# Κεφάλαιο 10

# Περιστροφική Κίνηση

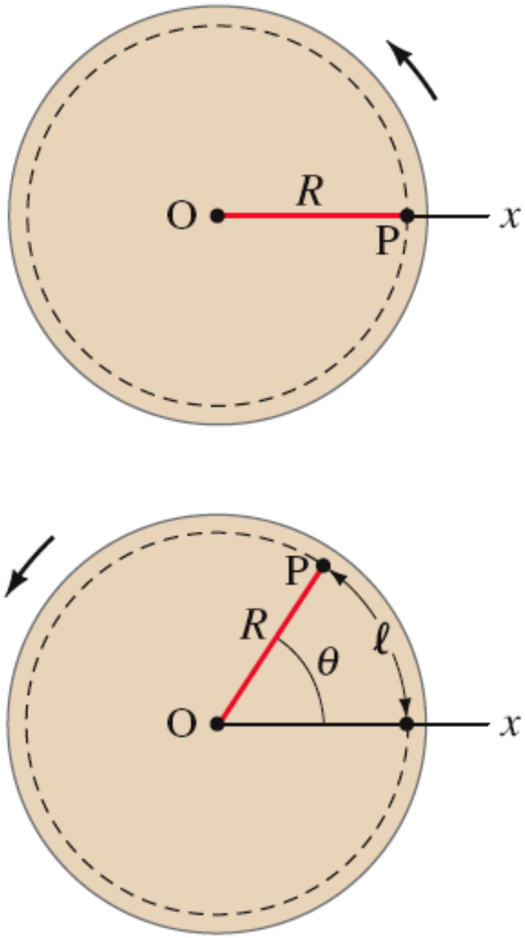
# Περιεχόμενα Κεφαλαίου 10

- Γωνιακές Ποσότητες
- Διανυσματικός Χαρακτήρας των Γωνιακών Ποσοτήτων
- Σταθερή γωνιακή Επιτάχυνση
- Ροπή
- Δυναμική της Περιστροφικής Κίνησης, Ροπή και Περιστροφική Αδράνεια
- Επίλυση Προβλημάτων περιστροφικής Δυναμικής

# Περιεχόμενα Κεφαλαίου 10

- Προσδιορισμός ροπών Αδράνειας
- Περιστροφική Ενέργεια
- Περιστροφική και μεταφορική κίνηση. Κύλιση
- Γιατί επιβραδύνεται μια Σφαίρα που κυλάει

# 10-1 Γωνιακές Ποσότητες





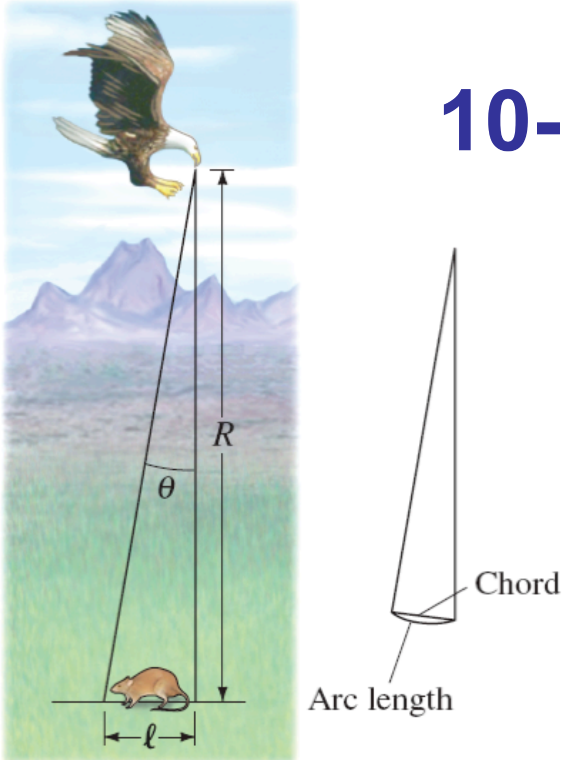

Σε μια καθαρά **περιστροφική κίνηση**, όλα τα σημεία του αντικειμένου κινούνται κυκλικά γύρω από άξονα περιστροφής (“*O*”). Η ακτίνα του κύκλου είναι *R*. Όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω σε ευθεία που τέμνει τον άξονα περιστροφής διαγράφουν την ίδια **γωνία** στον ίδιο **χρόνο**. Η γωνία $\theta$ σε **radians** (ακτίνια) ορίζεται:

$$\theta = \frac{l}{R},$$

(http://en.wikipedia.org/wiki/Radian )

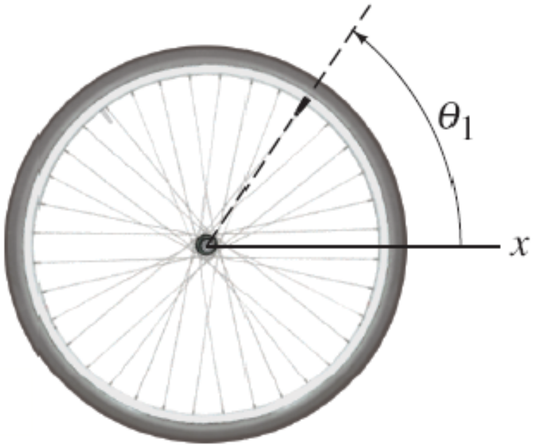
όπου $l$ το **μήκος του τόξου**.

# 10-1 Γωνιακές Ποσότητες




**Το μάτι του γερακιού μπορεί και διακρίνει αντικείμενα τα οποία «καλύπτουν» 3 x $10^{-4}$ rad. (α) Σε πόσες μοίρες αντιστοιχούν (β) Από ύψος 100 m ποιο είναι το μήκος ενός θηράματος που μπορεί να διακρίνει**

**ΛΥΣΗ**

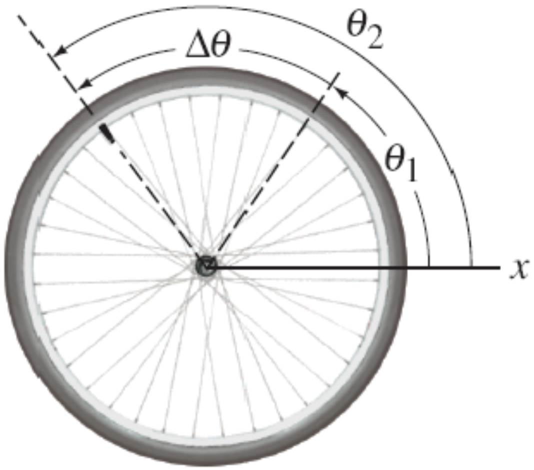



**Γωνιακή Μετατόπιση:**

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 .$$

**Η μέση γωνιακή ταχύτητα είναι ο λόγος της γωνιακής μετατόπισης ως προς τον χρόνο:**

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$




**Στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα:**

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

Η **μέση γωνιακή επιτάχυνση** είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας :

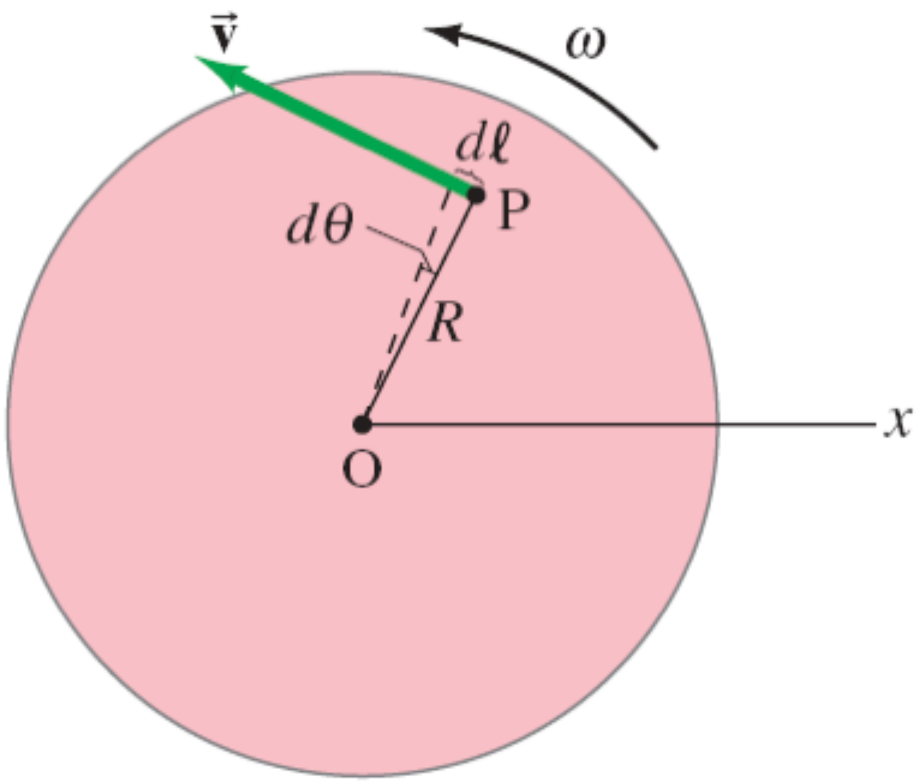
$$\overline{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Και αντίστοιχα **στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση**

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

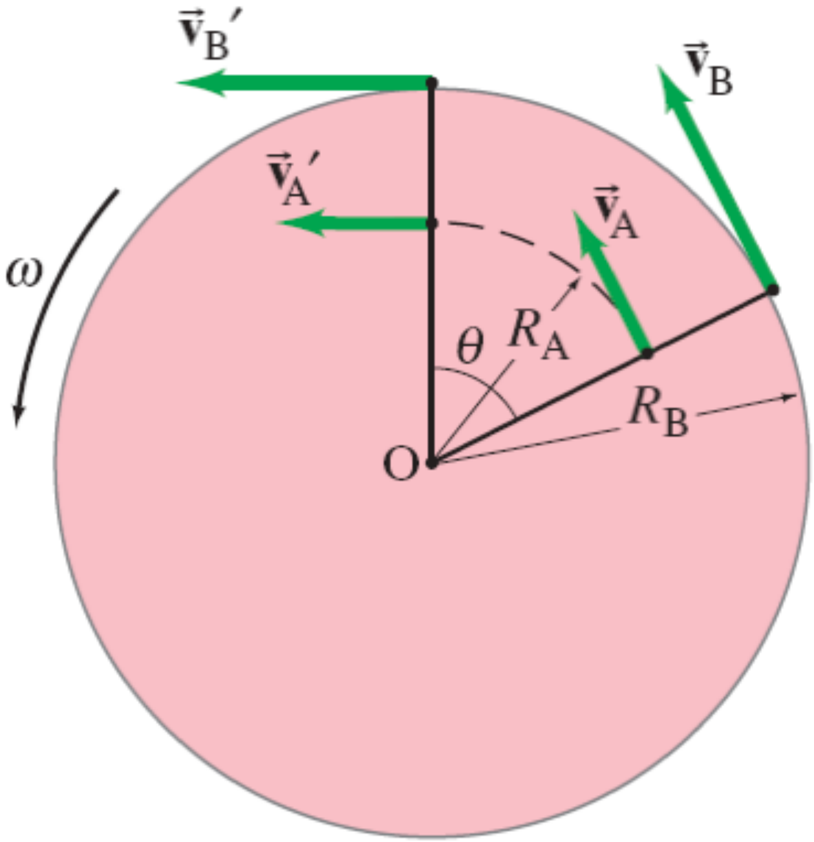
**Κάθε σημείο ενός σώματος που περιστρέφεται έχει γωνιακή ταχύτητα *ω* και γραμμική ταχύτητα *v*, *που συνδέονται με τη σχέση*.**

$$v = R\omega.$$

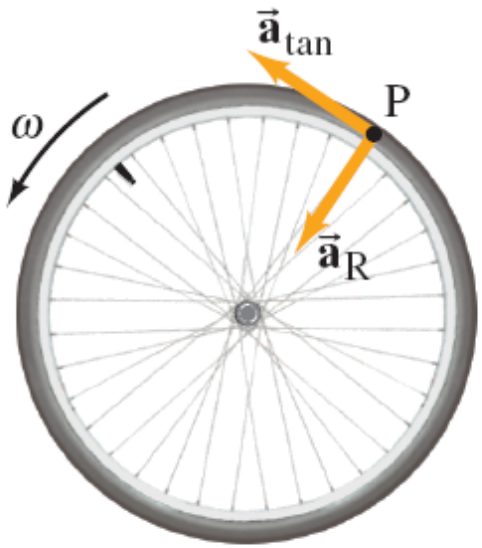


**Σε ένα καρουσέλ ένα παιδάκι κάθεται σε αλογάκι σε εξωτερικό σημείο ενώ ένα άλλο σε λιοντάρι κοντά στο κέντρο περιστροφής . (α) Ποιο από τα παιδιά έχει μεγαλύτερη γραμμική ταχύτητα; (β) Ποιο έχει μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα;**

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**




**Όσο μεγαλύτερη η απόσταση από τον άξονα περιστροφής τόσο μεγαλύτερη η γραμμική ταχύτητα**




**Η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται όταν υπάρχει εφαπτόμενη επιτάχυνση :**

$$a_{\tan} = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha.$$

**Εφόσον έχουμε περιστροφική κίνηση έχουμε αναγκαστικά ακτινική επιτάχυνση (κεντρομόλος):**

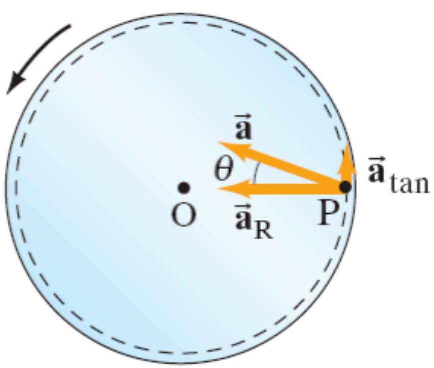
$$a_{R} = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = \omega^2 R.$$

Ο πίνακας δείχνει τις αντιστοιχίες μεταξύ των παραμέτρων γραμμικής και περιστροφικής κίνησης:

**TABLE 10–1**
**Linear and Rotational Quantities**

| Linear | Type | Rotational | Relation ($\theta$ in radians) |
|---|---|---|---|
| $x$ | displacement | $\theta$ | $x = R\theta$ |
| $v$ | velocity | $\omega$ | $v = R\omega$ |
| $a_{tan}$ | acceleration | $\alpha$ | $a_{tan} = R\alpha$ |

Ένα καρουσέλ αρχικά είναι ακίνητο. Την χρονική στιγμή $t = 0$ αναπτύσσει σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 0.060\ \text{rad/s}^2$, και αυξάνει τη γωνιακή του ταχύτητα για 8.0 s. At $t = 8.0$ s, βρείτε τα μεγέθη για τις ποσότητες: (α) γωνιακή ταχύτητα (β) γραμμική ταχύτητα ενός παιδιού που βρίσκεται 2.5 m από το κέντρο (γ) τη γραμμική επιτάχυνση (εφαπτόμενη) (δ) την κεντρομόλο επιτάχυνση και (δ) τη συνολική γραμμική επιτάχυνση




**ΛΥΣΗ**

Η **συχνότητα** είναι ο αριθμός των **περιστροφών (πλήρης)** ανά δευτερόλεπτο (s):

$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Η Μονάδα συχνότητας είναι το **hertz**:

$$1\ \mathrm{Hz} = 1\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Η **Περίοδος** είναι αντίστροφη της συχνότητας:

$$T = \frac{1}{f}.$$

**Ο σκληρός δίσκος ενός υπολογιστή περιστρέφεται με 7200 rpm (rpm = revolutions per minute = rev/min). (α) Ποια είναι η γωνιακή του ταχύτητα (rad/s) ; (β) Εάν η κεφαλή ανάγνωσης βρίσκεται 3.00 cm από τον άξονα περιστροφής, πόση είναι η γραμμική ταχύτητα στο σημείο αυτό; (γ) Ένα bit απαιτεί 0.50 μm μήκος «για να γραφτεί» στη διεύθυνση της κίνησης, πόσα bits / s μπορεί να γράψει η κεφαλή στα 3.00 cm;**

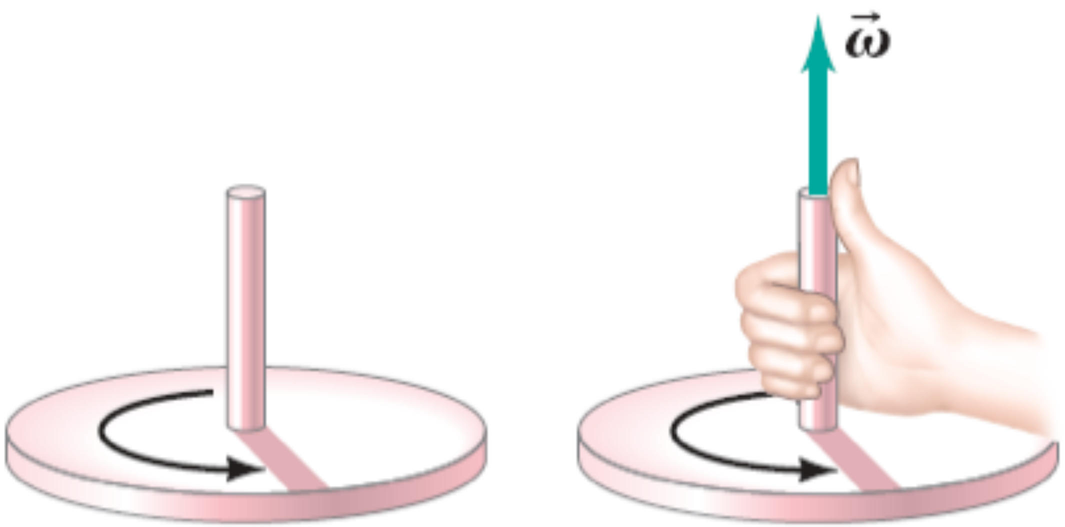
**ΛΥΣΗ**

**Δίσκος με ακτίνα $R$ = 3.0 m περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega$ = (1.6 + 1.2$t$) rad/s, όπου $t$ είναι σε δευτερόλεπτα. Τη στιγμή $t$ = 2.0 s, βρείτε (α) τη γωνιακή επιτάχυνση και (β) τη ταχύτητα $v$ και τις συνιστώσες της επιτάχυνσης $a$ ενός σημείου στην περιφέρεια του δίσκου.**

## ΛΥΣΗ

# 10-2 Διανυσματική Φύση των Γωνιακών Ποσοτήτων

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας έχει διεύθυνση τον άξονα περιστροφής και κατεύθυνση (προσανατολισμό) αυτή που προβλέπει ο κανόνας δεξιόστροφου κοχλία (ή της δεξιάς παλάμης).



# 10-3 Σταθερή Γωνιακή Επιτάχυνση

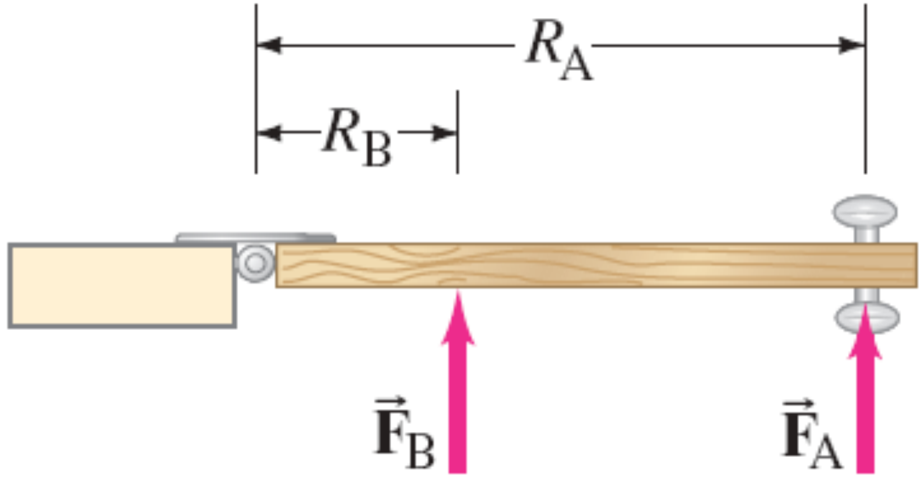
**Για σταθερή επιτάχυνση οι εξισώσεις κίνησης είναι απολύτως ανάλογες με αυτές της γραμμικής κίνησης.**

| **Angular** | **Linear** |
|---|---|
| $\omega = \omega_0 + \alpha t$ | $v = v_0 + at$ |
| $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ | $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ |
| $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$ | $v^2 = v_0^2 + 2ax$ |
| $\overline{\omega} = \dfrac{\omega + \omega_0}{2}$ | $\overline{v} = \dfrac{v + v_0}{2}$ |

# 10-4 Ροπή

Για να αρχίσει να περιστρέφεται ένα αντικείμενο απαιτείται δύναμη.  Το σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη αλλά και η  διεύθυνσή της είναι ουσιώδη.

Η απόσταση του σημείου στο οποίο δρα η δύναμη περιστροφής από τον άξονα περιστροφή ονομάζεται μοχλοβραχίονας.



# 10-4 Ροπή


Axis of rotation

Axis of rotation

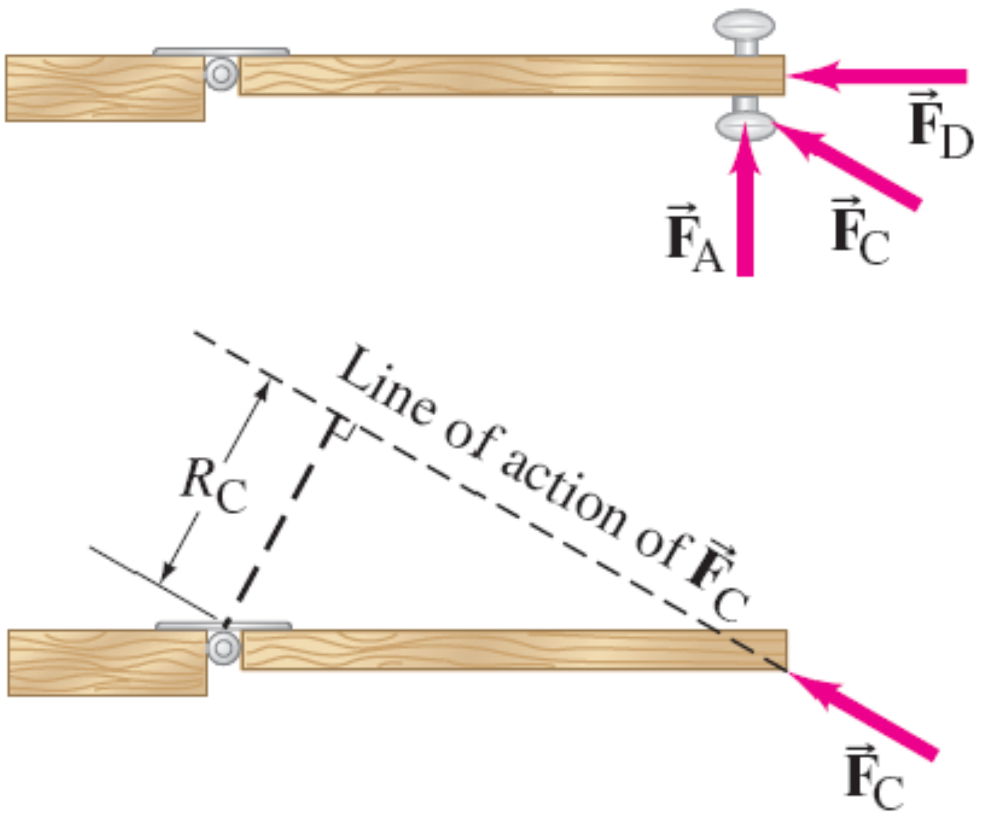
Ο μακρύς μοχλοβραχίονας είναι ενίοτε πολύ χρήσιμος

# 10-4 Ροπή

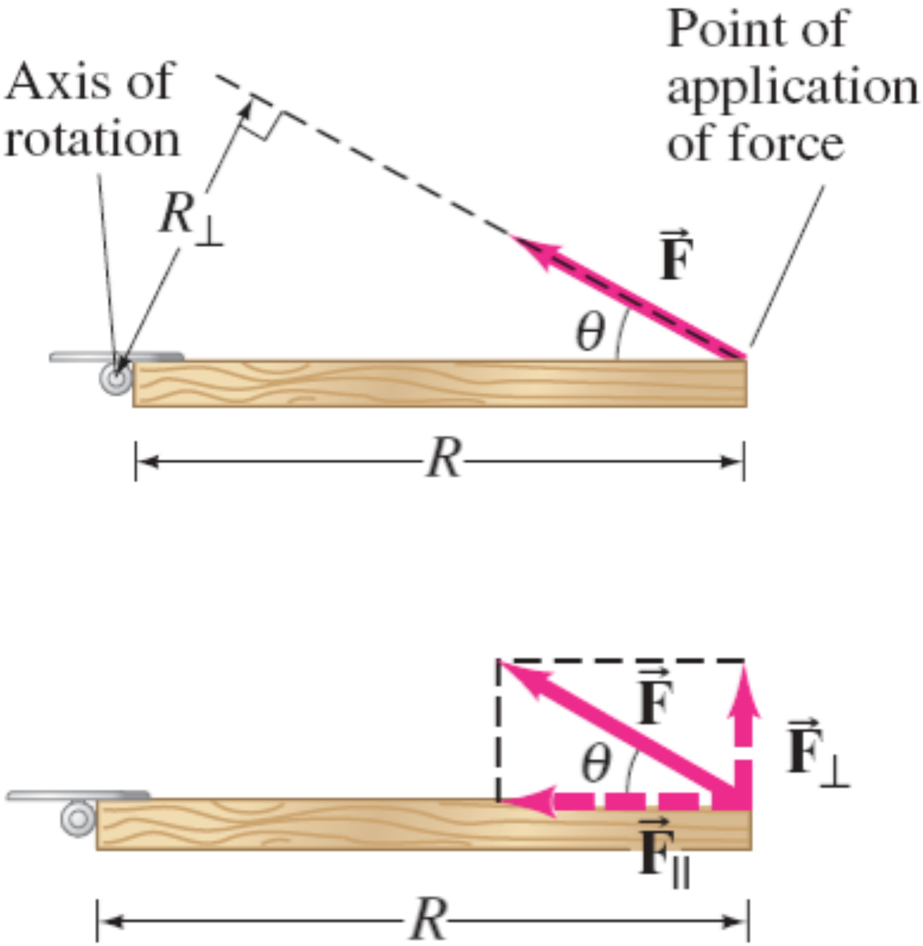
$F_A$ : ο μοχλοβραχίονας ισούται με την **απόσταση πόμολο-μεντεσές**

$F_D$ : ο μοχλοβραχίονας ισούται με **μηδέν**

$F_C$ : βλέπε σχήμα.

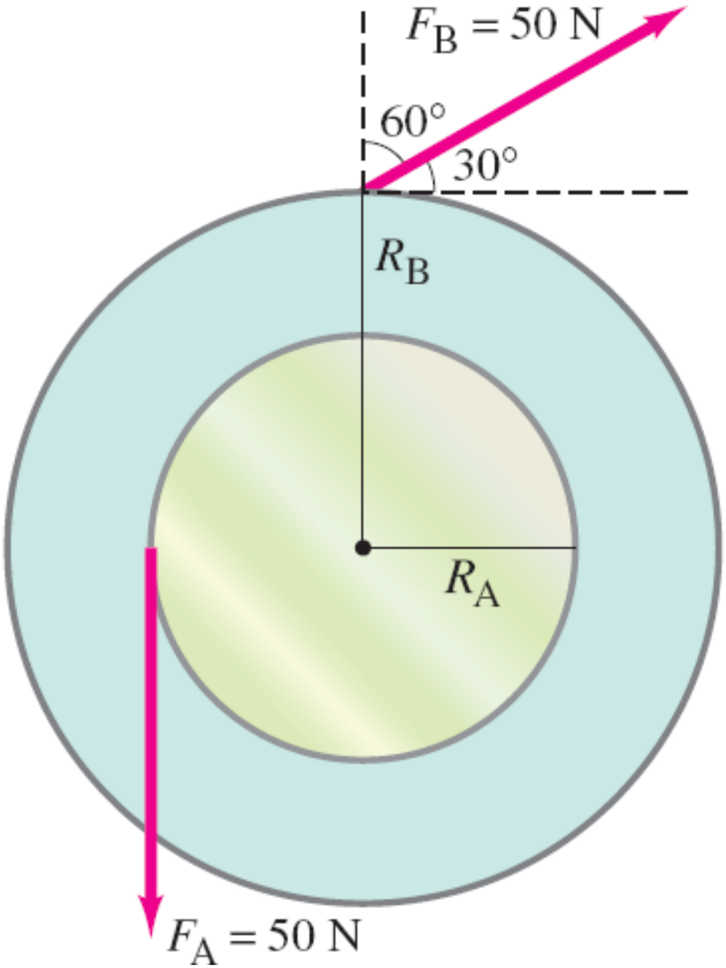


# 10-4 Ροπή (Torque)

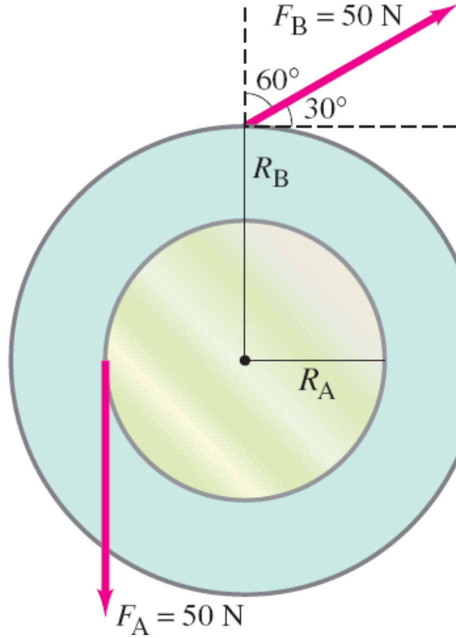



**Η Ροπή ορίζεται από την σχέση:**

$$\tau = R_\perp F.$$




**Δύο τροχοί έχουν ακτίνες $R_A$ = 30 cm και $R_B$ = 50 cm, συνδέονται μέσω κεντρικού άξονα περιστροφής. Υπολογίστε τη συνολική ροπή στον τροχό εξ αιτίας των δύο δυνάμεων που φαίνονται στο σχήμα (50 N έκαστη).**




**APPROACH** The force $\vec{\mathbf{F}}_A$ acts to rotate the system counterclockwise, whereas $\vec{\mathbf{F}}_B$ acts to rotate it clockwise. So the two forces act in opposition to each other. We must choose one direction of rotation to be positive—say, counterclockwise. Then $\vec{\mathbf{F}}_A$ exerts a positive torque, $\tau_A = R_A F_A$, since the lever arm is $R_A$. On the other hand, $\vec{\mathbf{F}}_B$ produces a negative (clockwise) torque and does not act perpendicular to $R_B$, so we must use its perpendicular component to calculate the torque it produces: $\tau_B = -R_B F_{B\perp} = -R_B F_B \sin\theta$, where $\theta = 60°$. (Note that $\theta$ must be the angle between $\vec{\mathbf{F}}_B$ and a radial line from the axis.)

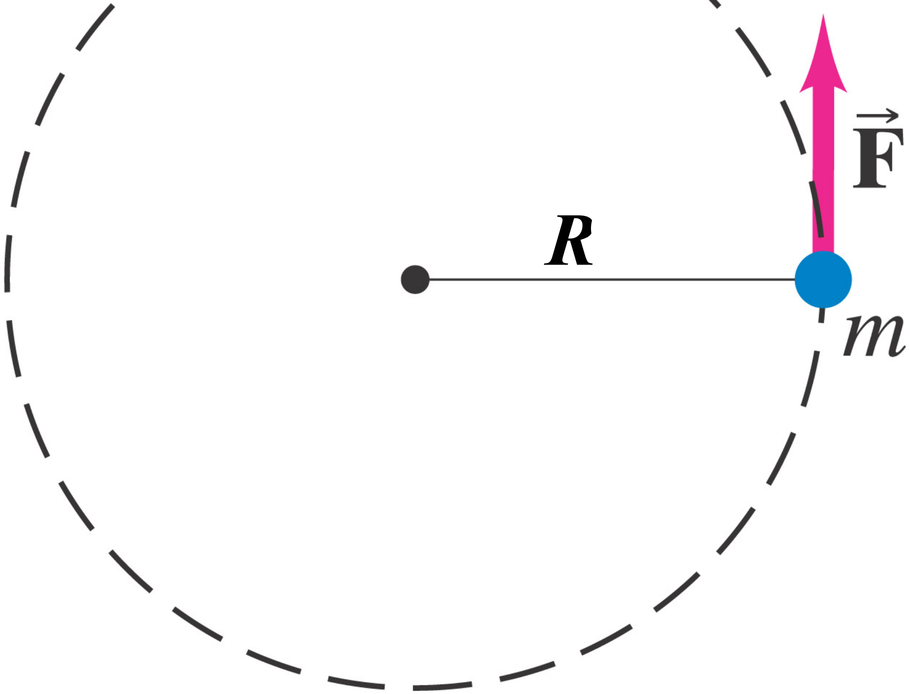
**SOLUTION** The net torque is

$$\begin{aligned}\tau &= R_A F_A - R_B F_B \sin 60° \\ &= (0.30\,\text{m})(50\,\text{N}) - (0.50\,\text{m})(50\,\text{N})(0.866) = -6.7\,\text{m}\cdot\text{N}.\end{aligned}$$

This net torque acts to accelerate the rotation of the wheel in the clockwise direction.

# 10-5 Δυναμική Περιστροφικής Κίνησης-Ροπή και Αδράνεια Περιστροφής

Γνωρίζοντας $F = ma$, βλέπουμε ότι $\tau = mR^2\alpha.$



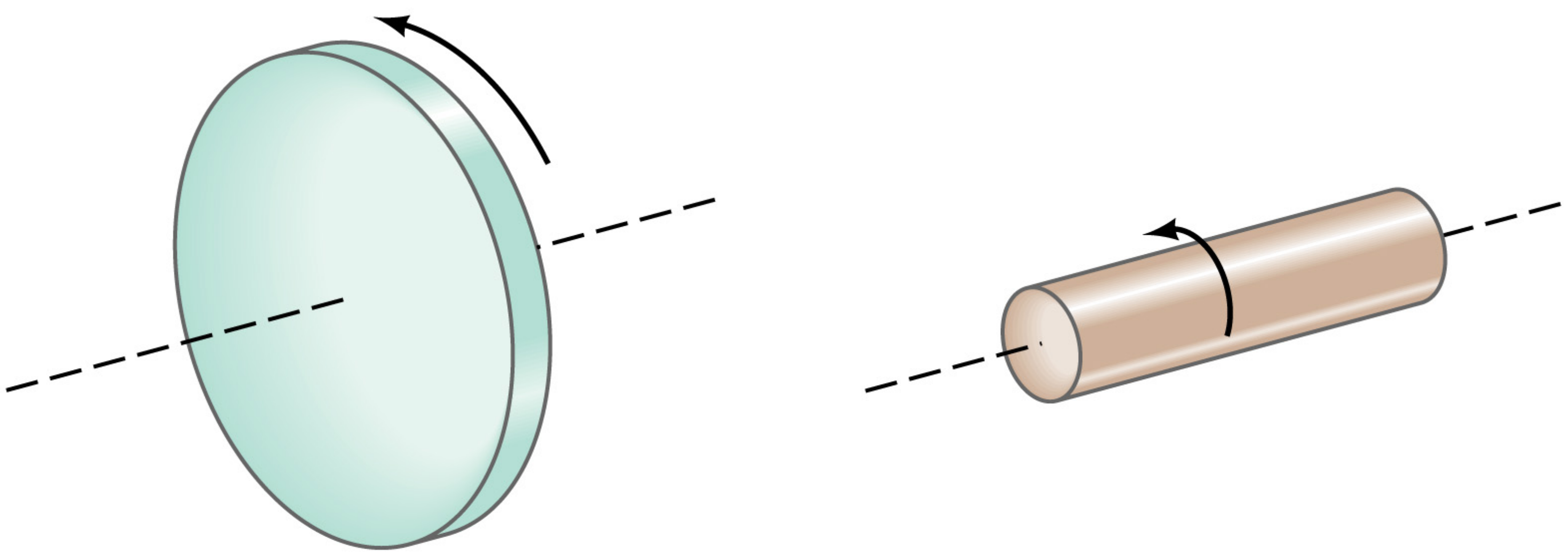

Η σχέση αυτή ισχύει για σημείο, τι συμβαίνει όμως για εκτεταμένα σώματα;

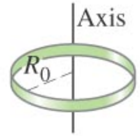
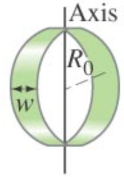
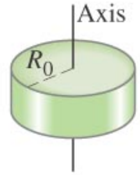
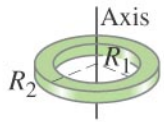
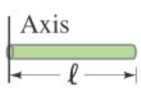
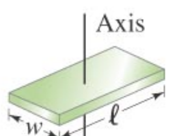
Μιας και η γωνιακή επιτάχυνση είναι ίδια για όλα τα σημεία του σώματος, γράφουμε :

$$\Sigma\tau = \left(\Sigma mR^2\right)\alpha.$$

Η ποσότητα $I = \Sigma m_i R_i^2$ ονομάζεται ροπή αδράνειας του σώματος.

Βλέπουμε ότι από τον ορισμό αυτό, **έχει σημασία πως είναι κατανεμημένη η μάζα** σε ένα σύνθετο αντικείμενο (π.χ. μόριο). Στο παράδειγμα βλέπουμε δύο αντικείμενα με την ίδια μάζα αλλά η ροπή αδράνειας ως προς του άξονες περιστροφής που απεικονίζονται είναι διαφορετικές. Ο δίσκος έχει μεγαλύτερη αδράνεια.



| | Object | Location of axis | | Moment of inertia |
|---|---|---|---|---|
| (a) | **Thin hoop,** radius $R_0$ | Through center |  | $MR_0^2$ |
| (b) | **Thin hoop,** radius $R_0$ width $w$ | Through central diameter |  | $\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mw^2$ |
| (c) | **Solid cylinder,** radius $R_0$ | Through center |  | $\frac{1}{2}MR_0^2$ |
| (d) | **Hollow cylinder,** inner radius $R_1$ outer radius $R_2$ | Through center |  | $\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ |
| (e) | **Uniform sphere,** radius $r_0$ | Through center |  | $\frac{2}{5}Mr_0^2$ |
| (f) | **Long uniform rod,** length $\ell$ | Through center |  | $\frac{1}{12}M\ell^2$ |
| (g) | **Long uniform rod,** length $\ell$ | Through end |  | $\frac{1}{3}M\ell^2$ |
| (h) | **Rectangular thin plate,** length $\ell$, width $w$ | Through center |  | $\frac{1}{12}M(\ell^2 + w^2)$ |



**Εκτός από την κατανομή της μάζας σημασία έχει και η θέση του άξονα περιστροφής**

# 10-6 Πως λύνουμε προβλήματα Περιστροφής

1. Διάγραμμα.
2. Επιλέγουμε το σύστημα.
3. Διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος απεικονίζοντας όλες τις δυνάμεις.
4. Βρίσκουμε τους άξονες περιστροφής και τις ροπές και τις ροπές αδράνειας.

5. Εφαρμόζουμε τους Νόμους του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση ή άλλη κίνηση που έχουμε.

6. Λύνουμε.

8. Ελέγχουμε τις μονάδες και την τάξη μεγέθους του αποτελέσματος.

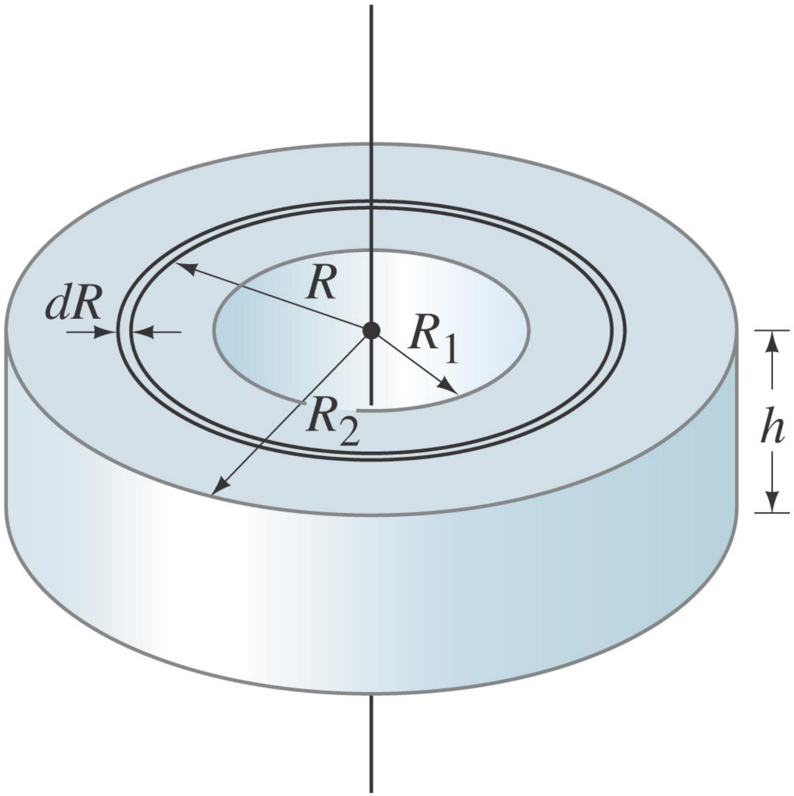
# 10-7 Προσδιορισμός Ροπών Αδράνειας

Η Ροπή αδράνειας μπορεί να προσδιοριστεί πειραματικά όταν το αντικείμενο είναι διαθέσιμο.

Εάν το αντικείμενο είναι συμπαγές χρησιμοποιούμε την σχέση:

$$I = \int R^2 \, dm.$$

(α) Δείξτε ότι η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου με εσωτερική ακτίνα $R_1$, εξωτερική ακτίνα $R_2$ και μάζα $M$, είναι $I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$, ως προς τον άξονα περιστροφής του σχήματος. (β) Πόση είναι η ροπή αδράνειας εάν ο κύλινδρος δεν είχε την κεντρική οπή (συμπαγής).



**APPROACH** We know that the moment of inertia of a thin ring of radius $R$ is $mR^2$. So we divide the cylinder into thin concentric cylindrical rings or hoops of thickness $dR$, one of which is indicated in Fig. 10–24. If the density (mass per unit volume) is $\rho$, then

$$dm = \rho\, dV,$$

where $dV$ is the volume of the thin ring of radius $R$, thickness $dR$, and height $h$. Since $dV = (2\pi R)(dR)(h)$, we have

$$dm = 2\pi\rho h R\, dR.$$

**SOLUTION** (*a*) The moment of inertia is obtained by integrating (summing) over all these rings:

$$I = \int R^2\, dm = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\rho h R^3\, dR = 2\pi\rho h\left[\frac{R_2^4 - R_1^4}{4}\right] = \frac{\pi\rho h}{2}\left(R_2^4 - R_1^4\right),$$

where we are given that the cylinder has uniform density, $\rho$ = constant. (If this were not so, we would have to know $\rho$ as a function of $R$ before the integration could be carried out.) The volume $V$ of this hollow cylinder is $V = \left(\pi R_2^2 - \pi R_1^2\right)h$, so its mass $M$ is

$$M = \rho V = \rho\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)h.$$

Since $\left(R_2^4 - R_1^4\right) = \left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)$, we have

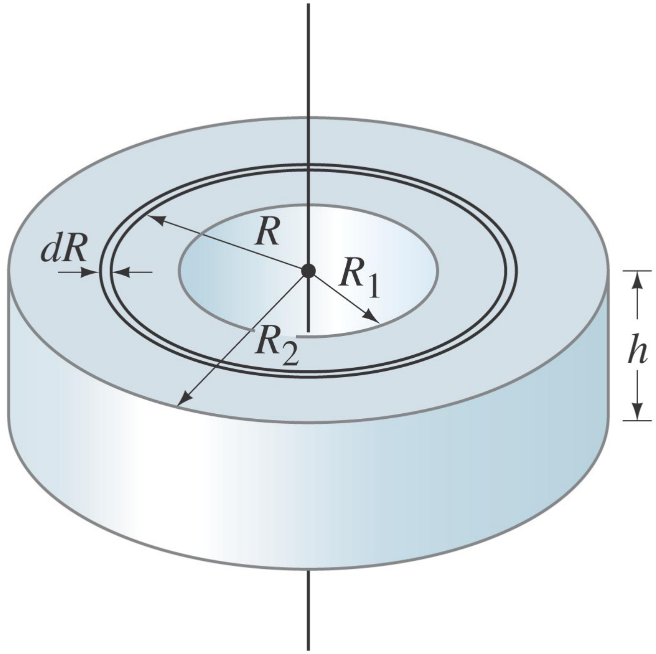
$$I = \frac{\pi\rho h}{2}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right) = \tfrac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right),$$

as stated in Fig. 10–20d.

(*b*) For a solid cylinder, $R_1 = 0$ and if we set $R_2 = R_0$, then

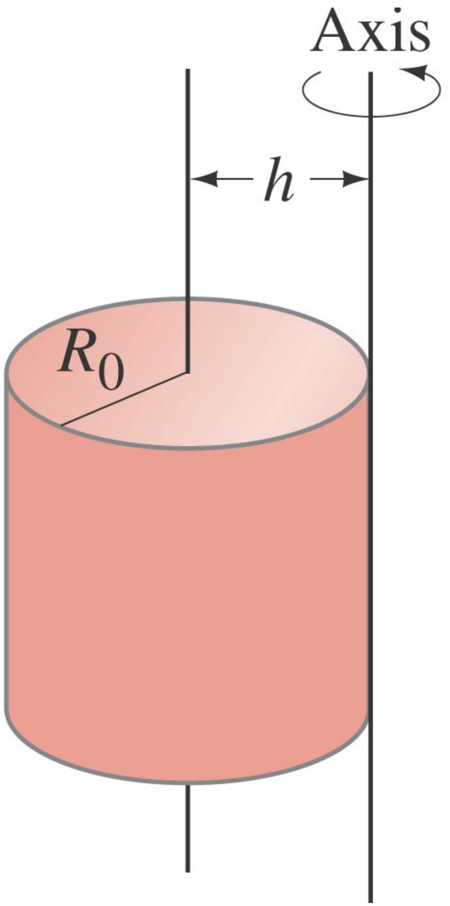
$$I = \tfrac{1}{2}MR_0^2,$$

which is that given in Fig. 10–20c for a solid cylinder of mass $M$ and radius $R_0$.



Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων μας επιτρέπει αν προσδιορίσουμε την ροπή αδράνειας ως προς άξονα παράλληλο με τον άξονα που περνά από το ΚΜ

$$I = I_{CM} + Mh^2.$$




**Βρείτε την ροπή αδράνειας του κυλίνδρου με ακτίνα $R_0$ και μάζα $M$ ως προς άξονα παράλληλο στον άξονα συμμετρίας και σε απόσταση $h=R_0$.**

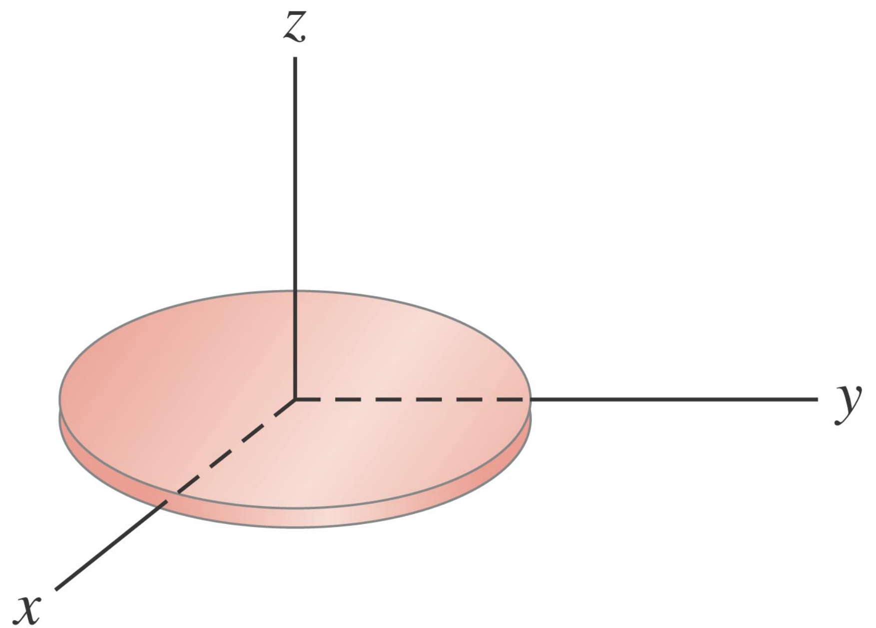
**APPROACH** We use the parallel-axis theorem with $I_{CM} = \frac{1}{2}MR_0^2$ (Fig. 10–20c).

**SOLUTION** Since $h = R_0$, Eq. 10–17 gives

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \frac{3}{2}MR_0^2.$$

## Για επίπεδα αντικείμενα ισχύει η σχέση.

$$I_z = I_x + I_y.$$



# 10-8 Περιστροφική Ενέργεια

Η Κινητική ενέργεια ενός αντικειμένου που περιστρέφεται είναι

$$K = \Sigma\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right).$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε ότι:

$$\text{rotational } K = \tfrac{1}{2}I\omega^2.$$

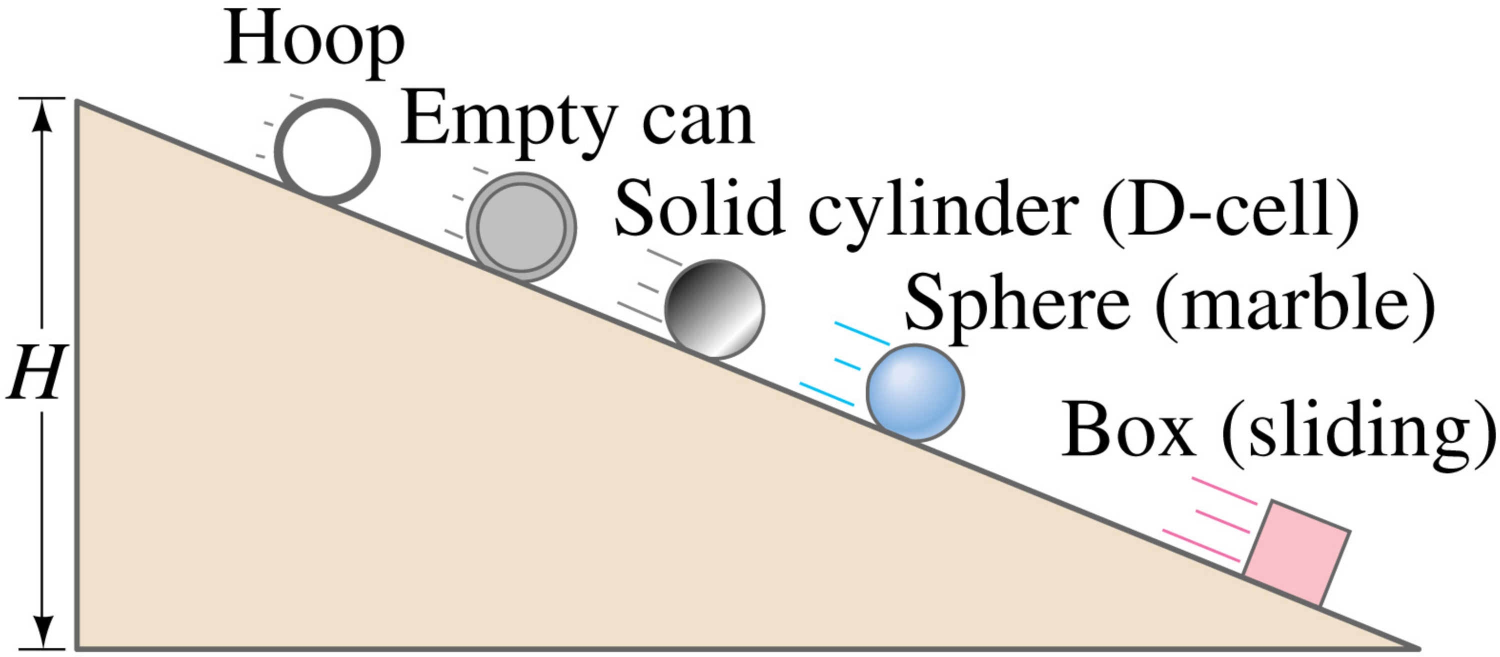
Συνολικά η «κινητική ενέργεια» του αντικειμένου είναι:

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2 + \tfrac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\omega^2.$$

# 10-8 Διατήρηση της Ενέργειας

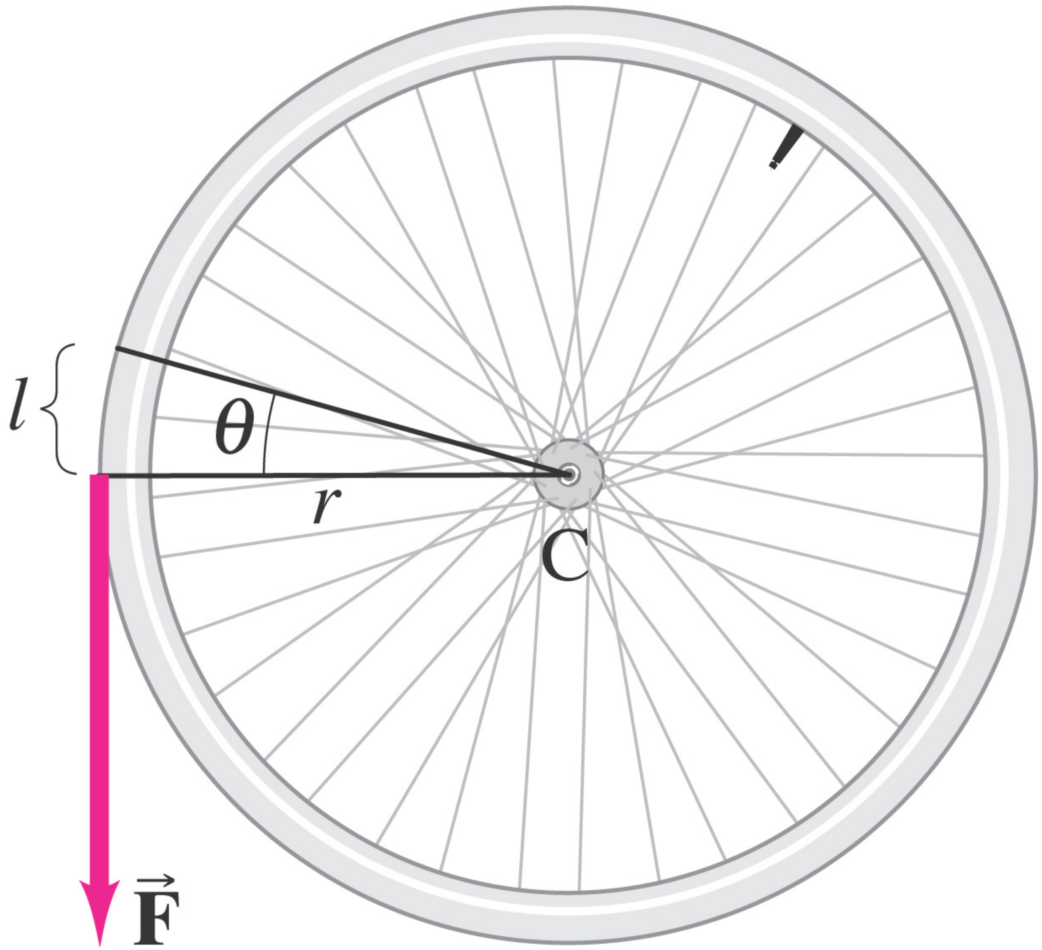
Όλες οι μορφές ενέργειας λαμβάνονται υπόψη όταν εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας .

Όλα τα αντικείμενα του σχήματος έχουν την ίδια δυναμική ενέργεια στην κορυφή αλλά στο τέλος της κλίσης, η κατανομή της ενέργειας διαφέρει από αντικείμενο σε αντικείμενο, αν και η συνολική ενέργεια είναι σταθερή.

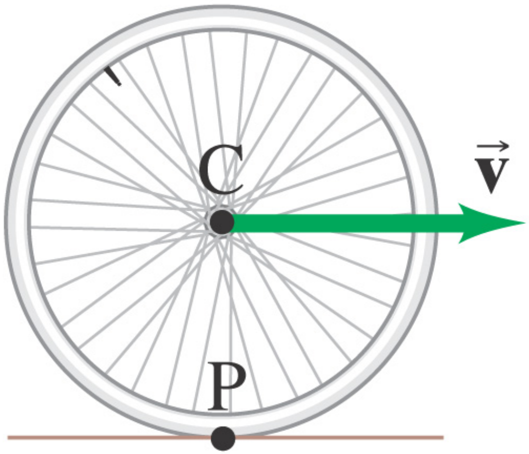


# Το έργο της ροπής είναι :

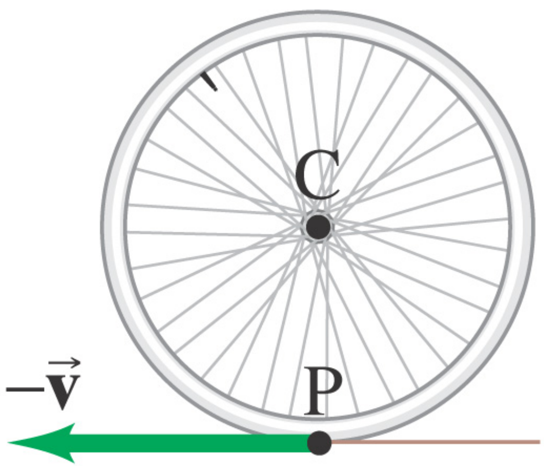
$$W = \tau \Delta \theta.$$



# 10-9 Κύλιση-Μεταφορική και Περιστροφική Ενέργεια




Στην πάνω περίπτωση η ρόδα κυλάει χωρίς να ολισθαίνει. Το σημείο P, σε επαφή με το έδαφος, στιγμιαία είναι ακίνητο και το κέντρο κινείται με ταχύτητα. $\vec{v}$




Στην κάτω περίπτωση το κέντρο παραμένει ακίνητο και το σημείο P κινείται με ταχύτητας – $\vec{v}$.

Η σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας είναι :

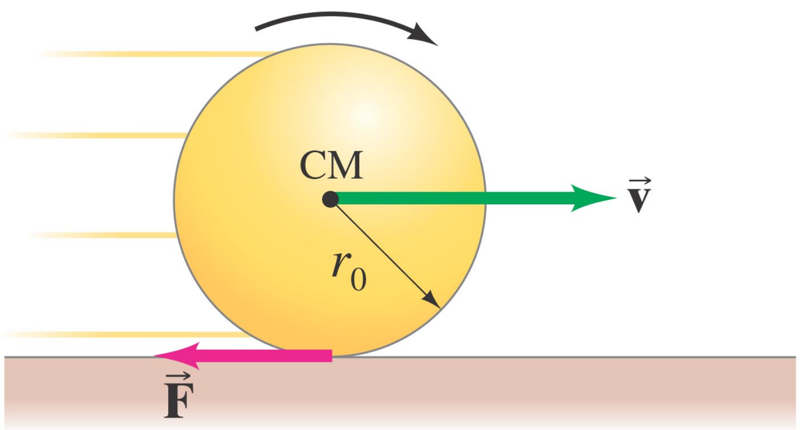
$$v = R\omega.$$

# 10-10 Γιατί επιβραδύνεται μια σφαίρα που κυλάει;

## Ποια είναι η δύναμη που σταματάει τη σφαίρα;

## Εάν πούμε απλά η δύναμη τις «τριβής» τότε προκύπτουν τα εξής προβλήματα:

- Η τριβή δρα στο σημείο επαφής και επομένως από το σχήμα βλέπουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας θα πρέπει να αυξάνεται!
- Η βαρύτητα και η κάθετη δύναμη έχουν κατεύθυνση κατά μήκος της ακτίνας και επομένως μηδενική ροπή.



## Απάντηση: Η τέλεια σφαίρα δεν σταματά ποτέ!

**Η μικρές παραμορφώσεις, αποκλίσεις από την τέλεια σφαίρα και την απόλυτα επίπεδη επιφάνεια, δηλ. τη σημειακή επαφή με την επιφάνεια, δημιουργούν ροπές που τελικά ακινητοποιούν την σφαίρα.**