Κεφάλαιο 11

Στροφορμή

Περιεχόμενα Κεφαλαίου 11

- Στροφορμή—Περιστροφή Αντικειμένων πέριξ σταθερού άξονα
- Το Εξωτερικό γινόμενο-Η ροπή ως διάνυσμα
- Στροφορμή Σωματιδίου
- Στροφορμή και Ροπή για Σύστημα Σωματιδίων
- Στροφορμή και Ροπή Συμπαγούς Σώματος
- Διατήρηση Στροφορμής
- Το φαινόμενο Coriolis
- Περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς

11-1 Περιστροφή πέριξ σταθερού άξονα

Η ανάλογη περιστροφική ποσότητα με την γραμμική ορμή είναι η στροφορμή, L:

$$L = I\omega.$$

Ενώ ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση γίνεται:

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει μόνο όταν η ροπή αδράνειας I είναι σταθερή

Όταν στο σύστημα δεν δρα εξωτερική ροπή, τότε η συνολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή:

$$\frac{dL}{dt} = 0 \text{ and } L = I\omega = \text{constant.}$$

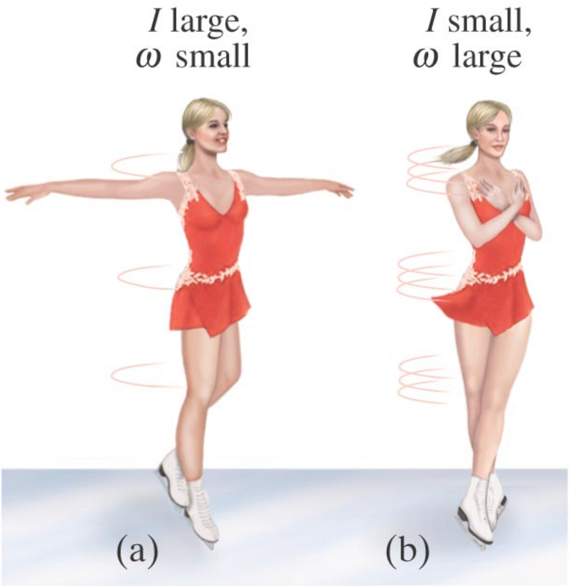
Η διαφορετικά,

***η στροφορμή ενός συστήματος παραμένει σταθερή εφόσον η συνολική εξωτερική ροπή που ασκείται πάνω του είναι μηδέν*.**

Αυτό σημαίνει:

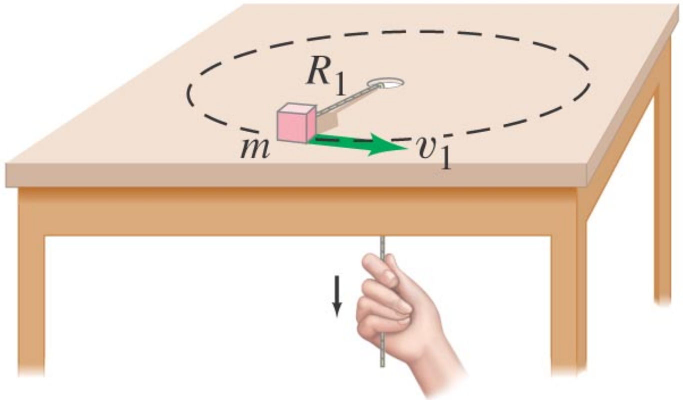
$$I\omega = I_0\omega_0 = \text{constant.}$$

Δηλαδή, εάν κατά τη διάρκεια της περιστροφής έχουμε μεταβολή στην ροπή αδράνειας, τότε αναγκαστικά θα αλλάξει η γωνιακή ταχύτητα

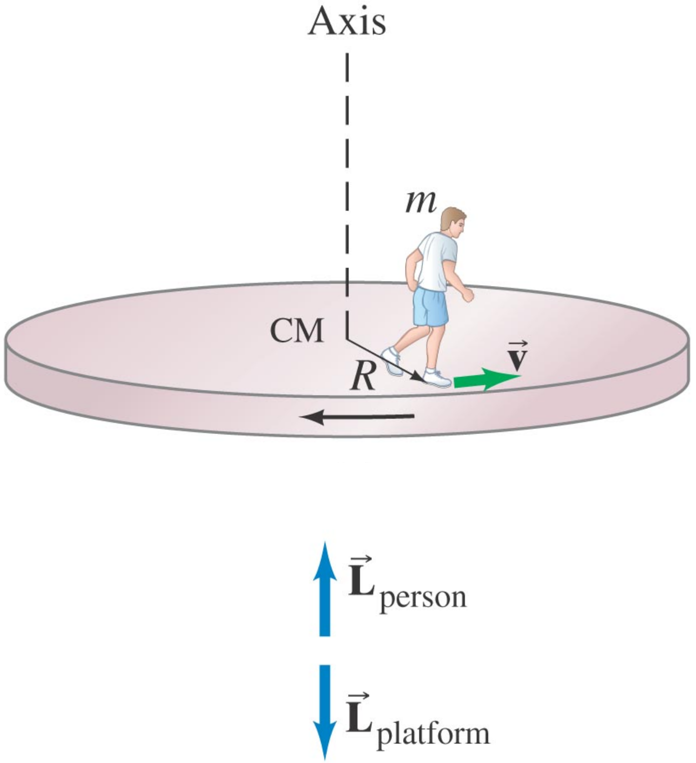


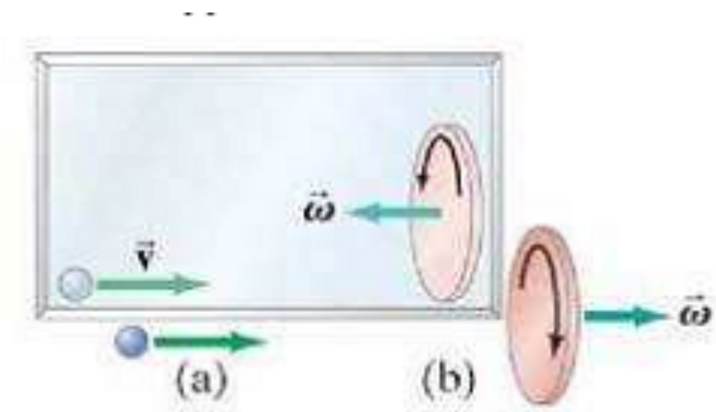
Μια μικρή μάζα m που συγκρατιέται από ένα σκοινί, περιστρέφεται κυκλικά πάνω σε ένα τραπέζι χωρίς τριβές, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αρχικά η μάζα περιστρέφεται με ταχύτητα, v_1 = 2.4 m/s, και ακτίνα, R_1 = 0.80 m. Στη συνέχεια το σκοινί μετατοπίζεται κατακόρυφα προς τα κάτω ώστε η ακτίνα περιστροφής να μικρύνει σε R_2 = 0.48 m. Πόση είναι η νέα ταχύτητα v_2;

ΛΥΣΗ



Η Στροφορμή είναι «διάνυσμα». Για **συμμετρικά** αντικείμενα που περιστρέφονται γύρω από άξονα συμμετρίας η διεύθυνση της στροφορμής είναι ίδια με αυτήν της γωνιακής ταχύτητας





«**ψευτοδιάνυσμα**» (http://en.wikipedia.org/wiki/Pseudovector)

Το ίδιο συμβαίνει με όλα τα διανύσματα που προκύπτουν από εξωτερικά γινόμενα διανυσμάτων

Υποθέτουμε ότι ένας φοιτητής 60-kg στέκεται στην άκρη μιας κυκλικής πλατφόρμας με ακτίνα 6.0-m-προσαρμοσμένη σε ρουλεμάν με μηδενική τριβή και ροπή αδράνειας 1800 kg·m^2. Η πλατφόρμα είναι αρχικά ακίνητη και ο φοιτητής αρχίζει να τρέχει με ταχύτητα 4.2 m/s (ως προς τη Γη) κατά μήκος της περιφέρειας της πλατφόρμας. Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας

APPROACH We use conservation of angular momentum. The total angular momentum is zero initially. Since there is no net torque, $\vec{\mathbf{L}}$ is conserved and will remain zero, as in Fig. 11–5. The person's angular momentum is $L_{\text{per}} = (mR^2)(v/R)$, and we take this as positive. The angular momentum of the platform is $L_{\text{plat}} = -I\omega$.

SOLUTION Conservation of angular momentum gives

$$L = L_{\text{per}} + L_{\text{plat}}$$

$$0 = mR^2\left(\frac{v}{R}\right) - I\omega.$$

So

$$\omega = \frac{mRv}{I} = \frac{(60\,\text{kg})(3.0\,\text{m})(4.2\,\text{m/s})}{1800\,\text{kg}\cdot\text{m}^2} = 0.42\,\text{rad/s}.$$

NOTE The frequency of rotation is $f = \omega/2\pi = 0.067\,\text{rev/s}$ and the period $T = 1/f = 15\,\text{s}$ per revolution.

Εάν υποθέσουμε ότι κρατάω ένα τροχό ποδηλάτου που περιστρέφεται και στέκομαι πάνω σε πλατφόρμα που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβή. Τι θα συμβεί εάν ξαφνικά αντιστρέψω την φορά περιστροφής του τροχού;

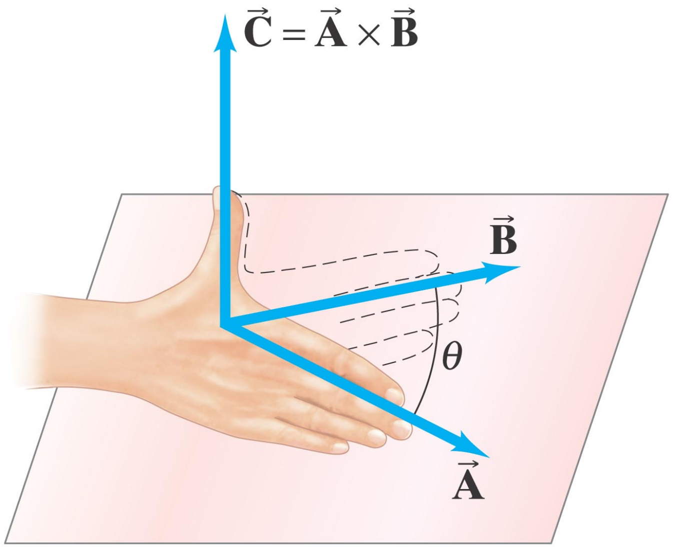
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

11-2 Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Ορίζουμε το **μέτρο ενός εξωτερικού γινομένου** δύο διανυσμάτων ως

$$C = |\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = AB \sin\theta.$$

Η κατεύθυνση του **διανύσματος C** που προκύπτει προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιάς παλάμης :



Εναλλακτικός ορισμός για το εξωτερικό γινόμενο είναι:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\mathbf{i}} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\mathbf{j}} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{\mathbf{k}}.$$

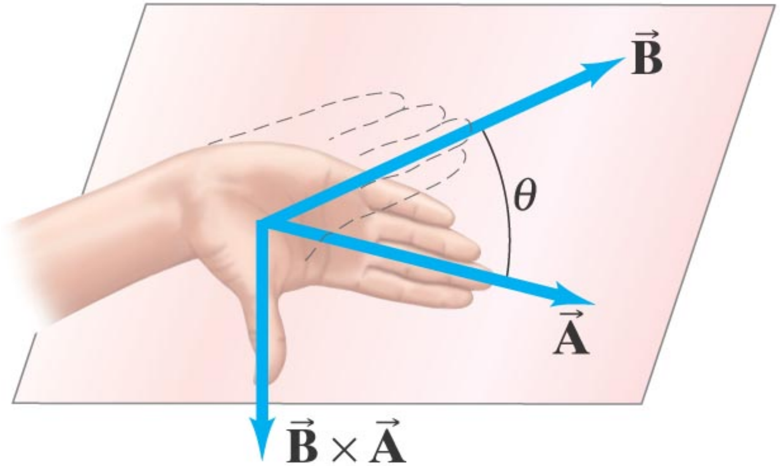
Ορισμένες ιδιότητες:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

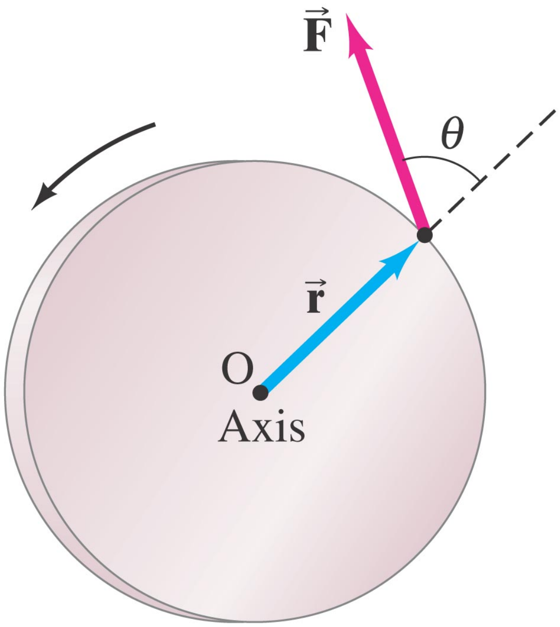
$$\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) + (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}})$$

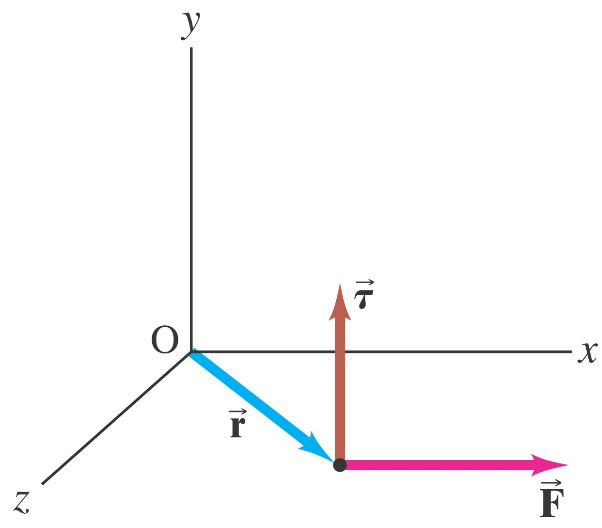
$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}.$$



Η Ροπή μπορεί να οριστεί ως το εξωτερικό γινόμενο της μετατόπισης του σημείου με τη δύναμη:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}.$$

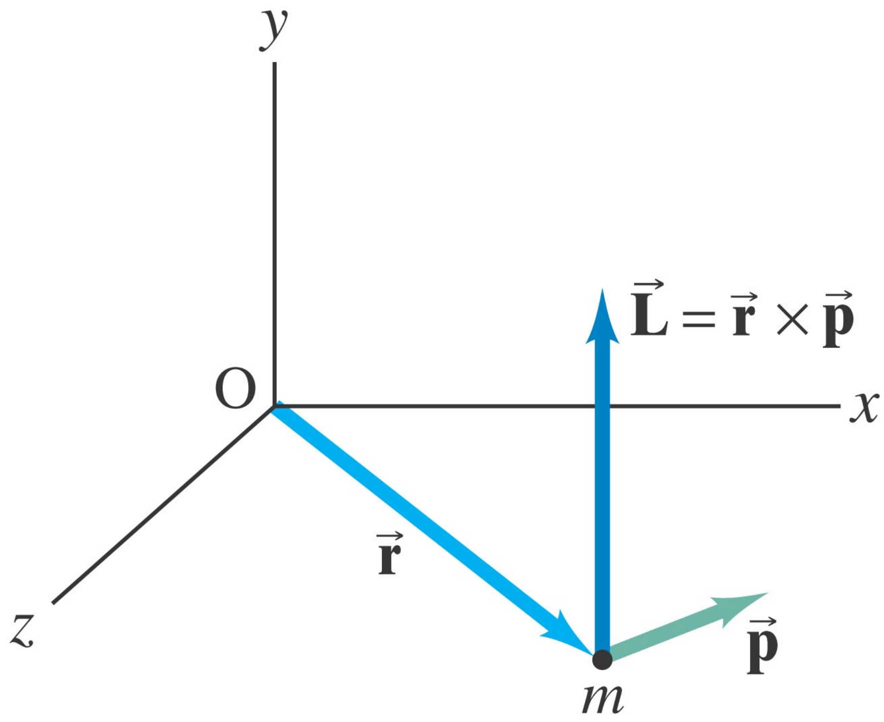




11-3 Στροφορμή σωματιδίου

Η στροφορμή ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}.$$



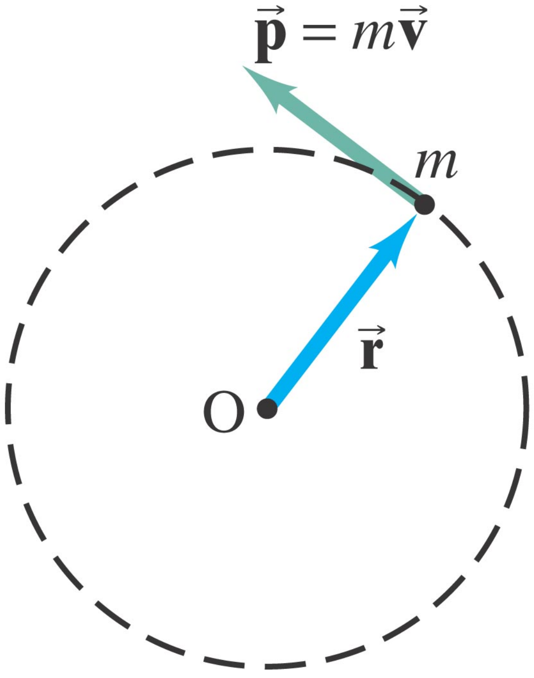
Η χρονική παράγωγος της $\vec{L}$ είναι:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}.$$

Επειδή $\vec{\mathbf{r}} \times \Sigma\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt},$

έχουμε: $\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}.$

Βρείτε τη στροφορμή ενός σωματιδίου μάζας m, που κινείται με ταχύτητα v κυκλικά, ακτίνα r και φορά αντίθετη με αυτή των δεικτών του ρολογιού.



RESPONSE The value of the angular momentum depends on the choice of the point O. Let us calculate $\vec{L}$ with respect to the center of the circle, Fig. 11–13. Then $\vec{r}$ is perpendicular to $\vec{p}$ so $L = |\vec{r} \times \vec{p}| = rmv$. By the right-hand rule, the direction of $\vec{L}$ is perpendicular to the plane of the circle, outward toward the viewer. Since $v = \omega r$ and $I = mr^2$ for a single particle rotating about an axis a distance r away, we can write

$$L = mvr = mr^2\omega = I\omega.$$

11-4 Στροφορμή Συστήματος Σωματιδίων-Γενική Κίνηση

Η στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων δύναται να μεταβληθεί μόνο εάν υπάρχει εξωτερική ροπή- οι ροπές εξ αιτίας εσωτερικών δυνάμεων αναιρούνται μεταξύ τους.

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} .$$

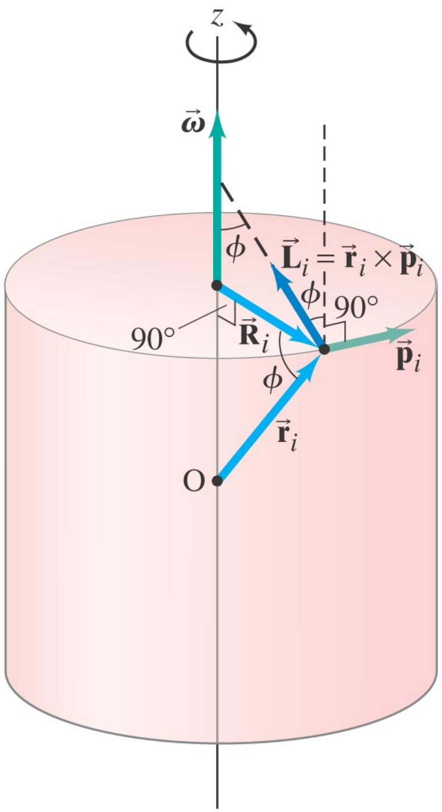
Η σχέση αυτή ισχύει για οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα. Ισχύει ακόμη και για ΚΜ (CM) που επιταχύνεται.

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{CM}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{CM}} .$$

11-5 Στροφορμή και Ροπή για στερεό Σώμα

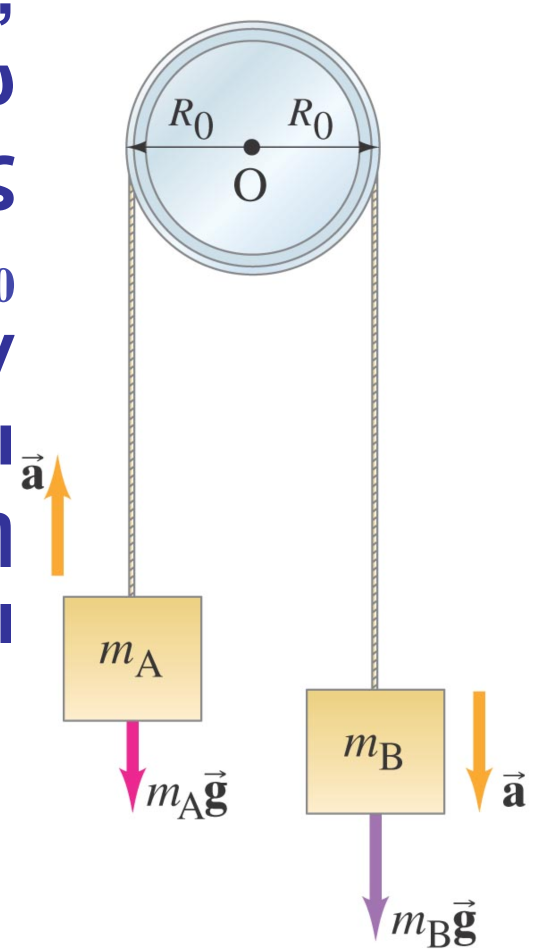
Για ένα στερεό σώμα αποδεικνύεται ότι η στροφορμή του δίδεται από τη σχέση:

$$L_\omega = I\omega.$$



Η μηχανή του Atwood

Όπως έχουμε ξαναδεί η μηχανή του Atwood αποτελείται από δύο μάζες, m_A και m_B, που συνδέονται μέσω τροχαλίας με έναν ιμάντα αμελητέας μάζας. Εάν η τροχαλία έχει ακτίνα R_0 και ροπή αδράνειας I, βρείτε την επιτάχυνση των μαζών m_A και m_B, και συγκρίνατε με την περίπτωση όπου η ροπή αδράνειας της τροχαλίας είναι μηδέν.



ΛΥΣΗ

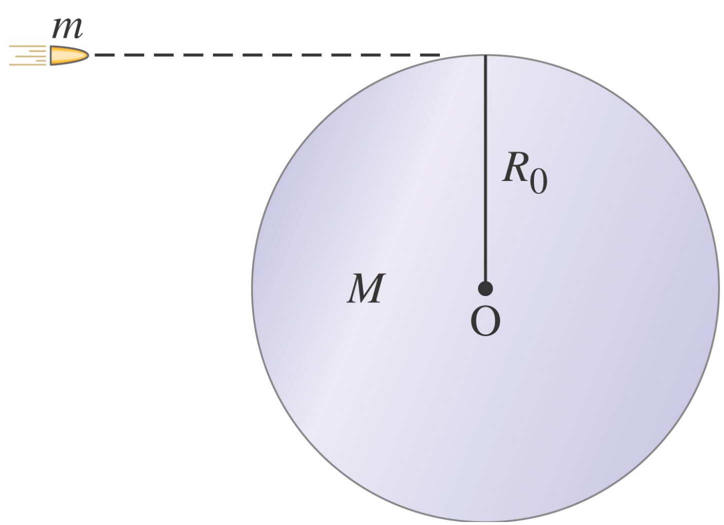
11-6 Διατήρηση της Στροφορμής

Εάν η ροπή σε ένα σύστημα είναι σταθερή τότε,

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0 \quad \text{and} \quad \vec{\mathbf{L}} = \text{constant.} \qquad \left[\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = 0\right]$$

***Η συνολική στροφορμή ενός συστήματος παραμένει σταθερή εφόσον η συνολική εξωτερική ροπή που δρα στο σύστημα είναι μηδέν*.**

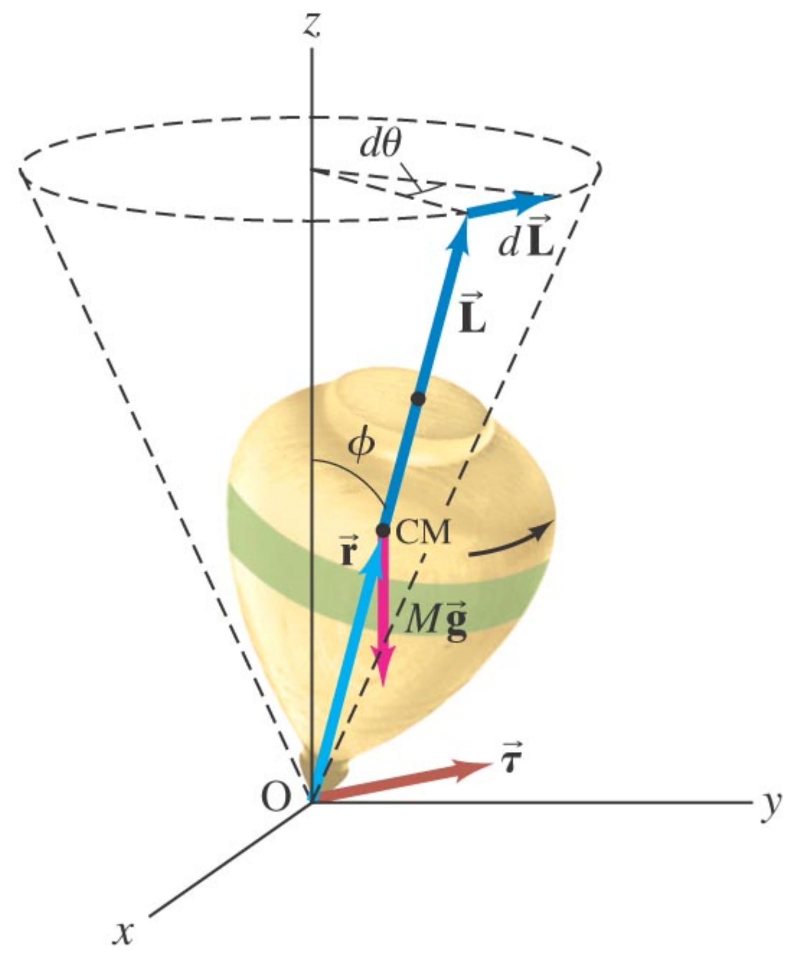
Μια σφαίρα (άτομο) μάζας m κινείται με ταχύτητα v και ενσωματώνεται στην περιφέρεια ενός κυλίνδρου (μορίου) μάζας M και ακτίνας R_0. Ο κύλινδρος που είναι αρχικά ακίνητος αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του ο οποίος (ο άξονας) δεν μετακινείται. Αγνοώντας τριβές, πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου μετά την κρούση; Διατηρείται η κινητική ενέργεια;



ΛΥΣΗ

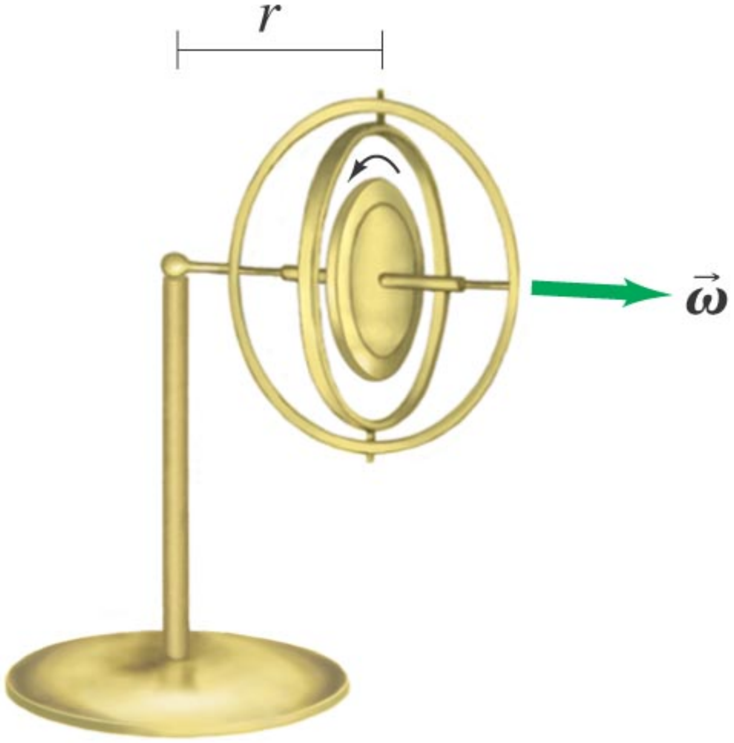
11-7 Σβούρες

Ο άξονας περιστροφής μια σβούρας θα μετατοπίζεται (precess) γύρω από το σημείο επαφής της σβούρας λόγω της ροπής που δημιουργεί η βαρύτητα όταν ο άξονας της σβούρας δεν είναι κατακόρυφος.



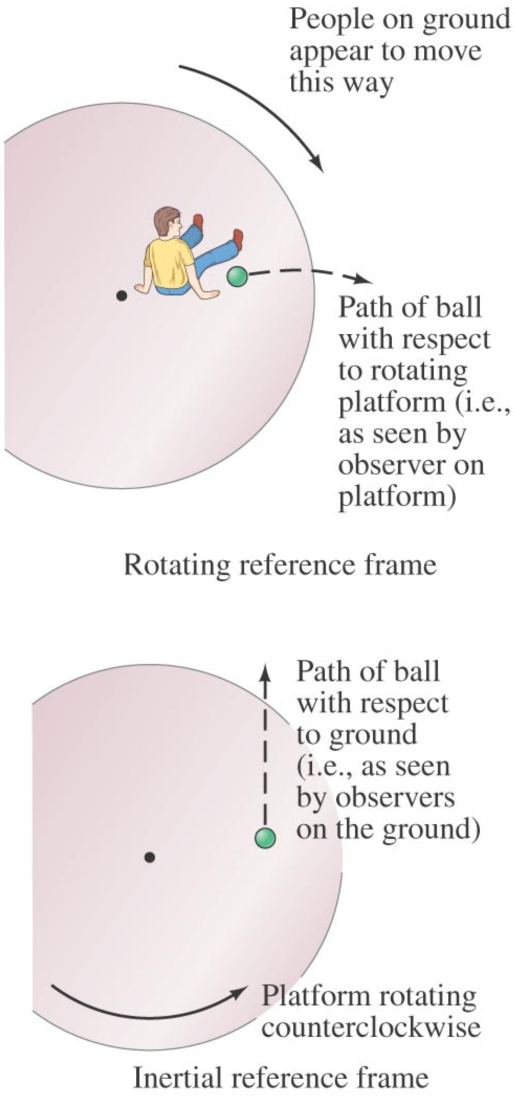
Η γωνιακή ταχύτητα της μετατόπισης του άξονα περιστροφής (precession) είναι :

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}.$$



11-8 Περιστρεφόμενα Συστήματα Αναφοράς Δυνάμεις Αδράνειας

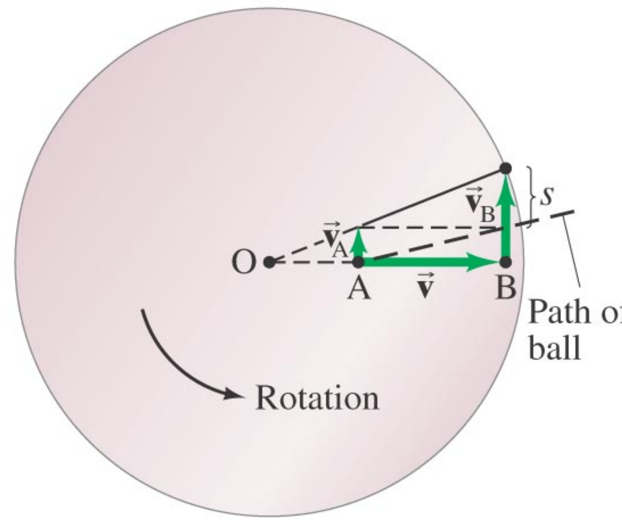
Ως αδρανειακό ορίσαμε ένα σύστημα όπου ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα. Ένα σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται έχει γωνιακή επιτάχυνση και επομένως ορισμένα δεν είναι «αυστηρά» αδρανειακά.



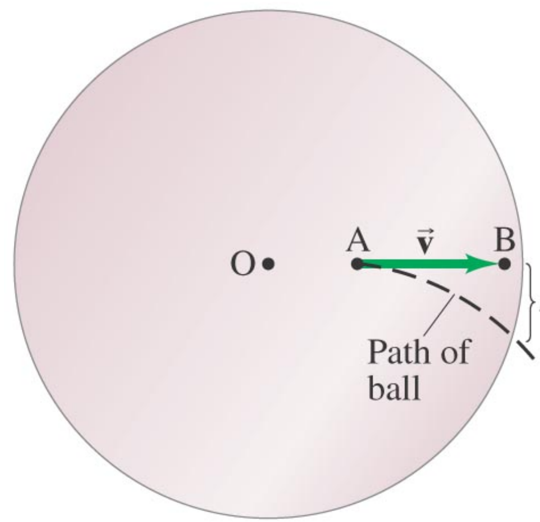
Υπάρχει μια φαινομενολογική δύναμη που ασκείται πάνω σε αντικείμενα που βρίσκονται μέσα σε ένα σύστημα που περιστρέφεται. Η «ψευτοδύναμη» αυτή, έχει φορά προς τα έξω και την ονομάζουμε φυγόκεντρος δύναμη.

11-9 Το φαινόμενο Coriolis

Σε ένα αντικείμενο που κινείται σε μη αδρανειακό σύστημα, ασκείται άλλη μια «ψευτοδύναμη». Τούτο γιατί καθώς κινείται το αντικείμενο προς μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα περιστροφής, η γραμμική του ταχύτητά (εφαπτόμενη) δεν αυξάνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το αντικείμενο να εμφανίζει μια «πλάγια» μετατόπιση.



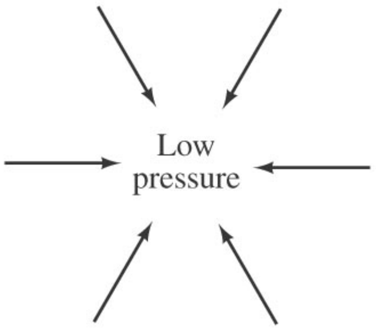
Inertial reference frame

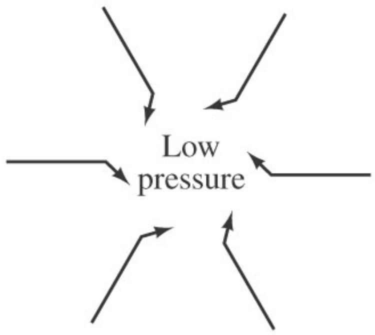


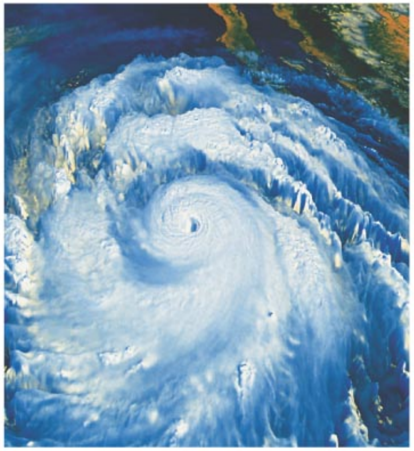
Rotating reference frame

11-9 Το φαινόμενο Coriolis

Το φαινόμενο Coriolis ευθύνεται για την περιστροφή των αέριων μαζών (καταιγίδες) γύρω από περιοχές χαμηλών πιέσεων—αριστερόστροφα στο Βόρειο ημισφαίριο και Δεξιόστροφα στο Νότιο.







Η επιτάχυνση Coriolis είναι:

$$a_{\mathrm{Cor}} = 2\omega v.$$