x\textcircled{A}} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2$$

$$y_{\textcircled{B}} = 0 + (20.0 \text{ m/s})(2.04 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)(2.04 \text{ s})^2 = \boxed{20.4 \text{ m}}$$

ΛΥΣΗ

Επιλέξτε ως αρχικό σημείο τη θέση εκτόξευσης της σφαίρας και ως τελικό σημείο την ίδια θέση από την οποία περνάει κατά την κάθοδό της.

Αντικαταστήστε με τις γνωστές τιμές στην Εξίσωση Μ2.17:

$$v_{y\text{Ⓒ}}{}^2 = v_{y\text{Ⓐ}}{}^2 + 2a_y(y_{\text{Ⓒ}} - y_{\text{Ⓐ}})$$

$$v_{y\text{Ⓒ}}{}^2 = (20.0\ \text{m/s})^2 + 2(-9.80\ \text{m/s}^2)(0-0) = 400\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v_{y\text{Ⓒ}} = \boxed{-20.0\ \text{m/s}}$$

Κατά τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας, μπορούμε να επιλέξουμε είτε τη θετική είτε την αρνητική ρίζα. Επιλέγουμε την αρνητική επειδή ξέρουμε ότι στο σημείο Ⓒ η πέτρα κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω. Η ταχύτητα της πέτρας όταν επιστρέφει στο αρχικό της ύψος έχει το ίδιο μέτρο με την αρχική ταχύτητα αλλά αντίθετη κατεύθυνση.

(Δ) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση που έχει η πέτρα τη χρονική στιγμή $t = 5.00$ s.

ΛΥΣΗ

Επιλέξτε ως αρχικό σημείο τη θέση εκτόξευσης της σφαίρας και ως τελικό σημείο τη θέση που βρίσκεται 5.00 s αργότερα.

Υπολογίστε την ταχύτητα στη θέση Ⓓ από την Εξίσωση Μ2.13:

$$v_{y\text{Ⓓ}} = v_{y\text{Ⓐ}} + a_y t = 20.0\ \text{m/s} + (-9.80\ \text{m/s}^2)(5.00\ \text{s}) = \boxed{-29.0\ \text{m/s}}$$

Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση Μ2.16 για να βρείτε τη θέση της πέτρας τη χρονική στιγμή $t_{\text{Ⓓ}} = 5.00$ s:

$$y_{\text{Ⓓ}} = y_{\text{Ⓐ}} + v_{y\text{Ⓐ}}\,t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

$$= 0 + (20.0\ \text{m/s})(5.00\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(-9.80\ \text{m/s}^2)(5.00\ \text{s})^2$$

$$= \boxed{-22.5\ \text{m}}$$

Η επιλογή της χρονικής στιγμής $t = 0$ είναι αυθαίρετη. Για παράδειγμα, επιλέξτε ως $t = 0$ τη χρονική στιγμή στην οποία η πέτρα βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο της κίνησής της. Στη συνέχεια, λύστε πάλι τα μέρη (Γ) και (Δ) του προβλήματος χρησιμοποιώντας τη νέα αρχική χρονική στιγμή και παρατηρήστε ότι οι απαντήσεις σας είναι ίδιες με προηγουμένως.

ΚΙ ΑΝ...; Τι θα συμβεί αν η ρίψη γίνει από ύψος 30.0 m πάνω από το έδαφος αντί για 50.0 m; Ποιες απαντήσεις στα ερωτήματα (Α) έως (Δ) θα αλλάξουν;

Απάντηση Καμία από τις απαντήσεις δεν θα αλλάξει. Όλη η κίνηση πραγματοποιείται στον αέρα μέσα στα πρώτα 5.00 s. (Σημειώστε ότι ακόμα και για μια ρίψη από τα 30.0 m, η πέτρα βρίσκεται πάνω από το έδαφος τη χρονική στιγμή $t = 5.00$ s.) Επομένως, το ύψος της ρίψης δεν έχει καμία σημασία. Από μαθηματικής άποψης, αν εξετάσετε ξανά τους υπολογισμούς, θα δείτε ότι δεν χρησιμοποιήσαμε το ύψος της ρίψης σε καμία εξίσωση.

M2.8 Απόδειξη των εξισώσεων κίνησης